

# Théorie analytique des nombres: la fonction $\zeta$ .

Pierre Rouchon

Centre Automatique et Systèmes  
Mines ParisTech  
pierre.rouchon@mines-paristech.fr

Novembre 2012

## 1 Fonctions génératrices

- Jean Dieudonné dans l'Encyclopaedia Universalis
- Exemples

## 2 La fonction $\zeta$

- Produit Eulerien
- Prolongement analytique de  $\zeta$
- Répartition des nombres premiers
- Le théorème de la progression arithmétique

# Quelques références

- Excellent résumé dans le premier chapitre du cours ENST de Zémor.
- “Que sais-je” sur les nombres premiers (un éclairage probabiliste ainsi qu’une preuve élémentaire mais assez difficile du théorème des nombres premiers).
- Excellent livre de vulgarisation de Jean-Paul Delahaye sur les nombres premiers aux éditions Belin.
- l’Encyclopedia Universalis comporte d’excellents articles sur des sujets connexes.
- Le livre classique dû à Hardy et Wright.
- Les carnets de Ramanujan . . .

“ Ce qu'on appelle la théorie analytique des nombres ne peut pas être considéré comme une théorie mathématique au sens usuel qu'on donne à ces mots, c'est-à-dire un système organisé de définitions et de théorèmes généraux accompagné d'applications à des exemples importants. Il s'agit au contraire ici presque exclusivement de problèmes particuliers qui se posent en arithmétique et qui, pour la plupart, consistent à étudier l'allure à l'infini de certaines fonctions définies par des conditions de nature arithmétique : par exemple le nombre  $\pi(x)$  de nombres premiers  $p \leq x$  ou le nombre  $U(n)$  des solutions de l'équation  $(x_1)^2 + (x_2)^2 = n$  en nombres entiers  $(x_1, x_2)$ . Depuis 1830, on a imaginé, pour résoudre ces questions, des méthodes d'une extraordinaire ingéniosité qui consistent à **associer aux fonctions arithmétiques** étudiées des **fonctions analytiques** auxquelles on peut appliquer la **théorie de Cauchy** ou l'analyse harmonique ; mais, malgré les succès spectaculaires obtenus par ces méthodes, on ne peut dire que l'on en comprenne vraiment les raisons profondes. ”

- La méthode consiste à associer à une suite d'entiers  $a_n$  (définis par une construction arithmétique (nombre de solutions d'une équation dépendant de  $n$ , cardinal d'un certain ensemble d'entiers plus petits que  $n$ , ...)) **une série formelle**.
- Le plus simple est de considérer la série

$$S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$$

mais il faut être souvent plus malin comme nous le verrons avec les nombres premiers  $p_n$ .

- Suite à des manipulations astucieuses on propose une autre écriture de cette série que l'on manipule alors avec les règles usuelles de calcul sur les fonctions de la variable complexe (dérivée, résidu, intégrale de Cauchy, ...).
- Les informations sur les  $a_n$ , pour des **grands indices**  $n$  sont reliées aux **singularités** de la fonction analytique attachée à la série  $S$ .

- $a_n$  est le nombre de solutions en entiers  $\geq 0$  de  $x + 2y + 3z = n$ .
- Alors

$$\sum_{n \geq 0} a_n X^n = \frac{1}{(1-X)(1-X^2)(1-X^3)}.$$

car

$$\frac{1}{1-X} = 1 + X + X^2 + X^3 + \dots$$

- Maintenant pour calculer  $a_n$ , il vaut mieux passer par la décomposition en éléments simples ( $j = \exp(2i\pi/3)$ )

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-X)(1-X^2)(1-X^3)} &= \frac{1}{6(1-X)^3} + \frac{1}{4(1-X)^2} + \frac{17}{72(1-X)} \\ &+ \frac{1}{8(1+X)} + \frac{1}{9(1-jX)} + \frac{1}{9(1-j^2X)}. \end{aligned}$$

- Comme  $a_n = \frac{d^n S}{dX^n}(0)/(n!)$  on calcule cette dérivée  $n$ -ième sur la décomposition en éléments simples
- En utilisant l'identité

$$\frac{d^n}{dX^n} \left( \frac{1}{(1 - \beta X)^\alpha} \right)_{X=0} = \beta^n \alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + n - 1)$$

on obtient

$$a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{12} + \frac{n+1}{4} + \frac{17}{72} + \frac{(-1)^n}{8} + \frac{j^n + j^{2n}}{9}.$$

- Si nous nous intéressons à une **estimation de  $a_n$  pour  $n$  grand**, il suffit de considérer le **pôle de degré le plus élevé en  $X = 1$** , les autres donnant des contributions en  $n$  au plus. Ainsi, la structure des singularités de  $S(X)$ , i.e., de ces pôles, donnent les asymptotiques de  $a_n$  pour  $n$  grand.

# Généralisation

**Exo:** Soient  $r$  entiers  $> 0$ ,  $q_1, \dots, q_r$ , sans diviseurs communs autre que 1. Notons  $a_n$  le nombre de solutions en entiers strictement positifs  $(x_1, \dots, x_r)$  de l'équation diophantienne

$$q_1x_1 + \dots + q_rx_r = n.$$

1 Monter que la série génératrice est

$$S(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n = \frac{1}{(1 - X^{q_1}) \dots (1 - X^{q_r})}$$

2 En déduite, a partir du pôle de plus haut degré, que

$$a_n \sim \frac{n^{r-1}}{q_1 \dots q_r (r-1)!}.$$



Voici un autre exemple donné par **Jacobi** à l'aide de sa théorie des **fonctions elliptiques**. Le problème consiste à chercher le nombre de solutions  $a_n$  en nombres entiers (positifs ou négatifs) d'une équation à  $r$  inconnues :

$$x_1^2 + \dots + x_r^2 = n$$

Ce nombre  $a_n$  est le coefficient de  $X^n$  dans la série de  $(F(X))^r$  où

$$F(X) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} X^{m^2}.$$

Cette série converge pour  $X \in \mathbb{C}$  de module plus petit que 1.

- Le nombre de partitions  $p(n)$  d'un entier  $n \geq 0$  est par définition le nombre de solutions en entiers  $x_i \geq 0$  de

$$x_1 + 2x_2 + \dots + mx_m + \dots = n$$

où le nombre d'inconnues  $m$  n'est pas limité

- La série génératrice, convergente pour  $|X| < 1$ , est donnée par :

$$S(X) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)X^n = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - X^m)^{-1}.$$

- $p(n)$  à l'aide de la formule de Cauchy  $p(n) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{S(z)}{z^{n+1}} dz$  où  $\mathcal{C}$  est un lacet entourant 0 à l'intérieur du disque unité.

- En évaluant cette intégrale selon un contour  $\mathcal{C}$  bien choisi à l'intérieur du disque unité mais proche le cercle unité, Hardy et

Ramanujan ont montré que  $p(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3n}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)$ .

- On note  $\mathbb{P}$  l'ensemble des nombres premiers et  $(p_n)_{n \geq 1}$  les nombres premiers rangés par ordre croissant ( $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$ ) : Euler a "codé" la suite des  $p_n$  dans une fonction de la variable complexe  $s$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

- Le lien entre  $\zeta$  et les nombres premiers vient du calcul génial suivant :

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \dots\right).$$

En développant ce produit infini, nous voyons qu'il fait intervenir  $\frac{1}{p_1^{\alpha_1 s}} \dots \frac{1}{p_k^{\alpha_k s}}$  pour  $k$  entier et  $\alpha_j$  entier et  $p_j$  premier.

- C'est maintenant en jouant sur les deux formes de  $\zeta$ , la série de Dirichlet  $\sum 1/n^s$  et le produit eulérien  $\prod 1/(1 - 1/p^s)$  que l'on obtient des informations sur les grands nombres premiers.

- Dès 1737, Euler avait utilisé  $\zeta$  comme fonction de la variable réelle  $s$  pour étudier la suite  $p_n$ .
- L'équivalent  $\pi(x) \sim x/\log(x)$ , le nombre de  $p_n$  plus petits que l'entier  $x$ , avait été conjecturé par Gauss et Legendre à la fin du XVIIIème siècle.
- Il a fallut cependant attendre le milieu du XIXème siècle pour que Tschebyschef établisse par des moyens arithmétiques élémentaires qu'il existe deux constantes  $A$  et  $B$ ,  $0 < A < 1 < B$  telles que, pour  $x$  assez grand

$$A \frac{x}{\log(x)} < \pi(x) < B \frac{x}{\log(x)}.$$

- Ce n'est qu'en 1896 que Hadamard et de la Vallée-Poussin démontrèrent indépendamment le théorème sur des nombres premiers, i.e., le fait que  $\pi(x) \sim x/\log(x)$  lorsque  $x \mapsto +\infty$ .
- Pour cela, ils se sont fortement appuyés sur le célèbre article de Riemann en 1859 qui montrait que  $\zeta$  admettait un prolongement méromorphe pour  $s \in \mathbb{C}$  et aussi qui mettait en évidence de façon largement conjecturale le lien entre la distribution des zéros de  $\zeta$  et celle des nombres premiers.
- La relation entre la fonction  $\zeta$  et la **fonction entière**  $\xi$  qui vérifie l'équation fonctionnelle  $\xi(s) \equiv \xi(1-s)$  :

$$\xi(0) \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{s}{\rho_n}\right) = \xi(s) = \Pi(s/2)(s-1)\pi^{-s/2}\zeta(s).$$

où  $\Pi(s) = \Gamma(s+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^s dx$  ( $\Pi(n) = n!$  pour  $n$  entier).  
 $\xi$  code les zéros non triviaux  $\rho_n$  de  $\zeta$ . On pense (hypothèse de Riemann) que  $\Re(\rho_n) = 1/2$ , pour tout  $n$ .

- Fonction  $\Gamma$  :  $\Gamma(s) = \Gamma(s+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^s dx$ 
  - Pour  $\Re(s) > -1$  l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^s dx$  est absolument convergente et définit la fonction  $\Gamma(s)$  ( $\Gamma(s) = \Gamma(s-1)$ ) sur le demi-plan complexe  $\Re(s) > -1$  avec pour  $n \in \mathbb{N}$  :  $\Gamma(n) = n!$ .
  - Une simple intégration par partie montre que  $\Gamma(s+1) = (s+1)\Gamma(s)$  pour  $\Re(s) > -1$ . On prolonge alors sans ambiguïté  $\Gamma(s)$  pour tout  $s \in \mathbb{C}$  sauf en  $s = -n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$  où  $\Gamma$  admet des pôles de multiplicité 1 :  $\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+n)}{(s+1)\dots(s+n)}$ .

Ainsi la fonction  $\Gamma(s)$  est définie sur  $\mathbb{C}$  sauf pour les entiers strictement négatifs où elle admet des pôles simples.

- Fonction  $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s}$  pour  $\Re(s) > 1$ . Dans son fameux article de 1859, Riemann propose un **prolongement similaire** en partant de  $\sum_{n > 1} n^{-s}$  au lieu de  $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^s dx$ , mais cette fois le prolongement est possible pour  $s \in \mathbb{C}$  avec  $s \neq 1$  où on a un pôle simple.

**De tels prolongements ne sont pas toujours possibles** : la fonction  $\log(z) = \log(|z|) + i \arg(z)$  bien définie pour  $\Re(z) > 0$  avec  $\arg(z) \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  n'admet pas de prolongement sur tout le plan complexe privé de l'origine.

- La série  $\sum_{n \geq 1} n^{-s}$  est **absolument convergente** pour tout complexe  $s$  dès que  $\Re(s) > 1$ . Elle définit la fonction  $\zeta(s)$  sur le demi-plan  $\Re(s) > 1$ .
- Avec  $\int_0^{+\infty} e^{-nx} x^{s-1} dx = \frac{\Gamma(s-1)}{n^s}$  on montre que, pour  $\Re(s) > 1$  :

$$\Gamma(s-1) \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx$$

- Avec la **détermination standard du log** sur  $\mathbb{C}/\mathbb{R}^-$  :  
 $\log z = \log r + i\theta$  pour  $z = re^{i\theta}$  avec  $r > 0$  et  $\theta \in ]-\pi, \pi[$  on a, via le **théorème de Cauchy**,

$$\int_{\gamma} \frac{(-z)^s}{e^z - 1} \frac{dz}{z} = 2i \sin(\pi s) \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx$$

où  $\gamma$  est le **contour** suivant parcouru dans le sens direct :  $z = t + i$  pour  $t$  réel de  $+\infty$  à  $0$  ; ensuite  $z = e^{it}$  pour  $t$  réel allant de  $\pi/2$  à  $3\pi/2$  ; enfin  $z = t - i$  pour  $t$  réel de  $0$  à  $+\infty$ .

Pour  $\Re(s) > 1$  :

$$\int_{\gamma} \frac{(-z)^s}{e^z - 1} \frac{dz}{z} = 2i \sin(\pi s) \Pi(s - 1) \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right)$$

Avec l'identité  $\sin(\pi s) = \frac{\pi s}{\Pi(s)\Pi(-s)}$  on a

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{\Pi(-s)}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{(-z)^s}{e^z - 1} \frac{dz}{z}.$$

Compte tenu de la forme du contour  $\gamma$  (entoure  $\mathbb{R}^+$ ), la fonction  $s \mapsto \int_{\gamma} \frac{(-z)^s}{e^z - 1} \frac{dz}{z}$  est définie pour tout  $s \in \mathbb{C}$  : c'est une fonction entière de  $s$ . On peut ainsi utiliser la formule précédente pour prolonger  $\zeta(s)$  lorsque  $\Re(s) \leq 1$  et  $s \neq 1$ . Autour de  $s = 1$ ,  $\zeta(s)$  explose comme  $\Pi$  en  $-1$  (pôle simple).



- **Théorème des nombres premiers** : On note  $\pi(x)$ , le nombre des entiers premiers et plus petits que  $x > 0$ . Alors, lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ ,  $\pi(x) \sim x / \log(x)$ . Ceci est équivalent à dire que  $p_n \sim n \log(n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .
- Nous allons donner une "preuve" heuristique et suggestive en utilisant la fonction  $\zeta(s)$  comme produit eulérien

$$\sum_{n \geq 1} 1/n^s = \zeta(s) = \prod_{n \geq 1} (1 - 1/p_n^s)^{-1}$$

pour  $s > 1$  réel tendant vers 1.

- L'idée essentielle est de prendre le log :

$$\log(\zeta(s)) = - \sum_{n \geq 1} \log(1 - 1/p_n^s)$$

- comme  $\forall y \in [0, 1/2], \quad y \leq -\log(1 - y) \leq y + y^2$  on a

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n^s} \leq \log(\zeta(s)) \leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n^s} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{p_n^{2s}}.$$

- Comme  $\lim_{s \rightarrow 1^+} \zeta(s) = +\infty$  la série,  $\sum 1/p_n$  est aussi divergente. Donc il n'existe pas de constantes  $A$  et  $\epsilon > 0$  telles que  $p_n \geq An^{1+\epsilon}$  pour tout  $n$ .

- Comme chacun des termes du produit est plus grand que 1, on a  $\zeta(s) \geq \prod_{p_n \leq N} (1 - 1/p_n^s)^{-1}$ . Avec  $(1 - 1/p_n^s)^{-1} = \sum_{k \geq 0} 1/p_n^{ks}$  on voit que

$$\prod_{p_n \leq N} (1 - 1/p_n^s)^{-1} = \sum_{n \in E_N} 1/n^s$$

où  $E_N$  est l'ensemble des entiers dont les diviseurs premiers valent au plus  $N$ . Il est clair que  $E_N$  contient au moins  $\{1, \dots, N\}$ .

- Cela suggère (mais ne prouve pas) que  $\sum_{1 \leq n \leq N} 1/n$  et  $\prod_{p_n \leq N} (1 - 1/p_n)^{-1}$  sont **similaires pour  $N$  grand**.
- Comme

$$\log \left( \sum_{1 \leq n \leq N} 1/n \right) = \log(\log(N)) + O(1)$$

et

$$\log \left( \prod_{p_n \leq N} (1 - 1/p_n)^{-1} \right) = \sum_{p_n \leq N} 1/p_n + O(1)$$

cela nous suggère que  $\sum_{p_n \leq N} 1/p_n \sim \log(\log(N))$ .

- Si  $n$  est premier alors  $\pi(n) - \pi(n-1) = 1$ , sinon  $\pi(n) - \pi(n-1) = 0$ . Donc

$$\sum_{p_n \leq N} 1/p_n = \sum_{1 \leq n \leq N} (\pi(n+1) - \pi(n))/(n+1)$$

- En réorganisant cette somme et comme  $\pi(N+1) \leq N$ , on voit que

$$\sum_{p_n \leq N} 1/p_n = \sum_{1 \leq n \leq N} \pi(n)/(n(n+1)) + O(1)$$

où  $N$  est grand pour définir les  $O(1)$ . Mais aussi on a

$$\log(\log(N)) = \sum_{1 \leq n \leq N-1} 1/(n \log(n)) + O(1).$$

- Ainsi il est tentant de conjecturer que

$$\pi(n)/(n(n+1)) \sim 1/(n \log(n))$$

soit  $\pi(n) \sim n/\log(n)$ .

- **Progression arithmétique** : Soient  $a$  et  $m$  des entiers strictement positifs et premiers entre eux. Il existe une infinité de nombres premiers de la forme  $a + km$  avec  $k$  entier positif.
- En fait ce théorème admet une formulation nettement plus précise : les nombres premiers se distribuent uniformément parmi les  $\varphi(m)$  classes associées aux nombres  $a$  plus petits que  $m$  et premiers avec lui.
- Si on note  $\pi_a(x)$  le nombre d'entiers premiers plus petits que  $x$  et de la forme  $a + km$ , alors on a l'asymptotique suivante pour  $x \mapsto +\infty$  :

$$\pi_a(x) \sim \frac{1}{\varphi(m)} \pi(x) = \frac{x}{\varphi(m) \log(x)}.$$

La philosophie générale sous-jacente à de nombreuses conjectures sur les nombres premiers : **tout ce qui n'est pas trivialement interdit est en fait réalisé** :

- **nombres premiers jumeaux** : il existe une infinité de nombres premiers  $p$  tels que  $p + 2$  soit aussi premier.
- **nombres premiers cousins** : il existe une infinité de nombres premiers  $p$  tels que  $p + 4$  et  $p + 6$  soient aussi premiers.
- **C. Goldbach**, un contemporain d'Euler, avait émis en 1742 la conjecture que tout entier pair est somme de deux nombres premiers et tout entier impair somme de trois nombres premiers.

- Preuve du théorème de la progression arithmétique pour  $m = 4$ .  
Deux valeurs possibles pour  $a$  : 1 ou 3.
- Soient les deux fonctions  $\chi_0$  et  $\chi_1$  de  $\mathbb{N}$  vers  $\{-1, 0, 1\}$  définies par

$$\chi_0(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \text{ ou } 3 \pmod{4} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \chi_1(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \pmod{4} \\ -1 & \text{si } n = 3 \pmod{4} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\chi_0$  et  $\chi_1$  sont périodiques (période 4) et **multiplicatives**, i.e.,  
 $\chi_0(nm) = \chi_0(n)\chi_0(m)$  et  $\chi_1(nm) = \chi_1(n)\chi_1(m)$  pour tout couple  
d'entiers  $(n, m)$ .

- Cette propriété est essentielle pour associer à chacune de ces fonctions multiplicatives une série de Dirichlet qui s'exprime sous la forme d'un **produit eulérien avec les fonctions  $\zeta$  généralisées**.

- On pose  $\zeta_0(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{\chi_0(n)}{n^s}$ ,  $\zeta_1(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{\chi_1(n)}{n^s}$ .  
Considérons maintenant les produits suivants :

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{\chi_0(p)}{p^s}} \quad \text{et} \quad \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s}}.$$

- Comme  $\chi_0$  et  $\chi_1$  sont **multiplicatives**, on voit en développant ces produits que

$$\zeta_0(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{\chi_0(p)}{p^s}}, \quad \zeta_1(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s}}.$$

- Avec  $-\log(1 - y) = y + w(y)y^2$  pour  $|y| \leq 1/2$  avec  $w$  régulière :

$$\log(\zeta_0) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\chi_0(p)}{p^s} + h_0(s), \quad \log(\zeta_1) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\chi_1(p)}{p^s} + h_1(s)$$

où  $h_0$  et  $h_1$  sont des fonctions régulières de  $s$  et définies en  $s = 1$ .



- On a

$$\zeta_0(s) = \sum_{k \geq 0} \left( \frac{1}{(4k+1)^s} + \frac{1}{(4k+3)^s} \right).$$

Ainsi, lorsque  $s$  est réel et tend vers 1 par valeur supérieure,  $\zeta_0(s)$  tend vers  $+\infty$ .

- Par contre  $\zeta_1$  reste borné autour de  $s = 1$  car

$$\zeta_1(s) = \sum_{k \geq 0} \left( \frac{1}{(4k+1)^s} - \frac{1}{(4k+3)^s} \right)$$

où  $\frac{1}{(4k+1)^s} - \frac{1}{(4k+3)^s}$  est équivalent lorsque  $k$  tend vers l'infini à  $\frac{s}{2^{2s+1}k^{s+1}}$ . De plus chaque terme est strictement positif, donc

$$\zeta_1(1) = \sum_{k \geq 0} \frac{2}{(4k+1)(4k+3)} > 0.$$

- Notons maintenant

$$P_1(s) = \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \equiv 1 \pmod{4}}} \frac{1}{p^s}, \quad P_3(s) = \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \equiv 3 \pmod{4}}} \frac{1}{p^s}.$$

- Ainsi

$$\log(\zeta_0(s)) = P_1(s) + P_3(s) + h_0(s)$$

$$\log(\zeta_1(s)) = P_1(s) - P_3(s) + h_1(s)$$

- Comme,  $\zeta_1(s)$ ,  $h_0$  et  $h_1$  sont régulières en  $s = 1$ ,  $\zeta_1(1) > 0$  et  $\lim_{s \rightarrow 1^+} \zeta_0(s) = +\infty$  on en déduit nécessairement que  $\lim_{s \rightarrow 1^+} P_1(s) = +\infty$  et  $\lim_{s \rightarrow 1^+} P_3(s) = +\infty$ .

- La méthode que nous avons utilisée est en fait général. Donnons en une brève esquisse.
- Pour un entier  $m > 2$  on a en fait  $\varphi(m)$  choix possibles pour  $a$ , soit  $a \in \mathbb{Z}_m^*$ . Sur le groupe multiplicatif  $\mathbb{Z}_m^*$  on définit l'analogie des fonctions  $\chi_0$  et  $\chi_1$ , en fait  $\varphi(m)$  fonctions  $\chi_0, \dots, \chi_{\varphi(m)-1}$  **fonctions multiplicatives** distinctes mais à valeurs dans le cercle unité du plan complexe : ce sont les **caractères de Dirichlet**. On note toujours le caractère trivial égal à 1 sur  $\mathbb{Z}_m^*$  par  $\chi_0$ . Les autres caractères  $\chi_k, k = 1, \dots, \varphi(m) - 1$  se distinguent de  $\chi_0$  par le fait que

$$\sum_{a \in \mathbb{Z}_m^*} \chi_k(a) = 0.$$

- Pour  $k \neq 0$ , les séries de Dirichlet

$$\zeta_k(t) = \sum_{n \geq 1} \frac{\chi_k(n)}{n^s}$$

sont très différentes autour de  $s = 1$  de la série  $\zeta_0$  associée à  $\chi_0$ .

- Contrairement à  $\zeta_0$  qui diverge en  $s = 1$ , ces séries  $\zeta_k$  sont **des “séries alternées”** (utiliser le critère d’Abel) et ainsi convergent en  $s = 1$ .
- Maintenant, **chaque  $\zeta_j$  s’exprime comme un produit eulérien.**

$$\log(\zeta_j) = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\chi_j(p)}{p^s} + h_j(s),$$

où  $h_j$  est une fonction régulière de  $s$  définie autour de  $s = 1$ .

- On pose, pour  $a \in \mathbb{Z}_m^*$ ,

$$P_a(s) = \sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p = a \pmod{m}}} \frac{1}{p^s}.$$

Alors on a

$$\log(\zeta_j(s)) = h_j(s) + \sum_{a \in \mathbb{Z}_n^*} \chi_j(a) P_a(s).$$

- Des calculs simples sur les caractères montrent que la matrice  $\varphi(m) \times \varphi(m)$  d'éléments  $(\chi_j(a))$  pour  $0 \leq j \leq \varphi(m) - 1$  et  $a \in \mathbb{Z}_m^*$  est inversible, d'inverse sa conjuguée (hermitienne) divisée par  $\varphi(m)$ .
- Les  $P_a(s)$  s'expriment comme des combinaisons linéaires à coefficients non nuls des  $\log(\zeta_j)$  et des  $h_j$ .

- La **partie dure de la preuve** est de montrer qu'aucune des valeurs prises en  $s = 1$  par les  $\zeta_k$  ( $k \in \{1, \dots, \varphi(m) - 1\}$ ) n'est nulle :  $\zeta_k(1) \neq 0$ .
- Comme  $\zeta_0(s)$  est la seule à diverger en  $s = 1$ , on en déduit alors que chacun des  $P_a(s)$  diverge en  $s = 1$ . Et donc  $\{p \in \mathbb{P} \mid p = a \pmod{m}\}$  est infini pour tout  $a \in \mathbb{Z}_m^*$ .
- On comprend un peu mieux pourquoi la localisation des zéros des fonctions de Dirichlet  $\zeta_j$  est si importante. La **conjecture de Riemann généralisée** affirme que les zéros (à partie réelle positive) des  $\zeta_j$  se situent tous sur la droite parallèle à l'axe imaginaire  $\Re(s) = 1/2$ .