MINES ParisTech
Centre Automatique et Systèmes

35 Rue Saint Honoré, 77305 Fontainebleau Cedex, France

Théorie de

la commande adaptative des systèmes linéaires à temps discret

illustrée par un exemple

Laurent PRALY

1ère version : 14 juin 1991 Révision : 25 octobre 2010

L'objet de ce mémoire est de faire un point sur la théorie de la commande adaptative des systèmes linéaires. Celle-ci permet aujourd'hui de :

- mieux préciser les conditions dans lesquelles cette méthode peut être effectivement utilisée,
- donner des indications sur la façon de choisir les différentes composantes d'une telle commande – filtres, algorithme d'estimation, algorithme de synthèse, ...–.

On trouvera dans la bibilographie une liste des ouvrages publiés sur ce sujet [2, 4, 5, 11, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 25, 28, 29, 30, 44]

Dans un but de clarté et de simplicité, nous ne présenterons ici les résultats que pour analyser un exemple très simple. Pour faire la distinction entre résultat particulier à cet exemple et résultat établi dans un contexte plus général, nous n'énoncerons sous forme de Proposition que ces derniers. De plus, bien que nous n'étudierons que les systèmes à temps discret, des résultats equivalents existent pour les systèmes à temps continu [19, 43, 2].

Nous avons, autant que possible, réintroduit les notions importantes. Celles-ci sont référencées dans un index à la fin de ce mémoire.

Table des Matières

Chapitre 1

Cas idéal

1.1 Un contrôleur adaptatif

Dans ce rapport nous adoptons pour *modèle de synthèse*, i.e. pour modèle servant à la conception de la loi de commande, le système linéaire du premier ordre suivant :

$$y(k) \;=\; \theta\, y(k-1) \;+\; u(k-1)\ . \tag{1.1}$$

y est la sortie, u est la commande en boucle ouverte et θ est le pôle en boucle ouverte. Pour simplifier les notations, il pourra être utile de reécrire (1.1) sous la forme :

$$(1-\theta q^{-1})\, y(k) \;=\; q^{-1}\, u(k)\ , \tag{1.2}$$

avec q^{-1} dénotant l'*opérateur de retard* :

$$q^{-1}\, y(k) \;=\; y(k-1)\ . \tag{1.3}$$

Dans la suite, nous appelerons *cas idéal* le cas où le système à commander peut être effectivement représenté par ce modèle de synthèse.

Pour un tel modèle, si la valeur de θ est connue, on utilise le contrôleur suivant :

$$u(k) \;=\; -f(\theta)\, y(k) \;+\; u_{\mathrm{bf}}(k)\ , \tag{1.4}$$

où u_{bf} est la commande en boucle fermée et f est une fonction localement Lipschitzienne telle que le système en boucle fermée soit stable, i.e. :

$$|f(\theta)-\theta| \;\le\; 1-\varepsilon \;<\; 1\ . \tag{1.5}$$

Dans la suite ε sera appelé *marge de stabilité* et la fonction f *synthèse* de commande. Des choix classiques pour cette synthèse sont :

- **Placement de pôle :**
$$f(\theta) \;=\; \theta - a_m\ , \tag{1.6}$$
où a_m, $|a_m| < 1$, est le pôle désiré pour la boucle fermée,

- **Commande quadratique :**
$$f(\theta) \;=\; \frac{\theta\, p}{p+r^2}\ , \tag{1.7}$$

avec :

$$p \;=\; \frac{1 - r^2(1-\theta^2) + \sqrt{[1-r^2(1-\theta^2)]^2 + 4r^2}}{2} \; . \tag{1.8}$$

Dans ce cas, on minimise le critère :

$$J \;=\; \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ (y(i+1) - y_d(i+1))^2 \;+\; r^2 \left(u(i) - y_d(i+1) + \theta y_d(i)\right)^2 \right\} \;, \tag{1.9}$$

la commande de la boucle fermée $\{u_{\mathrm{bf}}(k)\}$ étant liée à la sortie désirée $\{y_d(k)\}$ par :

$$y_d(k+1) \;=\; \frac{\theta\, r^2}{p + r^2}\, y_d(k) \;+\; u_{\mathrm{bf}}(k) \; . \tag{1.10}$$

Notons que dans ces deux cas la fonction de synthèse f est croissante ce que l'on supposera dans la suite et qui implique l'existence de la fonction inverse f^{-1}.

Remarque 1 : Un aspect que nous ne pourrons pas étudier avec notre exemple est le fait que (1.5) puisse ne pas être réalisable pour certaines valeurs de θ. C'est le cas si pour ces valeurs, le modèle de synthèse correspondant n'est pas stabilisable – ce qui ne peut pas arriver pour le modèle (1.1) –. De nombreuses études ont cependant été dédiées à ce problème (voir [9, 12, 13, 23, 26, 27, 31]). ∎

Dans le cas où le pôle en boucle ouverte θ est inconnu, le contrôleur (1.4) ne peut être implémenté. Pour contourner cette difficulté, on peut chercher à estimer ce paramètre θ du modèle en boucle ouverte, dit *paramètre indirect* ou *paramètre explicite*. Une autre solution consiste à estimer directement la valeur $f(\theta)$ dont on a besoin pour le contrôleur, on parle dans ce cas de *paramètre direct* ou *paramètre implicite*. Ici, nous nous contenterons de rapporter les résultats connus pour la paramétrisation explicite, la plus générale. Pour le modèle très simple (1.1), les résultats sur la paramétrisation directe sont les mêmes.

Pour obtenir une estimation du paramètre explicite θ, nous remarquons que le modèle de synthèse garantie l'existence d'une valeur de θ telle que, dans le cas idéal, l'équation (1.1) est satisfaite par tout couple de suites d'entrée-sortie $(\{u(k)\}, \{y(k)\})$ du système à commander. Aussi, puisqu'à l'instant k, les valeurs $y(i)$, $y(i-1)$ et $u(i-1)$, $1 \leq i \leq k$, sont connues, la valeur θ est solution du système linéaire suivant :

$$y(i) \;-\; u(i-1) \;=\; y(i-1)\,\theta \qquad 1\; \leq i\; \leq k \;, \tag{1.11}$$

il est possible d'obtenir en ligne une estimation de cette valeur en utilisant une des méthodes d'approximations successives connues en Analyse Numérique pour la résolution de systèmes linéaires. Par exemple, l'algorithme de Kaczmarz, appelé aussi algorithme de projection régularisé, s'écrit dans ce cas (voir [16, Section 4.2] ou [13, section 3.3]) :

$$\widehat{\theta}(k) \;=\; \widehat{\theta}(k-1) \;+\; \frac{y(k-1)\,(\, y(k) - u(k) - y(k-1)\widehat{\theta}(k-1)\,)}{r + y(k-1)^2} \;, \tag{1.12}$$

où $\widehat{\theta}(k)$ est une estimation à l'instant k de la valeur de θ et r est une constante positive à choisir. L' *erreur d'observation a priori*,

$$e(k) \;=\; y(k) \;-\; u(k) \;-\; y(k-1)\,\widehat{\theta}(k-1) \tag{1.13}$$

qui commande la mise à jour du paramètre estimé coïncide dans ce cas avec l' *erreur d'équation* donnée par l'équation du modèle de synthèse.

De nombreuses autres approches pour obtenir récursivement une estimation de la valeur de θ ont été proposées – minimisation de critère de performance, décroissance de fonction de Lyapunov, estimation –. Les livres [13] et [20] (voir aussi [17]), par exemple, donnent une bonne synthèse de ces méthodes. D'une façon générale, on obtient l'algorithme suivant [33] :

$$\widehat{\theta}(k) \;=\; \widehat{\theta}(k-1) \;+\; \frac{\alpha(k)}{y(k-1)} \left(y(k) - u(k-1) - y(k-1)\widehat{\theta}(k-1)\right) \tag{1.14}$$

où $\alpha(k)$ doit être choisi avec $\beta(k)$ et $P(k)$ tels que :

$$\begin{gathered} P_s \;\geq\; P(k) \;\geq\; (1-\beta(k)P(k-1)y(k-1)^2)\; P(k-1) \\ \alpha(k) \;\geq\; 0 \quad , \qquad \beta(k) \;\geq\; 0 \quad , \qquad 1-\beta(k)\alpha(k) \;>\; 0 \;, \\ \frac{2-\alpha(k)-\beta(k)}{1-\beta(k)\alpha(k)} \;\geq\; \varepsilon \;>\; 0 \;, \\ \frac{(1-\alpha(k))^2}{\alpha(k)}\, P(k-1)y(k-1)^2 \;\leq\; C \;, \end{gathered} \tag{1.15}$$

où P_s et $P(0)$ sont des réels strictement positifs. En général, on prend, avec $r(k) > 0$,

$$\alpha(k) \;=\; \frac{P(k-1)y(k-1)^2}{r(k) + P(k-1)y(k-1)^2} \;. \tag{1.16}$$

Dans la suite α sera appelé *vitesse d'adaptation*. En effet, dans le cas idéal, (1.14) donne :

$$\widehat{\theta}(k) - \theta \;=\; (1-\alpha(k))\,(\widehat{\theta}(k-1) - \theta) \;. \tag{1.17}$$

Ainsi, $\alpha(k)$, compris entre 0 et 2 d'après (1.15), donne une décroissance de $\|\widehat{\theta}(k)-\theta\|$ d'autant plus rapide qu'il est plus près de 1.

On a [33, chapitre 3] :

Proposition 1 *Dans le cas idéal, avec (1.15) et (1.16), l'algorithme (1.14) nous donne :*

1. *la suite* $\{\widehat{\theta}(k)\}$ *est bornée,*
2. *la suite* $\{\widehat{\theta}(k+1) - \widehat{\theta}(k)\}$ *est de carrés sommables,*
3. *la suite* $\left\{r(k)^{-\frac{1}{2}}\left[y(k+1) - u(k) - y(k)\widehat{\theta}(k+1)\right]\right\}$ *est de carrés sommables.*

En particulier, si la suite $\{r(k)\}$ vérifie :

$$r(k) \;\leq\; r\,\lambda^k \quad , \qquad 0 \;<\; \lambda \;<\; 1 \;, \tag{1.18}$$

comme c'est le cas si on utilise l'algorithme des moindres carrés avec facteur d'oubli λ, l'erreur d'observation a posteriori $y(k+1) - u(k) - y(k)\widehat{\theta}(k+1)$ converge vers 0 plus vite que λ^k.

Maintenant, avec l'estimation $\widehat{\theta}$ de θ, on peut implémenter le contrôleur (1.4) en :

$$u(k) \;=\; -f(\widehat{\theta}(k))\, y(k) \;+\; u_{\mathrm{bf}}(k)\ . \tag{1.19}$$

Ce faisant, on applique le *principe de séparation* bien qu'il ne soit pas démontré que ce principe est vrai dans ce cas – non linéaire –. Le contrôleur obtenu de cette façon est un bouclage non linéaire dynamique d'état $\widehat{\theta}$:

$$\left.\begin{array}{rcl} \widehat{\theta}(k) & = & \widehat{\theta}(k-1) \;+\; \dfrac{\alpha(k)}{y(k-1)}\Big(y(k)-u(k-1)-y(k-1)\widehat{\theta}(k-1)\Big) \\ u(k) & = & -f(\widehat{\theta}(k))\, y(k) \;+\; u_{\mathrm{bf}}(k) \end{array}\right\} \tag{1.20}$$

1.2 Propriétés des solutions de la boucle fermée dans le cas idéal

1.2.1 Solutions bornées

On a [13, chapitre 6] :

Proposition 2 *Dans le cas idéal, avec (1.5), le système bouclé (1.1)-(1.20) vérifie :*

1. *les suites* $\{u(k)\}$, $\{y(k)\}$ *et* $\{\widehat{\theta}(k)\}$ *sont bornées,*
2. *la suite* $\Big\{y(k+1)-(\widehat{\theta}(k)-f(\widehat{\theta}(k))y(k)-u_{\mathrm{bf}}(k)\Big\}$ *est de carrés sommables.*

La Proposition 2 nous permet de conclure que, dans le cas idéal, la commande adaptative donne des résultats très satisfaisants. En effet, dans cet énoncé, nous voyons qu'il n'y a aucune hypothèse sur la valeur du pôle θ du système en boucle ouverte et malgré cela on a la bornitude des solutions. Pour comprendre l'importance de ce résultat, voyons ce qu'on obtiendrait si, s'intéressant uniquement à la stabilisation d'un point d'équilibre, i.e. $u_{\mathrm{bf}}(k) \equiv 0$, on avait utilisé, au lieu du contrôleur dynamique non linéaire (1.20), un contrôleur statique non linéaire admettant la linéarisation suivante autour du point d'équilibre :

$$u(k) \;=\; -c\, y(k)\ . \tag{1.21}$$

Dans ce cas, ce point d'équilibre est exponentiellement stable si et seulement si :

$$|\theta - c| \;\leq\; 1\ . \tag{1.22}$$

Ceci montre que le pôle en boucle ouverte doit être connu à au plus ± 1 près. C'est donc bien grâce à son aspect bouclage dynamique que la commande adaptative est intéressante. L'aspect non linéaire aussi est important. En effet, si, au lieu du contrôleur du premier ordre non linéaire (1.20), on avait utilisé le contrôleur du premier ordre linéaire suivant :

$$\left.\begin{array}{rcl} \widehat{\theta}(k+1) & = & a\,\widehat{\theta}(k) \;+\; b\, y(k) \\ u(k) & = & d\,\widehat{\theta}(k) \;-\; c\, y(k) \end{array}\right\}, \tag{1.23}$$

on aurait obtenu :

$$\lambda^2 \;-\; (\theta - c + a)\,\lambda \;+\; a\,(\theta - c) - b\,d$$

pour polynôme caractéristique de la boucle fermée. Dans ce cas, si P est le produit des pôles et S est leur somme, on a :

$$P \;=\; a\,S \;-\; a^2 \;-\; b\,d \quad , \qquad S \;=\; \theta \;-\; c \;+\; a \tag{1.24}$$

et, lorsque la commande en boucle fermée u_{bf} est nulle, les solutions sont bornées si :

$$\begin{aligned} 1 \;-\; S \;+\; P \;&\geq\; 0 \\ 1 \;+\; S \;+\; P \;&\geq\; 0 \\ S \neq 2 \quad , \quad P \;&\leq\; 1\;. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Vues les relations (1.24), le plus grand intervalle d'incertitude sur θ tel que les inégalités (1.25) soient vérifiées est obtenu en prenant :

$$P \;=\; 1 \qquad \Rightarrow \qquad a \;=\; 0\;, \quad b \;=\; -d \;=\; 1\;. \tag{1.26}$$

On obtient ainsi le contrôleur linéaire du premier ordre suivant :

$$u(k) \;=\; -c\,y(k) \;-\; y(k-1)\;. \tag{1.27}$$

Lorsque la commande en boucle fermée u_{bf} est nulle, il donnera des solutions bornées en boucle fermée avec le système (1.1) si :

$$|\theta - c| \;<\; 2\;. \tag{1.28}$$

Il est intéressant de noter que, dans tous les cas où cette inégalité (1.28) est vérifiée, ce contrôleur (1.27) qui maximise l'intervalle d'incertitude admissible – au sens de "solutions bornées" – donne des pôles de la boucle fermée qui sont simples mais de module égal à 1. On n'a donc pas de stabilité asymptotique et donc pas exponentielle. De plus, il y a possibilité de résonnance lorsque la commande en boucle fermée u_{bf} est non nulle. Par opposition le contrôleur adaptatif (1.20) donne la bornitude des solutions pour toute valeur de θ et toute suite bornée $\{u_{\mathrm{bf}}(k)\}$ de commandes en boucle fermée. Malheureusement, tout comme le contrôleur linéaire du premier ordre optimal (1.27) le contrôleur adaptatif (1.20) ne garantie pas en général une stabilité exponentielle. Aussi la convergence vers le comportement désiré n'est pas exponentielle puisque, d'après le point 2 de la Proposition 2, cette convergence n'est que celle d'une suite de carrés sommables. Il est donc important de pousser plus loin l'analyse.

1.2.2 Stabilité des solutions bornées

Pour étudier la stabilité des solutions, considérons le cas particulier du système bouclé obtenu en prenant l'algorithme (1.12). Ce système bouclé est totalement décrit par le système dynamique suivant :

$$\left.\begin{aligned} y(k+1) \;&=\; \Big(\theta - f(\widetilde{\theta}(k) + \theta)\Big)\,y(k) \;+\; u_{\mathrm{bf}}(k) \\ \widetilde{\theta}(k+1) \;&=\; \frac{r}{r + y(k)^2}\,\widetilde{\theta}(k) \quad , \qquad r \neq 0\;, \end{aligned}\right\} \tag{1.29}$$

où nous avons utilisé la notation :

$$\widetilde{\theta} \;=\; \widehat{\theta} \;-\; \theta \;. \tag{1.30}$$

Nous allons nous intéresser à la façon dont les solutions convergent – ou ne convergent pas – vers un *régime permanent*. Pour ce faire, nous devons préciser ce que l'on entend par régime permanent ou plus exactement, nous devons définir les solutions particulières qui caractérisent ce régime.

Definition 1 *On appelle suite presque périodique, une suite $\{v(k)\}$ telle que :*

$$v(k) \;=\; \sum_{i\in\mathbb{N}} v_i z_i^k \;, \tag{1.31}$$

où les z_i sont des nombres complexes de module égale à 1 et les v_i vérifient :

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} |v_i|^2 \;<\; +\infty \;. \tag{1.32}$$

On appelle suite stationnaire, une suite $\{v(k)\}$ telle que les suites associées $\left\{\frac{1}{k}\sum_{i=k_0+1}^{k_0+k} v(i)\right\}$ et $\left\{\frac{1}{k}\sum_{i=k_0+1}^{k_0+k} v(i)v(i+j)\right\}$ convergent uniformément en k_0 vers des valeurs indépendantes de k_0. Ainsi, une suite presque périodique peut être vue comme une suite stationnaire à laquelle on a soustrait les suites de carrés sommables.

Si un régime presque périodique existe et est atteint, i.e. s'il existe une solution presque périodique, alors $\{u_{\mathrm{bf}}(k)\}$ est elle même une suite presque périodique, la suite $\{\widehat{\theta}(k)\}$ est constante et soit $u_{\mathrm{bf}}(k) \equiv 0$, soit $\widetilde{\theta}(k) \equiv 0$. En effet, puisque la suite $\{|\widetilde{\theta}(k)|\}$ est strictement décroissante pour tout instant k tel que $y(k) \neq 0$, une solution ne peut être presque périodique que si, pour tout k,

$$\widetilde{\theta}(k+1) \;=\; \widetilde{\theta}(k) \;=\; \widetilde{\theta}(0) \;. \tag{1.33}$$

Alors, puisque la suite $\{y(k)\}$ est presque périodique et :

$$u_{\mathrm{bf}}(k) \;=\; y(k+1) \;-\; \Big(\theta - f(\widetilde{\theta}(0)+\theta)\Big)\, y(k) \;, \tag{1.34}$$

la suite $\{u_{\mathrm{bf}}(k)\}$ est presque périodique. De plus, d'après (1.29), (1.33) implique :

$$\widetilde{\theta}(0)\, y(k)^2 \;=\; 0 \quad \forall\, k \;. \tag{1.35}$$

Donc, si $\widetilde{\theta}(0) \neq 0$, la suite $\{y(k)\}$ est la suite nulle et il en est de même de la suite $\{u_{\mathrm{bf}}(k)\}$. Notons que ce résultat est faux si, au lieu de prendre r constant, on avait une suite $\{r(k)\}$ pouvant tendre vers 0 comme par exemple :

$$r(k) \;=\; \frac{\lambda}{1-\lambda}\, y(k)^2 \quad , \qquad 0<\lambda<1 \;. \tag{1.36}$$

On a aussi (voir [3, 6, 13, 2, 33]) :

Proposition 3 *Si la suite $\{u_{\mathrm{bf}}(k)\}$ est stationnaire et vérifie la condition suivante, dite condition d'excitation persistente,*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=k_0+1}^{k_0+k} u_{\mathrm{bf}}(i)^2 \ > \ 0 \ , \tag{1.37}$$

alors la suite $\{\widehat{\theta}(k) - \theta\}$ converge exponentiellement vers 0.

De plus, étant donnée la suite $\{u_{\mathrm{bf}}(k)\}$, si pour tout $0 < \lambda < 1$, il existe un algorithme d'estimation de θ telle que la suite $\left\{\lambda^{-k}\left[\widehat{\theta}(k) - \theta\right]\right\}$ soit bornée alors la condition d'excitation persistente est vérifiée.

Par exemple si u_{bf} est la suite presque périodique suivante :

$$u_{\mathrm{bf}}(k) \ = \ u_1 \cos(k\omega_1) + v_1 \sin(k\omega_1) + u_2 \cos(k\omega_2) + v_2 \sin(k\omega_2) \tag{1.38}$$

la condition d'excitation persistente est satisfaite si :

$$u_1^2 + v_1^2 + u_2^2 + v_2^2 \ \neq \ 0 \ . \tag{1.39}$$

Il est important de noter que la condition d'excitation persistente (1.37) n'est pas une condition nécessaire de convergence de l'estimation $\widehat{\theta}$ vers θ (voir [33]). Elle n'est nécessaire que pour pouvoir imposer une convergence exponentielle avec une raison arbitraire.

Étudions maintenant la stabilité d'une solution presque périodique de (1.29). D'après l'étude ci-dessus, une telle solution est de la forme $\{(y_0(k), \widetilde{\theta}_0)\}$, avec :

$$y_0(k+1) \ = \ \left(\theta - f(\widetilde{\theta}_0 + \theta)\right) y_0(k) \ + \ u_{\mathrm{bf}}(k) \ , \tag{1.40}$$

la suite $\{u_{\mathrm{bf}}(k)\}$ étant presque périodique. Aussi, la presque périodicité implique que seuls deux cas sont possibles :
Cas 1 : la suite $\{u_{\mathrm{bf}}(k)\}$ vérifie la condition d'excitation persistente (1.37) et $\widetilde{\theta}_0 = 0$,
Cas 2 : les suites $\{y_0(k)\}$ et $\{u_{\mathrm{bf}}(k)\}$ sont nulles et alors $\widetilde{\theta}_0$ est quelconque.
Dans le premier cas, on a [3, 6, 13, 2] :

Proposition 4 *Si la suite $\{u_{\mathrm{bf}}(k)\}$ est presque périodique et satisfait la condition (1.37) d'excitation persistente, il existe une unique solution presque périodique $\{(y_0(k), \theta))\}$. C'est un attracteur global exponentiellement stable et, pour toute autre solution $\{(y(k), \widehat{\theta}(k))\}$, la suite $\{y(k) - y_0(k)\}$ converge exponentiellement vers 0 avec une raison inférieure à* $\sup\left\{\frac{1+\theta-f(\theta)}{2}, 1 - \frac{\delta}{2r+\frac{4\sup_i\{u}{\sup_\varphi\{1-|\varphi}}\right.$

Dans le deuxième cas, le système (1.29) s'écrit simplement :

$$\left.\begin{array}{rcl} y(k+1) & = & \left[\theta - f(\widetilde{\theta}(k) + \theta)\right] y(k) \\ \widetilde{\theta}(k+1) & = & \dfrac{r}{r + y(k)^2}\, \widetilde{\theta}(k) \end{array}\right\} . \tag{1.41}$$

Donc toute solution du type $\{(0, \widetilde{\theta}_0)\}$ est solution presque périodique. Et le système suivant, obtenu en linéarisant (1.29) le long de la solution $\{(0, \widetilde{\theta}_0)\}$,

$$\begin{pmatrix} Y(k+1) \\ T(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta - f(\widetilde{\theta}_0 + \theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y(k) \\ T(k) \end{pmatrix} \tag{1.42}$$

nous montre qu'une telle solution est :

- hyperboliquement instable si $|\theta - f(\widetilde{\theta}_0 + \theta)| > 1$,
- hyperboliquement stable si $|\theta - f(\widetilde{\theta}_0 + \theta)| < 1$,
- elliptique si $|\theta - f(\widetilde{\theta}_0 + \theta)| = 1$.

Nous concluons que, si apparement d'après la Proposition 2, on a un comportement satisfaisant dans le cas idéal, la stabilité des solutions ne dépend en fait que de la commande en boucle fermée u_{bf}. Aussi, on peut s'attendre à de grandes modifications du comportement lorsque, n'étant plus dans le cas idéal, des perturbations sont introduites et qu'elles "dominent" la commande en boucle fermée (en un sens à définir). Notons aussi que, pour cet aspect qualitatif, l'influence de la synthèse f, adoptée pour le calcul du contrôleur, est faible.

1.3 Les difficultés du cas non idéal

Dans le cas non idéal, le couple d'entrée-sortie $(\{u(k)\}, \{y(k)\})$ du système à commander ne vérifie plus l'équation (1.1) du modèle de synthèse et ceci quelque soit la valeur de θ prise pour ce modèle. On est alors amené à définir l'*erreur de modélisation* $w_\theta(k)$ associée au modèle de synthèse de paramètre θ comme :

$$w_\theta(k) \;=\; y(k) \;-\; \theta\, y(k-1) \;-\; u(k-1)\;. \tag{1.43}$$

Si aucune précaution n'est prise envers cette erreur et le contrôleur (1.20) est conservé, le système bouclé (1.29) devient :

$$\left.\begin{array}{rcl} y(k+1) &=& \left[\theta - f(\widetilde{\theta}(k) + \theta)\right] y(k) \;+\; u_{\mathrm{bf}}(k) \;+\; w_\theta(k) \\ \widetilde{\theta}(k+1) &=& \dfrac{r\widetilde{\theta}(k) + w_\theta(k) y(k)}{r + y(k)^2} \quad , \qquad r \neq 0\;, \end{array}\right\} \tag{1.44}$$

Nous allons illustrer la difficulté prédite dans la conclusion de la section précédente en montrant que ce système est *commandable*, i.e. pour deux couples quelconques $(y_1, \widetilde{\theta}_1)$ et $(y_2, \widetilde{\theta}_2)$, il existe un couple de suites $(\{u_{\mathrm{bf}}(k)\}, \{w_\theta(k)\})$ tel qu'une solution issue de $(y_1, \widetilde{\theta}_1)$ atteint $(y_2, \widetilde{\theta}_2)$ en temps fini. Si une telle propriété est satisfaite, alors il existe des suites de commandes en boucle fermée et d'erreurs de modèlisation pouvant amener l'état du système bouclé à des valeurs inacceptables en pratique. Cette commandabilité se démontre de la façon suivante :

Si $y_1 \neq 0$: alors :

$$w_\theta \;=\; \frac{(r + y_1^2)\widetilde{\theta}_2 - r\widetilde{\theta}_1}{y_1} \quad , \qquad u_{\mathrm{bf}} \;=\; y_2 \;-\; \left[\theta - f(\widetilde{\theta}_1 + \theta)\right] y_1 \;-\; w_\theta \tag{1.45}$$

permet de passer de $(y_1, \widetilde{\theta}_1)$ à $(y_2, \widetilde{\theta}_2)$ en une seule itération.

Si $y_1 = 0$: alors un premier couple :

$$w_\theta \;=\; 0 \quad , \qquad u_{\mathrm{bf}} \;=\; 1 \tag{1.46}$$

permet de se ramener au cas précédent.

Ce résultat de commandabilité n'est pas encore désastreux car il se peut que les suites dont on a besoin pour faire cette transition soient de très grandes amplitudes. Dans ce cas, on ne pourrait pas dire qu'un problème existe avec des petites perturbations. Malheureusement, nous avons la conjecture suivante :

Conjecture : *Pour tout $\varepsilon > 0$ et deux couples quelconques $(y_1, \widetilde{\theta}_1)$ et $(y_2, \widetilde{\theta}_2)$, il existe un couple de suites $(\{u_{\mathrm{bf}}(k)\}, \{w_\theta(k)\})$ tel qu'une solution issue de $(y_1, \widetilde{\theta}_1)$ atteint $(y_2, \widetilde{\theta}_2)$ en temps fini et pour tout k :*

$$|w_\theta(k)| \leq \varepsilon \quad , \qquad |u_{\mathrm{bf}}(k)| \leq \varepsilon. \tag{1.47}$$

Alors, même avec une perturbation arbitrairement petite, on peut atteindre n'importe quel état de la boucle fermée.

Cette conjecture repose sur les deux faits suivants :

Fait 1 : D'après la section précédente, nous savons que, en prenant $w_\theta(k) \equiv 0$ et $u_{\mathrm{bf}}(k) = y_0 \neq 0$, les solutions de (1.44) tendent exponentiellement vers $(y_0, 0)$.

Fait 2 : En prenant $u_{\mathrm{bf}}(k) \equiv 0$ et :

$$w_\theta(k) = \frac{y_0}{\sqrt{k+1}} - \left[\theta - f(\widetilde{\theta}(k) - \theta)\right] \frac{y_0}{\sqrt{k}} \tag{1.48}$$

nous obtenons :

$$y(k) = \frac{y_0}{\sqrt{k}} \tag{1.49}$$

et, avec (1.5),

$$\begin{aligned}
\widehat{\theta}(k+1) &= \widehat{\theta}(k) + \frac{1}{r + y(k)^2} y(k) \left[y(k+1) + \Big(f(\widehat{\theta}(k)) - \widehat{\theta}(k)\Big) y(k)\right] && (1.50)\\
&\geq \widehat{\theta}(1) + \frac{y_0^2}{r + y_0^2} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k} \left[\sqrt{\frac{k}{k+1}} - (1-\varepsilon)\right] && (1.51)\\
&\geq \widehat{\theta}(1) + \frac{\varepsilon y_0^2}{\sqrt{2}(r + y_0^2)} \log(k) - C && (1.52)
\end{aligned}$$

où C est une constante positive ne dépendant que de ε, y_0 et r. Aussi, avec (1.5), on a :

$$\frac{|f(\widetilde{\theta}(k))|}{\sqrt{k}} \leq \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{k}} + \frac{|\widetilde{\theta}(k)|}{\sqrt{k}} \tag{1.53}$$

et donc la perturbation $\{w_\theta(k)\}$ tend vers 0. Pour conclure, avec une suite $\{w_\theta(k)\}$ tendant vers 0, la suite $\{\widehat{\theta}(k)\}$ peut tendre vers $+\infty$. Pour avoir une suite $\{\widehat{\theta}(k)\}$ tendant vers $-\infty$, il suffit de chercher de la même façon une suite $\{w_\theta(k)\}$ telle que :

$$y(k) = (-1)^k \frac{y_0}{\sqrt{k}} . \tag{1.54}$$

Ainsi, pour trouver une trajectoire reliant deux points arbitraires avec des suites satisfaisant (1.47), on pourra d'abord utiliser le Fait 1, puis si l'objectif n'est pas encore atteint et $y(k)$ est suffisament petit, on applique le Fait 2 ce qui a pour effet de rendre $|\widetilde{\theta}(k)|$ arbitrairement grand. Alors avec u_{bf} non nul, on voit qu'en moins de deux étapes y aussi sera très grand.

Nous concluons que le contrôleur adaptatif théorique de base (1.20) doit être modifié pour supprimer cette commandabilité globale par la perturbation et ainsi lui garantir une applicabilité. Et, puisque, avec la perturbation, on peut rendre le paramètre estimé aussi grand que l'on veut, l'objectif premier de ces modifications doit être de garder ce paramètre borné. On a en effet [10, chapitre 4] :

Proposition 5 *Supposons que la suite d'erreurs de modélisation* $\{w_\theta(k)\}$ *est bornée. Si pour une solution* $\{y(k), \widetilde{\theta}(k)\}$ *du système bouclé, la suite* $\{\widetilde{\theta}(k)\}$ *est bornée, alors la suite* $\{y(k)\}$ *est bornée.*

Dans le prochain chapitre, nous nous attacherons à préciser et justifier ces modifications qui garantissent la bornitude des solutions malgré l'existence d'une erreur de modélisation "raisonnable". Mais auparavant, il est important de noter que, pour faire apparaitre le problème de paramètre estimé non borné et de commandabilité, nous avons dû choisir une erreur de modélisation bien particulière. Sa particularité tient à son *autocorrélation*. En effet si cette erreur est un bruit blanc, le contrôleur adaptatif suivant par exemple :

$$\left.\begin{aligned} \widehat{\theta}(k) &= \widehat{\theta}(k-1) + \frac{y(k-1)}{r(k)+y(k-1)^2}\Big(y(k)-u(k-1)-y(k-1)\widehat{\theta}(k-1)\Big) \\ r(k) &= r(k-1)+y(k-1)^2 \\ u(k) &= -f(\widehat{\theta}(k))\,y(k) + u_{\mathrm{bf}}(k) \end{aligned}\right\} \tag{1.55}$$

implique [13, chapitre 11] :

Proposition 6 *Supposons que* $\{w_\theta(k)\}$ *est un processus stochastique sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$*, adapté à une suite croissante de sous* σ*-algèbres* $\{\mathcal{F}(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ *et tel que :*

$$\begin{aligned} &1.\quad E\left\{w_\theta(k)\,|\mathcal{F}(k-1)\right\} = 0 \quad p.s. \\ &2.\quad E\left\{w_\theta(k)^2\,|\mathcal{F}(k-1)\right\} = \sigma^2 \quad p.s. \\ &3.\quad \limsup_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} w_\theta(i)^2 \le +\infty \quad p.s. \end{aligned} \tag{1.56}$$

Dans ces conditions,

$$\begin{aligned} &1.\quad \limsup_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} u(i)^2 \le +\infty \quad p.s. \\ &2.\quad \limsup_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} y(i)^2 \le +\infty \quad p.s. \\ &3.\quad \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\Big[y(i+1)-(\widehat{\theta}(i)-f(\widehat{\theta}(i))y(i)-u_{\mathrm{bf}}(i)\Big]^2 = \sigma^2 \quad p.s. \end{aligned} \tag{1.57}$$

Cependant, pour obtenir ce résultat, on doit utiliser une adaptation à gain évanescent puisque la suite $\{r(k)\}$ tend vers l'infini.

Au chapitre 3, une analyse détaillée du système dynamique donné par la boucle fermée nous permettra de mieux comprendre l'importance de cette autocorrélation. Mais surtout, cela nous permettra l'étude de la stabilité des solutions bornées et des effets de divers modifications du contrôleur.

Chapitre 2

Solutions bornées

2.1 Erreur de modélisation des systèmes linéaires

Le modèle de synthèse étant toujours (1.1), supposons que le système à commander soit linéaire stationnaire observable, i.e. supposons que ses entrées-sorties vérifient :

$$A(q^{-1})\, y(k) \;=\; B(q^{-1})\, u(k-1) \;+\; d(k) \tag{2.1}$$

avec une suite $\{d(k)\}$ bornée représentant les perturbations exogènes et :

$$A(q^{-1}) \;=\; \sum_i a_i\, q^{-i} \quad , \qquad B(q^{-1}) \;=\; \sum_i b_i\, q^{-i} \; . \tag{2.2}$$

Dans ce cas l'erreur de modélisation associée à un modèle de synthèse de paramètre θ est :

$$w_\theta(k) \;=\; y(k) \;-\; \theta\, y(k-1) \;-\; u(k-1) \; . \tag{2.3}$$

Pour écrire une des propriétés fondamentales de cette erreur, nous avons besoin des définitions suivantes :

Definition 2 *Étant donné un nombre réel $\mu \in]0,1[$,*
- on appelle norme l^2_μ des signaux entrées-sorties la suite $\{s_\mu(k)\}$ définie par :

$$s_\mu(k+1)^2 \;=\; \mu^2\, s_\mu(k)^2 \;+\; u(k)^2 + y(k)^2 \; , \tag{2.4}$$

- on dit qu'une suite $\{\delta(k)\}$ est μ-exponentiellement décroissante s'il existe une constante Δ telle que, pour tout k,

$$|\delta(k)| \;\leq\; \Delta\, \mu^k \; . \tag{2.5}$$

- on note $\mathcal{F}_\mu$ l'ensemble des fractions rationnelles H dont les pôles sont dans le disque ouvert de rayon μ.

On a [34, Propriété 2.1] :

Proposition 7 *Pour tout nombre réel $\mu \in]0,1[$, tout système linéaire (2.1) et pour tout θ, l'erreur de modélisation associée w_θ vérifie, pour tout instant k,*

$$|w_\theta(k)| \;\leq\; \beta(k) \;+\; \gamma_\theta\, s_\mu(k) \tag{2.6}$$

où la constante γ_θ et la suite $\{\beta(k)\}$ sont données par :

$$\gamma_\theta^2 \;\leq\; \oint_{|z|=\mu} \left(\mu^2 \left|A(z^{-1})H(z^{-1}) - 1 + \theta z^{-1}\right|^2 + \left|B(z^{-1})H(z^{-1}) - 1\right|^2\right) \frac{dz}{2i\pi z} \tag{2.7}$$

$$\beta(k) \;\leq\; \sqrt{\oint_{|z|=\mu} \left|H(z^{-1})\right|^2 \frac{dz}{2i\pi z}} \sqrt{\sum_{i=0}^{k} \mu^{2(k-i)} d(i)^2} \;+\; \delta(k) \tag{2.8}$$

ceci pour toute fraction rationnelle H de $\mathcal{F}_\mu$, $\{\delta(k)\}$ étant une suite positive μ-exponentiellement décroissante ne dépendant que de H et des conditions initiales.

D'après ce résultat, quelque soit le système linéaire et quelque soit le modèle de synthèse, l'erreur de modélisation associée w_θ est majorée linéairement par la norme l_μ^2 des signaux entrées-sorties. De plus le rapport de proportionalité est donné par la distance L^2 des graphes du modèle et du système au sens de Vidyasagar [47]. Cette propriété est liée à la suivante [36, Property 1, Remark 1] :

Proposition 8 *Soit X la partie de l'état d'un système linéaire, stationnaire, de dimension finie, d'entrée u et sortie y, contenant les composantes observables et les composantes inobservables associées à des pôles de module strictement inférieur à μ, il existe une constante γ et une suite $\{\delta(k)\}$ μ-exponentiellement décroissante telles que, pour tout instant k,*

$$|X(k)| \;\leq\; \delta(k) \;+\; \gamma\, s_\mu(k) \;. \tag{2.9}$$

Nous disons que s_μ est, à une constante près, un observateur de la norme de l'état. L'intérêt est que s_μ s'obtient très facilement et ceci sans connaitre le système. Nous définissons alors la classe de systèmes suivants :

Definition 3 *Étant donnés trois constantes strictement positives γ, ϑ et $\mu \in]0,1[$ et un intervalle $[\theta_{\min}\,,\,\theta_{\max}]$, tout système (linéaire ou non) d'entrée u et sortie y sera dit (γ,ϑ)-presque exactement modélisé si il existe une suite $\{\theta(k)\}$, dite suite de comparaison, telle que :*

1.
$$\theta(k) \;\in\; [\theta_{\min}\,,\,\theta_{\max}] \qquad \forall k \tag{2.10}$$

2.
$$\sum_{i=k+1}^{k+l} |\theta(i) - \theta(i-1)| \;\leq\; V \;+\; \vartheta\, l \qquad \forall\,(k,l) \tag{2.11}$$

3.
$$|w_\theta(k)| \;\leq\; \beta(k) \;+\; \gamma\, s_\mu(k) \qquad \forall\, k \tag{2.12}$$

où V est une constante, $\{\beta(k)\}$ est une suite bornée et $\{w_\theta(k)\}$ est la suite des erreurs de modélisation associée à la suite de comparaison $\{\theta(k)\}$, i.e.

$$w_\theta(k) \;=\; y(k) \;-\; \theta(k)\, y(k-1) \;-\; u(k-1) \;. \tag{2.13}$$

D'après la Proposition 7, tout système linéaire stationnaire dont la distance L^2 de son graphe à celui du modèle de synthèse (1.1) est inférieure à γ est $(\gamma, 0)$-presque exactement modélisé. Ce gain γ sera petit si le modèle de synthèse est obtenu en (voir [36]) :
- négligeant des pôles et des zéros stables suffisament rapides,
- remplaçant des zéros instables suffisament rapides par des retards,

- négligeant des pôles pas trop lents et presque non commandables,
- négligeant des instationnarités suffisaments lentes en moyenne ou petites en amplitude,
- négligeant des nonlinéarités dont la distance à l'infini à des fonctions linéairement bornées est petite.

Pour réduire l'effet de ces approximations et plus généralement diminuer la distance L^2 du graphe du système à celui du modèle de synthèse, il est utile de considérer comme système à commander un système ayant déjà un bouclage – déplacement des pôles – ainsi qu'un shunt – déplacement des zéros – qui ont été déterminés à partir des connaissances a priori. À l'occasion de cette transformation on pourra retrancher la sortie désirée à la sortie du système. Appliquant la technique du *modèle interne*, on introduira également sur la commande un modèle des perturbations exogènes et de cette sortie désirée. Présisément [36],

Definition 4 *Soient $\{u_p(k)\}$ et $\{y_p(k)\}$ les suites de commandes et de sorties du système réel à commander, on appelle système transformé le système d'entré u et sortie y, données par :*

$$\begin{pmatrix} U_y(q^{-1})y(k) \\ U_u(q^{-1})u(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [U_y(q^{-1}) - V_y(q^{-1})T(q^{-1})] & -q^{-1}W_y(q^{-1})T(q^{-1}) \\ V_u(q^{-1}) & W_u(q^{-1})T(q^{-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_p(k) - y_d(k) \\ u_p(k) \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

où U_u, V_u, W_u, U_y, V_y, W_y et T sont des polynômes, le terme constant de U_u, U_y et T étant égal à 1 et les fractions rationnelles $U_y(z^{-1}) - V_y(z^{-1})T(z^{-1}) + z^{-1}V_u(z^{-1})W_y(z^{-1})$, $U_u(z^{-1})$ et $U_y(z^{-1})$ ayant leurs zéros de module strictement inférieurs à 1, et enfin $\{y_d(k)\}$ est une suite de sorties désirées vérifiant :

$$T(q^{-1})\, y_d(k) \;=\; 0\,. \tag{2.15}$$

Lorsqu'une telle modification est introduite, le modèle de synthèse et le contôleur associé doivent être pris sous la forme (voir [36]) :

$$\left.\begin{array}{rcl} y_s(k) & = & S(q^{-1})\, y(k) \\ y_s(k+1) & = & -\theta\, y_s(k) \;+\; u(k) \end{array}\right\} \tag{2.16}$$

et :

$$u(k) \;=\; -\left[f(\theta) \;+\; (1-\theta q^{-1})[q(1-S(q^{-1})]\right]\; y(k) + u_{\mathrm{bf}}(k) \tag{2.17}$$

où S est le plus grand diviseur commun à T et V_u.

Rappelons le fait bien connu que, lorsque le système à commander admet (2.1) pour représentation, la bornitude des solutions ne pourra être obtenue que si le polynôme T est premier avec $B(q^{-1})$.

Dans la suite nous ne travaillerons qu'avec le système à commander transformé – d'où la présence de S dans le modèle de synthèse – .

2.2 Projection et Normalisation

D'après la conclusion de la section 1.3, la loi d'adaptation théorique (1.14) étudiée dans la Proposition 1 doit être modifiée de façon à, au minimum, garantir la bornitude de la suite des estimées $\{\widehat{\theta}(k)\}$. Si le système à commander est un système (γ,ϑ)-presque excatement modélisé (voir Définition 3), on sait qu'il existe une suite de comparaison dont les éléments sont dans l'intervalle $[\theta_{\min}\,,\,\theta_{\max}]$. Nous allons donc imposer aussi que $\widehat{\theta}(k)$ reste dans cet intervalle en prenant :

$$\left.\begin{array}{rcl} \widehat{\theta}_+(k-1) & = & \widehat{\theta}(k-1) \;+\; \dfrac{\alpha(k)}{y(k-1)}\Big(y_s(k) - u(k-1) - y_s(k-1)\widehat{\theta}(k-1)\Big) \\ \widehat{\theta}(k) & = & \left\{\begin{array}{ll} \theta_{\min} & \text{if } \;\widehat{\theta}_+(k-1) \;\leq\; \theta_{\min} \\ \widehat{\theta}_+(k-1) & \text{if } \;\theta_{\min} \;<\; \widehat{\theta}_+(k-1) \;<\; \theta_{\max} \\ \theta_{\max} & \text{if } \;\theta_{\max} \;\leq\; \widehat{\theta}_+(k-1) \end{array}\right\}(P) \end{array}\right\} \tag{2.18}$$

L'opération (P) n'est rien d'autre que la *projection* de $\widehat{\theta}_+(k-1)$ sur l'intervalle $[\theta_{\min}\,,\,\theta_{\max}]$. D'autres modifications ont été proposées – zone morte, rappel, ... [10] – mais en général elles ne donnent le résultat escompté de bornitude de la suite $\{\widehat{\theta}(k)\}$ que si les erreurs de modélisation vues par l'adaptation sont bornées.

Si le système à commander est (γ, ϑ)-presque exactement modélisé, l'erreur de modélisation associée est majorée linéairement par la norme l_μ^2 des signaux entrées-sorties. Définissons alors :

$$\sigma(k) \;=\; \sup\{1\,,\,(1-\mu)\,s_\mu(k)\} \tag{2.19}$$

et introduisons $\overline{\cdot}$ pour noter l'opération dite de *normalisation* définie pour une suite $\{v(k)\}$ quelconque par :

$$\overline{v}(k) \;=\; \frac{v(k)}{\sigma(k)} \tag{2.20}$$

L'erreur de modélisation associée à une suite de comparaison $\{\theta(k)\}$ et des signaux d'entrée-sortie normalisés est elle même normalisée, i.e. :

$$\overline{w_\theta}(k) \;=\; \overline{y_s}(k) \;-\; \theta(k)\,\overline{y_s}(k-1) \;-\; \overline{u}(k-1)\;. \tag{2.21}$$

Elle est de plus bornée pour les systèmes (γ, ϑ)-presque exactement modélisés. De ce fait, on remplace dans l'estimation les signaux par des signaux normalisés et on garantie ainsi le fait que les erreurs de modélisation vues par l'adaptation sont bornées. L'algorithme avec projection (2.18) et normalisation (2.20) a les propriétés suivantes [34, Propriété 2.4], à comparer avec la Proposition 1 :

Proposition 9 *Considérons l'algorithme (2.18) mais avec des signaux normalisés et $\alpha(k)$ satisfaisant avec $P(k)$ et $\beta(k)$:*

$$P_s \;\geq\; P(k) \;\geq\; \sup\left\{\left(1-\beta(k)P(k-1)\overline{y_s}(k-1)^2\right)\,P(k-1)\,,\,P_i\right\} \;>\; 0 \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned} 0 \;<\; & \frac{1-\alpha(k)\beta(k)+|1-\beta(k)|\sqrt{1-\alpha(k)\beta(k)}}{(2-\alpha(k)-\beta(k))(1-\alpha(k)\beta(k))} \\ & \leq\; \Gamma_q\,\frac{P(k-1)\overline{y_s}(k-1)^2}{\alpha(k)} \;\leq\; \Gamma_a^2\,\frac{2-\alpha(k)-\beta(k)}{1-\alpha(k)\beta(k)+|1-\beta(k)|\sqrt{1-\alpha(k)\beta(k)}}\;. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Pour toute suite de comparaison $\{\theta(k)\}$ (voir Définition 3), on a :

1. la suite $\{\widehat{\theta}(k)\}$ est bornée,

2. $\displaystyle\sum_{i=k+1}^{k+l} |\widehat{\theta}(k) - \widehat{\theta}(k-1)|^2 \;\leq\; 2P_s\Gamma_a^2 \left[\frac{\Delta_\theta^2}{P_i} + 2\,\frac{\Delta_\theta}{P_i}\,(V + \vartheta l) \;+\; \Gamma_q \sum_{i=k+1}^{k+l} \overline{w_\theta}(k)^2\right]$

3. $\displaystyle\sum_{i=k+1}^{k+l} \overline{e}(k)^2 \;\leq\; \Gamma_a^2 \left[\frac{\Delta_\theta^2}{\Gamma_q P_i} + 2\,\frac{\Delta_\theta}{\Gamma_q P_i}\,(V + \vartheta l) \;+\; \sum_{i=k+1}^{k+l} \overline{w_\theta}(k)^2\right]$

où w_θ est l'erreur de modélisation donnée par la suite de comparaison $\{\theta(k)\}$, e est l'erreur de modélisation donnée par la suite estimée $\{\widehat{\theta}(k)\}$ et :

$$\Delta_\theta \;=\; \sqrt{\theta_{\max} - \theta_{\min}}\ . \tag{2.24}$$

Notons aussi que les inégalités (2.22) et (2.23) sont facilement satisfaites. On peut prendre par exemple :

$$\begin{aligned} P(k) &= (1-\lambda(k))\left[1 - P(k-1)\overline{y_s}(k-1)^2\right] P(k-1) \;+\; \lambda(k)\,P_i \\ \alpha(k) &= \frac{P(k-1)\overline{y_s}(k-1)^2}{r(k) + P(k-1)\overline{y_s}(k-1)^2} \\ \beta(k) &= 1 \end{aligned} \tag{2.25}$$

avec :

$$0 \;\leq\; \lambda(k) \;\leq\; 1 \quad , \qquad \frac{1}{\Gamma_q} \;\leq\; r(k) \;\leq\; \Gamma_a^2 \;-\; (1-\mu)\,P_s \tag{2.26}$$

puisque $P(k-1)\overline{y_s}(k-1)^2 \leq (1-\mu)P_s$. Dans ce cas la vitesse maximale d'adaptation, i.e. $\sup_k \alpha(k)$ est donnée par :

$$v_{\max} \;=\; \frac{(1-\mu)\Gamma_q P_s}{1 + (1-\mu)\Gamma_q P_s}\ . \tag{2.27}$$

Ainsi Γ_q, P_i, P_s, et μ apparaissent comme des paramètres de réglage de l'algorithme d'estimation.

Cette Proposition 9 montre que, au lieu d'avoir une suite d'erreurs de carrés sommables comme dans le cas idéal (Proposition 1), on obtient une suite d'erreurs dont les normalisées ont des carrés petits en moyenne lorsque le système à commander transformé est (γ, ϑ)-presque exactement modélisé avec γ et ϑ petits.

2.3 Solutions bornées

On a [34, Lemme 2.6] :

Proposition 10 *En appliquant le contrôleur adaptatif :*

$$u(k) \;=\; -\left[(1 - \widehat{\theta}(k)q^{-1})[q(1 - S(q^{-1})] + f(\widehat{\theta}(k))\right] y(k) + u_{\mathrm{bf}}(k)\ , \tag{2.28}$$

où $\widehat{\theta}(k)$ est donné par la loi d'adaptation (2.18)-(2.22)-(2.23) dans laquelle on utilise des signaux normalisés, toutes les solutions de la boucle fermée sont bornées si le système à commander transformé (voir Définition 4) est (γ, ϑ)-presque exactement modélisé avec γ et ϑ

vérifiant :

$$(1-\mu)\left[(1-\mu)\sqrt{\frac{2\Delta_\theta}{\Gamma_q P_i}} + 2\sqrt{\frac{P_s\Delta_\theta}{P_i}}\right]\vartheta \;+\; \left[1+\sqrt{2\Gamma_q P_s}\right]\gamma \tag{2.29}$$
$$\leq \max_{0\leq\rho\leq 1} \frac{(1-\mu)(1-\rho)(\rho-\mu)(\rho-(1-\varepsilon))^2}{\rho\,\Gamma_a\left(1+F+(1+\Theta)\sum_{i=1}^{n_s}|s_i|\right)^3}$$

où :

$$S(q^{-1}) \;=\; 1 \;+\; \sum_{i=1}^{n_s} s_i q^{-i} \tag{2.30}$$

est donné par la transformation de la Définition 4 et :

$$\Theta \;=\; \sup\{|\theta_{\max}|\,,\,|\theta_{\min}|\} \quad , \qquad F \;=\; \sup_{\theta\in[\theta_{\min},\theta_{\max}]} |f(\theta)| \;\leq\; \Theta \;+\; 1-\varepsilon\;. \tag{2.31}$$

De plus il existe des constantes K_v et K_γ, dépendant en particulier de V et de la suite $\{\beta(k)\}$ de la Définition 3, telles que, pour tout k_0,

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{i=k_0+1}^{k_0+k}\left[y_s(i+1)-(\widehat{\theta}(i)-f(\widehat{\theta}(i))y_s(i)-u_{\mathrm{bf}}(i)\right]^2 \;\leq\; K_v\,\vartheta \;+\; K_\gamma\,\gamma\;. \tag{2.32}$$

Bien que l'inégalité (2.29) soit très conservative, nous pouvons en déduire les indications suivantes sur la façon de choisir les paramètres Γ_q, P_i, P_s, et μ de l'algorithme d'estimation pour augmenter la robustesse de la propriété de solutions bornées :

— La synthèse f du contrôleur doit donner une grande marge de stabilité ε. Aussi il faut, autant que posible, limiter le gain du contrôleur et les coefficients s_i du polynôme S lié au modèle interne.

— Pour augmenter la robustesse plus spécifiquement aux dynamiques négligées – quantifiées par γ – il vaut mieux réduire le produit $\Gamma_q P_s$, soit d'après (2.27) diminuer la vitesse d'adaptation. Cependant de ce fait, puisque $P_i \leq P_s$, on augmente la sensibilité aux instationnarités – quantifiées par ϑ –.

— Pour augmenter la robustesse aux instationnarités, il vaut mieux réduire le rapport $\frac{P_s}{P_i}$ qui, dans le cas d'un algorithme d'adaptation de type moindres carrés s'interprète comme le nombre de condition de la matrice de covariance a posteriori. Il est aussi utile de réduire l'incertitude a priori Δ_θ sur le pôle du modèle en boucle ouverte.

— Le rôle de μ est très complexe car d'après la Proposition 7, réduire μ réduit la classe des dynamiques négligées admissibles.

Des résultats quantitativement plus précis peuvent être obtenus pour certaines synthèse de commande f. Ainsi pour le cas du placement de pôle (1.6) – ou plus exactement du modèle de référence –, on a le résultat suivant [39, Theorem 7.7], [34, Propriété 2.6] :

Proposition 11 *En appliquant le contrôleur adaptatif :*

$$u(k) \;=\; -\left[(1-\widehat{\theta}(k)q^{-1})[q(1-S(q^{-1})]+(\widehat{\theta}(k)-a_m)\right]\,y(k)+u_{\mathrm{bf}}(k)\;, \tag{2.33}$$

où $|a_m| < \mu$ et $\widehat{\theta}(k)$ est donné par la loi d'adaptation (2.18)-(2.22)-(2.23) dans laquelle on utilise des signaux normalisés, toutes les solutions de la boucle fermée sont bornées si *le système à commander transformé (voir Définition 4) vérifie :*

$$A(q^{-1})\,S(q^{-1})\,y(k) \;=\; B(q^{-1})\,u(k-1) \;+\; d(k) \tag{2.34}$$

avec $\{d(k)\}$ *une suite de perturbations bornées et* A *et* B *des polynômes – ou même des séries – tels que :*

$$\inf_{(\theta,H)\in[\theta_{\min},\theta_{\max}]\times\mathcal{F}_\mu} \left\{ g\left(1-\frac{AS+B(1-a_m q^{-1}+(1-\theta q^{-1})S)}{H}\right)\right. \tag{2.35}$$

$$\left. +\ \frac{\theta\, g(S) \displaystyle\sup_{\varphi\in[\theta_{\min},\theta_{\max}]}\left\{ g\left(\frac{1}{\varphi S+(1-S)z^{-1}-a_m}\right)\right\}}{\mu(\mu-|a_m|)}\; g\left(1-\frac{(1-a_m q^{-1})B}{H}\right)\right\} \leq \frac{1}{\Gamma_a}$$

où F *est définie en (2.31) et, pour* $G\in\mathcal{F}_\mu$*,* $g(G)$ *est la norme* L^∞_μ *suivante :*

$$g(G) \;=\; \sup_{|z|=\mu}\left\{\left\|G(z^{-1}\right\|\right\} \;. \tag{2.36}$$

Dans le cas où le système à commander transformé est d'inverse stable ou plus préciséent $B(z^{-1})$ est une fraction rationnelle en z dans $\mathcal{F}_\mu$ dont les zéros sont de module strictement inférieur à μ, l'inégalité (2.35) est vérifiée si :

$$\inf_{\theta\in[\theta_{\min},\theta_{\max}]}\ \sup_{|z|=\mu}\left\{\left|\frac{A(z^{-1})+B(z^{-1})(1-\theta z^{-1})}{(1-a_m z^{-1})\,B(z^{-1})}\;S(z^{-1})\right|\right\} \;\leq\; \frac{1}{\Gamma_a}\;. \tag{2.37}$$

En comparant à (2.7), on voit que le paramètre θ du modèle de synthèse ne doit pas minimiser la distance L^2 (2.7) des graphes du modèle et du système à commander, mais, de façon bien plus intéressante, être tel que, lorsqu'on lui applique la synthèse f, ici de modèle de référence, on obtient un transfert bouclé aussi proche que possible du transfert désiré, ici $\frac{1}{1-a_m z^{-1}}$. De plus dans ce cas, le polynôme S introduit dans la transformation (2.14) avec le modèle interne doit être coupe bande pour les fréquences où le transfert bouclé obtenu est loin du transfert désiré.

L'inégalité (2.35) nous permet aussi de comparer commande linéaire et commande adaptative pour l'obtention de solutions bornées. Par exemple, considérons le système à commander transformé suivant, avec $S(q^{-1})=1$,

$$y(k) \;+\; a_1\,y(k-1) \;+\; a_2\,y(k-2) \;=\; u(k-1)\;, \tag{2.38}$$

le modèle de synthèse étant toujours le système du premier ordre (1.1). On obtient des solutions bornées si le point défini par (a_1,a_2) dans le plan appartient au rectangle donné par (prendre $H=1-a_m q^{-1}$ et $\theta=-a_1$) :

$$\begin{aligned} \theta_{\min} \;&\leq\; -a_1 \;\leq\; \theta_{\max}\;, \\ |a_2| \;&\leq\; \frac{\mu(\mu-|a_m|)}{\Gamma_a}\;. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Ceci est à comparer au triangle :

$$\begin{aligned} 1 \;-\; a_1 - c \;+\; a_2 &\;\geq\; 0 \\ 1 \;+\; a_1 + c \;+\; a_2 &\;\geq\; 0 \\ a_2 &\;\leq\; 1 \end{aligned} \tag{2.40}$$

qu'on obtiendrait en utilisant la commande linéaire :

$$u(k) \;=\; -c\,y(k)\ , \tag{2.41}$$

ou le triangle :

$$\begin{aligned} 1 \;-\; a_1 - c \;+\; a_2 &\;\geq\; 0 \\ 1 \;+\; a_1 + c \;+\; a_2 &\;\geq\; 0 \\ a_2 + 1 &\;\leq\; 1 \end{aligned} \tag{2.42}$$

donné par la commande linéaire du premier ordre maximisant l'intervalle d'incertitude paramétrique (1.27) :

$$u(k) \;=\; -c\,y(k) \;-\; y(k-1)\ . \tag{2.43}$$

Nous voyons que la commande adaptative autorise une bien plus grande plage de valeurs pour a_1 mais plus petite pour a_2. Cette plage pour a_2 devient équivalente dans la situation extrême où la marge de stabilité est maximale, i.e. $a_m = 0$, et Γ_a et μ tendent vers 1, ce qui impose une vitesse d'adaptation tendant vers 0.

Pour estimer la marge de gain, considérons le cas du système à commander tranformé suivant, avec $S(q^{-1}) = 1$,

$$y(k) \;+\; a\,y(k-1) \;=\; b\,u(k-1)\ . \tag{2.44}$$

Dans ce cas, les solutions sont bornées si :

$$\begin{aligned} \theta_{\min} \;\leq\; \frac{a}{b} \;\leq\; \theta_{\max}\ , \\ |b-1| \;\leq\; \frac{\mu - |a_m|}{\mu\Gamma_a}\ . \end{aligned} \tag{2.45}$$

Remarque 2 : Dans les énoncés des Propositions 10 et 11, nous avons mentionné l'usage de loi d'adaptation avec des signaux normalisés. Cependant, au contraire de la modification assurant la bornitude de la suite $\{\widehat{\theta}(k)\}$, la normalisation n'est pas nécessaire. Ainsi Ydstie [49, 50] et Wen et Hill [48] ont démontré des résultats du même type avec des lois d'adaptation utilisant des signaux non normalisés, mais incorporant une projection. Notons cependant qu'il semble que la normalisation permette de garantir des solutions bornées pour une classe de systèmes plus large. ∎

D'après la Proposition 10, dans le cas où le système à commander est, après transformation, suffisament presque exactement modélisé, l'objectif de commande est presque satisfait en moyenne quadratique alors qu'il l'est exactement comme une suite de carrés sommables dans le cas où le système à commander est – après transformation – exactement modélisé (cas idéal). Or, la moyenne quadratique ne donne aucune indication sur la valeur maximale. En particulier, la suite suivante :

$$\begin{aligned} v(i) &\;=\; 0 \qquad \forall\, i \;<\; k \\ v(k) &\;=\; \sqrt{k\varepsilon} \end{aligned} \tag{2.46}$$

a ε pour moyenne quadratique sur l'intervalle $[1, k]$, mais sa valeur maximale vaut $\sqrt{k\varepsilon}$. En fait une telle suite nulle pendant une longue période et maximale sur une période très courte maximise le rapport de la valeur max à la valeur quadratique moyenne. Malheureusement, c'est exactement ce type de comportement dit d'*intermittence* [8] que l'on observe comme premier comportement pathologique des systèmes linéaires adaptatifs. Un tel phénomène ne peut s'observer dans le cas d'une commande linéaire car, à partir du moment où toutes les solutions sont bornées, on a nécessairement stabilité exponentielle de toutes les solutions – sauf le cas très particulier de pôle du système bouclé de module égal à 1 –. Tout comme dans le cas idéal, nous devons donc compléter notre analyse. Il faut comprendre pourquoi ce comportement satisfaisant uniquement en moyenne quadratique et surtout étudier si le contrôleur adaptatif peut être modifié pour améliorer la performance.

Chapitre 3

Étude qualitative des solutions bornées

3.1 Les outils

Pour étudier le comportement des solutions d'un *système linéaire adaptatif*, i.e. du système constitué d'un système linéaire bouclé par un contôleur adaptatif, les outils suivants, développés dans le cadre de la théorie des systèmes dynamiques, sont très utiles :

1. la méthode de perturbation de Poincaré [24, 34, 32, 35] permet l'étude du régime permanent grâce à la mise en évidence de solutions stationnaires dont on peut étudier la stabilité,
2. l'existence d'ensemble intégraux normalement hyperboliques [46, 34, 37, 35, 43] permet de comprendre une bonne partie du comportement transitoire,
3. enfin la méthode de moyennisation [45, 2, 7, 34, 43] permet de comprendre la convergence ou la divergence vers les solutions stationnaires.

Dans ce qui suit nous ne rappelerons que les première et troisième méthodes. Nous pourons ainsi étudier le régime permanent et ses changements lorsque le contrôleur adaptatif est modifié.

Pour appliquer chacune des trois méthodes citées ci-dessus, il faut tout d'abord écrire le système linéaire adaptatif sous une forme spécifique dite forme standard. Pour cela, supposons que le système à commander après transformation (voir Définition 4) s'écrive en représentation détat sous la forme :

$$\left.\begin{array}{rcl} Y(k+1) & = & \mathcal{A}\,Y(k) \ + \ (\mathcal{B}_u \quad \mathcal{B}_d)\begin{pmatrix} u(k) \\ d(k) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y(k) \\ y_s(k) \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \mathcal{C} \\ \mathcal{C}_s \end{pmatrix} Y(k) \end{array}\right\} \tag{3.1}$$

avec d une perturbation exogéne bornée. Rappelons que $y(k{+}1){-}y_s(k{+}1)$ dépend linéairement, non pas de $Y(k+1)$, mais de $Y(k)$, i.e. :

$$y_\delta(k) \stackrel{\text{def}}{=} y(k+1) - y_s(k+1) \ = \ \mathcal{C}_\delta\, Y(k)\ . \tag{3.2}$$

Prenons le contrôleur adaptatif suivant, contenant un exemple de loi d'adaptation normalisée avec projection (2.18)-(2.22),

$$\left.\begin{array}{rcl} s_\mu(k+1)^2 &=& \mu^2\, s_\mu(k)^2 \;+\; u(k)^2 + y(k)^2 \\ \widehat{\theta}_+(k) &=& \widehat{\theta}(k) \;+\; \dfrac{y_s(k)\left(y_s(k+1) - u(k) - y_s(k)\widehat{\theta}(k)\right)}{r\sup\{1\,,\,(1-\mu)\,s_\mu(k+1)\}^2 + y_s(k)^2} \\ \widehat{\theta}(k+1) &=& \left\{\begin{array}{ll} \theta_{\min} & \text{if } \;\widehat{\theta}_+(k) \;\le\; \theta_{\min} \\ \widehat{\theta}_+(k) & \text{if } \;\theta_{\min} \;<\; \widehat{\theta}_+(k) \;<\; \theta_{\max} \\ \theta_{\max} & \text{if } \;\theta_{\max} \;\le\; \widehat{\theta}_+(k) \end{array}\right. \\ u(k) &=& -(1-\widehat{\theta}(k)q^{-1})\,y_\delta(k) \;-\; f(\widehat{\theta}(k))\,y(k) + u_{\mathrm{bf}}(k) \end{array}\right\} \tag{3.3}$$

Le système bouclé (3.1)-(3.3) obtenu est trop complexe pour être étudié globalement. Comme seules nous préoccupent les solutions évoluant dans des limites raisonnables, nous allons nous intéresser au comportement des solutions uniquement lorsqu'elles sont dans le sous ensemble $\mathcal{S}(k)$ de l'espace d'état $(Y, s_\mu, y_\delta, \widehat{\theta})$ défini par :

$$s_\mu \le \frac{1}{1-\mu} \qquad \text{et} \qquad \widehat{\theta}_+ \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}] \;. \tag{3.4}$$

Restreint à $\mathcal{S}(k)$ le système bouclé (3.1)-(3.3) s'écrit :

$$\begin{aligned} Z(k+1) &= A(\widehat{\theta}(k))\,Z(k) + B\,\upsilon(k) \\ \widehat{\theta}(k+1) &= \widehat{\theta}(k) \;+\; \frac{C_s Z(k)\left[C_s\left(A(\widehat{\theta}(k))Z(k) + B\upsilon(k)\right) + F(\widehat{\theta}(k))\,Z(k) - (1\ 0)\,\upsilon(k)\right]}{r + [C_s Z(k)]^2} \end{aligned} \tag{3.5}$$

où :

$$\begin{aligned} Z(k) \;&=\; \begin{pmatrix} Y(k+1) \\ y_\delta(k) \end{pmatrix} \;,\quad \upsilon(k) \;=\; \begin{pmatrix} u_{\mathrm{bf}}(k) \\ d(k) \end{pmatrix} \\ B \;&=\; (\mathcal{B}_u \quad \mathcal{B}_d)\;,\quad C_s \;=\; (\mathcal{C}_s \quad 0)\;, \\ A(\widehat{\theta}) \;&=\; \begin{pmatrix} \mathcal{A} - \mathcal{B}_u\left(\mathcal{C}_\delta + f(\widehat{\theta}(k))\,\mathcal{C}\right) & \mathcal{B}_u\,\widehat{\theta}\,\mathcal{C}_\delta \\ \mathcal{C}_\delta & 0 \end{pmatrix}\;, \\ F(\widehat{\theta}) \;&=\; \left(-\mathcal{C}_\delta - f(\widehat{\theta})\,\mathcal{C} \qquad \widehat{\theta}\,\mathcal{C}_\delta\right)\;. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Alors, étant donné $\eta > 0$, en définissant :

$$X(k) \;=\; \frac{Z(k)}{\sqrt{r\,\eta}} \quad,\qquad v(k) \;=\; \frac{\upsilon(k)}{\sqrt{r\,\eta}}\;, \tag{3.7}$$

nous obtenons la *forme standard* du système bouclé :

$$\left.\begin{array}{rcl} X(k+1) & = & A(\widehat{\theta}(k))\,X(k) \;+\; B\,v(k) \\[2ex] \widehat{\theta}(k+1) & = & \widehat{\theta}(k) \;+\; \eta\,K(X(k),\widehat{\theta}(k),v(k),\eta) \end{array}\right\} \tag{3.8}$$

où :

$$K(X,\widehat{\theta},v,\eta) \;=\; \frac{C_s X\left[C_s\left(A(\widehat{\theta})\,X+B\,v\right)+F(\widehat{\theta})\,X-(1\;0)\,v\right]}{1+\eta\,[C_s X]^2} \tag{3.9}$$

L'intérêt de cette forme est que, lorsque $\eta = 0$, le système (3.8), dit *système gelé* dans ce cas, est la famille de systèmes linéaires suivante, indexée en $\widehat{\theta}$:

$$X(k+1) \;=\; A(\widehat{\theta})\,X(k) \;+\; B\,v(k)\;. \tag{3.10}$$

Ce sont les systèmes linéaires bouclés obtenus en appliquant le contrôleur linéaire gelé en $\widehat{\theta}$:

$$u(k,\widehat{\theta}) \;=\; -(1-\widehat{\theta}q^{-1})\,y_\delta(k) \;-\; f(\widehat{\theta})\,y(k) \;+\; u_{\mathrm{bf}}(k)\;. \tag{3.11}$$

Pour une telle famille, le comportement de toutes les solutions est complètement déterminé par les valeurs propres de $A(\widehat{\theta})$ et celui des solutions stationnaires, i.e. les solutions qui sont bornées sur $]-\infty\,,\,+\infty[$. L'étude du système (3.8) lui-même peut alors être faite en utilisant des méthodes de perturbation comme celle de Poincaré [24]. Pour en tirer des conclusions, on devra cependant supposer que η est petit. D'après (3.6) et (3.7), ce cas η petit, dit d'*adaptation lente*, est réalisé si :

- soit on force effectivement une adaptation lente en choisissant r grand,
- soit les signaux exogènes u_{bf} et d, commande en boucle fermée et perturbation, entrant dans le système en boucle fermée, sont petits en amplitude, ce qui est en général le cas lorsqu'un modèle interne est utilisé.

Pour que le régime permanent ait un sens nous supposerons que les signaux v exogènes au système en boucle fermée sont des suites presque périodiques et même, pour simplifier, périodiques de période M :

$$v(k) \;=\; \sum_{i=1}^{m} v_i\, z_i^k \tag{3.12}$$

où les z_i sont des racines $M^{\text{ième}}$ de l'unité. Dans ce cas, on a [34, Propriété 3.1] :

Proposition 12 *Le système gelé (3.10) avec v satisfaisant (3.12), admet, pour $\widehat{\theta}$, une solution bornée sur $]-\infty,+\infty[$ si et seulement si, pour chaque z_i, composante fréquentielle de v, qui serait valeur propre de $A(\widehat{\theta})$, le vecteur Bv_i correspondant est dans l'image de $z_iI - A(\widehat{\theta})$. Si une telle solution existe, elle peut s'écrire :*

$$X(k) \;=\; X(k,\alpha_j,\widehat{\theta}) \;\stackrel{\mathrm{def}}{=}\; \sum_{i=1}^{m} X_i(\widehat{\theta})\, z_i^k \;+\; \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, A(\widehat{\theta})^k\, V_j(\widehat{\theta}) \tag{3.13}$$

où:

- *les $X_i(\widehat{\theta})$ sont solutions de :*

$$\left(z_i I - A(\widehat{\theta})\right) X_i(\widehat{\theta}) \;=\; B\, v_i \;, \tag{3.14}$$

- *les $V_j(\widehat{\theta})$ sont des vecteurs propres normalisés de $A(\widehat{\theta})$, associés aux valeurs propres de module égal à 1, s'il y en a. Ils sont nuls sinon.*

- *Les α_j sont des nombres complexes arbitraires.*

Cette solution est:

- *globalement exponentiellement stable si toutes les valeurs propres de $A(\widehat{\theta})$ sont de module strictement inférieur à 1,*

- *globalement stable si toutes les valeurs propres de $A(\widehat{\theta})$ sont de module inférieur à 1 et les valeurs propres de module égal à 1 ont un bloc de Jordan de dimension 1,*

- *instable dans les autres cas.*

À partir de ce résultat, une méthode de perturbation nous donne [34, 40] :

Proposition 13 *Si le système sous forme standard (3.8) a une solution de période M dont la condition initiale a un point d'accumulation $(X^*, \widehat{\theta}^*)$ lorsque η tend vers 0, alors $(X^*, \widehat{\theta}^*)$ est la condition initiale d'une solution de période M $(X^*(k), \widehat{\theta}^*)$ du sytème gelé en $\widehat{\theta}^*$. De plus, on a :*

$$E(\alpha_j^*, \widehat{\theta}^*) \;=\; 0 \tag{3.15}$$

où, avec (3.13),

$$E(\alpha_j, \widehat{\theta}) \;=\; \sum_{k=0}^{M-1} K\left(X(k, \alpha_j, \widehat{\theta})\,,\, \widehat{\theta}\,,\, v(k)\,,\, 0\right) \tag{3.16}$$

L'existence de solutions à l'équation (3.15) a été étudiée dans [32] dans le cas d'une synthèse de modèle de référence. Notons aussi que l'existence d'une solution périodique dont la condition initiale n'aurait pas de point d'accumulation lorsque η tend vers 0 démontrerait un comportement très sensible – et peu souhaitable – aux suites exogènes.

Cette condition nécessaire nous permet de trouver, parmi les solutions du régime permanent du système gelé, celles qui se prolongent en solutions du régime permanent du système réel. L'application de la méthode de perturbation de Poincaré donne en effet [34, 40, 32] :

Proposition 14 *Soit $(\alpha_j^*, \widehat{\theta}^*)$ un zéro de (3.16) tel qu'aucun des z_i n'est valeur propre de $A(\widehat{\theta}^*)$. Posons :*

$$V^* \;=\; \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^* V_j^* \;. \tag{3.17}$$

Si le déterminant suivant est non nul :

$$\left|\begin{array}{cc} A(\widehat{\theta}^*)^M - I & \dfrac{\partial A^M}{\partial \widehat{\theta}}(\widehat{\theta}^*) \otimes V^* \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{M-1} \frac{\partial K}{\partial X}\left(X(k, \alpha_j^*, \widehat{\theta}^*)\,,\, \widehat{\theta}^*\,,\, v(k)\,,\, 0\right) A(\widehat{\theta}^*)^i & \dfrac{\partial E}{\partial \widehat{\theta}}(\alpha_j^*, \widehat{\theta}^*) \end{array}\right| \;, \tag{3.18}$$

il existe η_0 et une unique application régulière :

$$(X,\widehat{\theta}) \ : \ \mathbb{Z}\times]-\eta_0,+\eta_0[\longrightarrow \mathbb{R}^n\times\mathbb{R} \ ,$$

tels que :

- $\{(X(k,\eta),\widehat{\theta}(k,\eta))\}$ *est une solution périodique de période M du système (3.8).*
- *Pour tout k, on a :*

$$X(k,0) \ = \ X(k,\alpha_j^*,\widehat{\theta}^*) \quad , \qquad \widehat{\theta}(k,0) \ = \ \widehat{\theta}^* \ . \tag{3.19}$$

- *Enfin, cette solution est :*
  - *exponentiellement stable si toutes les valeurs propres de $A(\widehat{\theta}^*)$ sont de module strictement inférieur à 1 et les valeurs propres de $\frac{\partial E}{\partial\theta}(\alpha_j^*,\widehat{\theta}^*)$ sont à partie réelle strictement négative,*
  - *instable si une valeur propre de $A(\widehat{\theta}^*)$ a un module strictement plus grand que 1 ou si une valeur propre de $\frac{\partial E}{\partial\theta}(\alpha_j^*,\widehat{\theta}^*)$ a une partie réelle strictement positive.*

Pour obtenir des informations utiles, les Propositions 13 et 14 sont appliquées de la façon suivante :

1. Les zéros $(\alpha_j^*,\widehat{\theta}^*)$ de (3.16) nous donnent une approximation possible pour η petit d'une solution périodique du système linéaire adaptatif. Considérant cette solution comme caractérisant le régime permanent, nous pouvons évaluer les propriétés de ce régime.
2. L'étude du déterminant (3.18) et des valeurs propres de $A(\widehat{\theta}^*)$ et $\frac{\partial E}{\partial\theta}(\alpha_j^*,\widehat{\theta}^*)$ nous permet de conclure si l'approximation ci-dessus est valide et si le régime permanent est attractif ou répulsif.

Enfin pour connaitre approximativement le comportement des solutions pour des valeurs de $\widehat{\theta}(k)$ telles que le contrôleur linéaire gelé associé soit stabilisant, nous appliquerons le résultat de moyennisation suivant [43, 34, 7] :

Definition 5 *On appelle domaine de stabilité du contrôleur linéaire gelé associé, l'ensemble $\mathcal{E}$ des valeurs de $\widehat{\theta}$ telles que le contrôleur linéaire gelé associé soit strictement stabilisant, i.e. :*

$$\mathcal{E} \ = \ \left\{\widehat{\theta}\,\middle|\,\left\|A(\widehat{\theta})\right\|\leq\rho<1\right\} \ . \tag{3.20}$$

Proposition 15 *Supposons que v satisfasse (3.12). Pour toute solution $\{(X(k),\widehat{\theta}(k))\}$ de (3.8), si $\widehat{\theta}(k)$ appartient à $\mathcal{E}$ pour tout k de l'intervalle $[k_0,k_1]$, k_0 et k_1 étant fini, alors pour η suffisament petit, il existe θ_{moy_0} tel que, en définissant la suite $\{\theta_{\mathrm{moy}}(k)\}$ comme solution de :*

$$\theta_{\mathrm{moy}}(k+1) \ = \ \theta_{\mathrm{moy}}(k) \ + \ \frac{\eta}{M}\,E(0,\theta_{\mathrm{moy}}(k)) \ , \quad \theta_{\mathrm{moy}}(0) \ = \ \theta_{\mathrm{moy}_0} \tag{3.21}$$

avec E défini en (3.16), on ait :

$$\begin{aligned} \|X(k)-X(k,0,\theta_{\mathrm{moy}}(k))\| \ &\leq \ \left(\frac{1+\rho}{2}\right)^{k-k_0}\Gamma_1(\eta\,,\,X(k_0)) \ + \ \eta\,\Gamma_2(\eta,X(k_0)) \\ \left|\widehat{\theta}(k)-\theta_{\mathrm{moy}}(k)\right| \ &\leq \ \Gamma_3(\eta,X(k_0)) \end{aligned} \tag{3.22}$$

où Γ_1, Γ_2 et Γ_3 sont des fonctions positives avec $\Gamma_3(0,\cdot)=0$ et $X(k,0,\theta)$ est donné en (3.13).

3.2 Présence d'une perturbation exogène bornée

Nous allons illustrer l'utilisation de ces outils en étudiant, pour un cas particulier, l'effet de diverses modifications du contrôleur adaptatif lorsqu'on est en présence de perturbations exogènes bornées, i.e. dans le cas où le système à commander avant transformation est :

$$y_p(k+1) \;=\; a\,y_p(k) \;+\; u_p(k) \;+\; d(k) \tag{3.23}$$

où $\{d(k)\}$ est la perturbation exogène. Pour donner un sens au régime permanent, nous supposerons que cette perturbation est périodique, et précisément :

$$d(k) \;=\; \Re\left\{d z_d^k\right\} \quad , \qquad \left|z_d^M\right| = 1 \;, \tag{3.24}$$

$\Re$ dénotant la partie réelle. Dans ce cas particulier, $\Re\{z_d\}$ représente l'*autocorrélation* de la suite $\{d(k)\}$, au sens suivant :

$$\Re\{z_d\} \;=\; \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{M-1} d(k)d(k-1)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{M-1} d(k)^2} \;. \tag{3.25}$$

Adoptons comme objectif de commande le fait que la sortie y_p du système à commander tende vers une sortie désirée y_d que l'on supposera constante pour simplifier nos calculs :

$$y_d(k) \;=\; y_d \;. \tag{3.26}$$

Pour une estimation $\widehat{\theta}(k)$ du paramètre, la suite $\{u_{\mathrm{bf}}(k)\}$ est alors donnée par :

$$u_{\mathrm{bf}}(k) \;=\; \left(1 + f(\widehat{\theta}(k)) - \widehat{\theta}(k)\right)\, y_d \;. \tag{3.27}$$

Nous évaluerons la qualité du régime permanent en étudiant si possible le mode de convergence vers ce régime et en calculant les valeurs moyenne I_m, quadratique moyenne I_2 et supérieure I_∞ de l'erreur de poursuite :

$$\begin{aligned}
I_2 \;&\stackrel{\mathrm{def}}{=}\; \limsup_{k\to+\infty} \left|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(y_p(i) - y_d(i))\right| \;, \\
I_2 \;&\stackrel{\mathrm{def}}{=}\; \limsup_{k\to+\infty} \left|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(y_p(i) - y_d(i))^2\right| \;, \\
I_\infty \;&\stackrel{\mathrm{def}}{=}\; \limsup_{k\to+\infty} |y_p(k) - y_d(k)| \;.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

3.2.1 Contrôleur adaptatif sans modification

Appliquons au système à commander (3.23) le contrôleur adaptatif (3.3),(3.27) sans autre modification que la projection et la normalisation – en particulier $S(q^{-1}) = 1$ –, i.e.

$$y(k) \;=\; y_p(k) \quad , \qquad u_p(k) \;=\; u(k) \;. \tag{3.29}$$

Dans le sous ensemble $\mathcal{S}(k)$ de l'espace d'état défini en (3.4), ces modifications sont sans effets et le système bouclé s'écrit sous forme standard :

$$\left.\begin{array}{rcl} x(k+1) & = & \left[a - f(\widehat{\theta}(k))\right] x(k) \;+\; \left[1 + f(\widehat{\theta}(k)) - \widehat{\theta}(k)\right] x_d \;+\; \underline{d}(k) \\ \widehat{\theta}(k+1) & = & \widehat{\theta}(k) \;+\; \eta\, \dfrac{x(k)\left(\underline{d}(k) - x(k)\,(\widehat{\theta}(k) - a)\right)}{1 + \eta\, x(k)^2} \end{array}\right\} \tag{3.30}$$

avec :

$$x \;=\; \frac{y}{\sqrt{r\eta}} \quad , \qquad x_d \;=\; \frac{y_d}{\sqrt{r\eta}} \quad , \qquad \underline{d} \;=\; \frac{d}{\sqrt{r\eta}} \tag{3.31}$$

3.2.1.1 Analyse

Puisque d'après (1.5) $1 + f(\widehat{\theta}) - \widehat{\theta}$ est strictement positif, la suite $\{ubf(k)\}$, définie en (3.27), satisfait la condition d'excitation persistente (1.37) si $y_d \neq 0$. On conclut avec la Proposition 4 que, dans le cas idéal, i.e. $d = 0$, on a un attracteur global exponentiellement stable. Nous allons mettre en évidence que cette propriété est perdue lorsque le *rapport signal sur bruit* $\frac{|y_d|}{|d|}$ est trop petit.

D'après la Proposition 12, il existe une solution bornée sur $]-\infty, +\infty[$ au système (3.30) gelé en $\widehat{\theta}$ si et seulement si :

$$f(\widehat{\theta}) \;\neq\; a \;-\; z_d \tag{3.32}$$

et, lorsque $y_d \neq 0$,

$$f(\widehat{\theta}) \;\neq\; a \;-\; 1\;. \tag{3.33}$$

Dans ce cas, elle s'écrit :

$$x(k, \alpha_1, \alpha_2, \widehat{\theta}) \;=\; \Re\left\{\frac{\underline{d}\, z_d^k}{z_d + f(\widehat{\theta}) - a}\right\} \;+\; \frac{1 + f(\widehat{\theta}) - \widehat{\theta}}{1 + f(\widehat{\theta}) - a}\, x_d \;+\; \alpha_1\,(-1)^k \;+\; \alpha_2 \tag{3.34}$$

où $\alpha_1 \neq 0$ si et seulement si $f(\widehat{\theta}) - a = 1$ et $\alpha_2 \neq 0$ si et seulement si $y_d = 0$ et $f(\widehat{\theta}) - a = -1$. Elle est exponentiellement stable si et seulement si $|f(\widehat{\theta}) - a| < 1$.

La fonction E définie en (3.16) s'écrit :

$$E(\alpha_1, \alpha_2, \widehat{\theta}) \;=\; \sum_{k=0}^{M-1} x(k, \alpha_1, \alpha_2, \widehat{\theta})\left(\underline{d}(k) - x(k, \alpha_1, \alpha_2, \widehat{\theta})\,(\widehat{\theta} - a)\right)\;. \tag{3.35}$$

L'application du Théorème de Parseval nous donne plus explicitement, si $z_d \neq \pm 1$ par exemple,

$$\frac{E(\alpha_1, \alpha_2, \widehat{\theta})}{M} = \frac{|\underline{d}|^2(\Re\{z_d\} + f(\widehat{\theta}) - \widehat{\theta})}{2|z_d + f(\widehat{\theta}) - a|^2} - \left(\frac{1 + f(\widehat{\theta}) - \widehat{\theta}}{1 + f(\widehat{\theta}) - a}\right)^2 x_d^2(\widehat{\theta} - a) - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\,(\widehat{\theta} - a) \tag{3.36}$$

où, rappellons-le la, synthèse$f$ est une fonction régulière croissante, donc inversible, satisfaisant :

$$|f(\theta) - \theta| \;\leq\; 1 - \varepsilon \;<\; 1\;. \tag{3.37}$$

Les seules solutions périodiques du système gelé qui peuvent se prolonger en solutions périodiques du système (3.30) sont, d'après la Proposition 13, celles associées à $\widehat{\theta}^*$, α_1^* et α_2^* vérifiant :

$$E(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \widehat{\theta}^*) \;=\; 0 \,. \tag{3.38}$$

Du fait de la définition de α_1 et α_2, il y a trois cas à considérer :

<u>Cas 1 : $f(\widehat{\theta}^*) - a \neq \pm 1$</u> alors $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ et (3.38) donne une équation en $\widehat{\theta}^*$, par exemple si $z_d \neq \pm 1$:

$$E(0, 0, \widehat{\theta}^*) \;=\; \frac{|\underline{d}|^2(\Re\{z_d\} + f(\widehat{\theta}^*) - \widehat{\theta}^*)}{2|z_d + f(\widehat{\theta}^*) - a|^2} - \left(\frac{1 + f(\widehat{\theta}^*) - \widehat{\theta}^*}{1 + f(\widehat{\theta}^*) - a}\right)^2 x_d^2(\widehat{\theta}^* - a) \;=\; 0 \,. \tag{3.39}$$

Dans le cas où il n'y aurait qu'une solution $\widehat{\theta}^*$ à cette équation, puisqu'elle doit vérifier $f(\widehat{\theta}^*) - a \neq \pm 1$, le rapport signal sur bruit $\frac{|y_d|}{|d|}$ satisfait :

$$\frac{y_d^2}{|d|^2} \;=\; \frac{x_d^2}{|\underline{d}|^2} \;\neq\; \frac{(1 \pm 1)^2\,(\Re\{z_d\} + a \pm 1 - f^{-1}(a \pm 1))}{4\,(1 \pm \Re\{z_d\})\,(1 \pm 1 + a - f^{-1}(a \pm 1))^2\,(f^{-1}(a \pm 1) - a)} \,. \tag{3.40}$$

Pour $y_d \neq 0$ et $|d| = 0$, cas de la Proposition 3, il y a une seule solution $\widehat{\theta}^* = a$.

Pour $y_d = 0$ et $|d| \neq 0$, les seules solutions possibles sont celles de :

$$\Re\{z_d\} \;=\; \widehat{\theta} \;-\; f(\widehat{\theta}) \,. \tag{3.41}$$

Du fait de (3.37), celles-ci ne peuvent exister que si l'autocorrélation de la perturbation vérifie :

$$|\Re\{z_d\}| \;\leq\; 1 - \varepsilon \,. \tag{3.42}$$

La synthèse joue alors un rôle de premier ordre. Par exemple, si :

$$(1 + \varepsilon)\pi\, |\Re\{z_d\}| \;\leq\; 1 \tag{3.43}$$

on peut prendre la synthèse suivante – en notant que la fonction $x + \frac{1}{(1+\varepsilon)\pi} \sin((1 + \varepsilon)\pi x)$ est inversible – :

$$f(\theta) \;+\; \frac{1}{(1 + \varepsilon)\pi} \sin((1 + \varepsilon)\pi f(\theta)) \;=\; \theta \,. \tag{3.44}$$

Dans ce cas, pour tout intervalle de longueur 2, on peut trouver $\widehat{\theta}^*$, solution de (3.41), tel que $f(\widehat{\theta}^*)$ soit dans cet intervalle et :

$$\frac{\partial E}{\partial \widehat{\theta}}(0, 0, \widehat{\theta}^*) \;<\; 0 \,. \tag{3.45}$$

Alors, d'après la Proposition 14, on en déduit que, pour η suffisament petit, le système en boucle fermée de forme standard (3.30) a au moins une solution périodique exponentiellement stable approximée par :

$$\left.\begin{array}{rcl} x(k) & \approx & \Re\left\{\frac{\underline{d}\, z_d^k}{z_d + f(\widehat{\theta}^*) - a}\right\} \\ \widehat{\theta}(k) & \approx & \widehat{\theta}^* \end{array}\right\} \,, \tag{3.46}$$

avec $f(\widehat{\theta}^*) = \widehat{\theta}^* - \Re\{z_d\} \in]a-1, a+1[$. En conclusion, si le rapport signal sur bruit est nul mais l'autocorrélation de la perturbation est grande, il n'y a pas de solutions périodiques telles que $f(\widehat{\theta}^*) - a \neq \pm 1$. Par contre si cette autocorrélation est faible, un choix approprié de la synthèse f peut garantir l'existence de solutions périodiques exponentiellement stables.

Pour des valeurs intermédiaires du rapport signal sur bruit $\frac{|y_d|}{|d|}$, les solutions $\widehat{\theta}^*$ vérifient :

$$\widehat{\theta}^* - a \;=\; \frac{|\underline{d}|^2(\Re\{z_d\} + f(\widehat{\theta}^*) - \widehat{\theta}^*)}{2|z_d + f(\widehat{\theta}^*) - a|^2 x_d^2} \left(\frac{1 + f(\widehat{\theta}^*) - a}{1 + f(\widehat{\theta}^*) - \widehat{\theta}^*} \right)^2 . \tag{3.47}$$

Donc $\widehat{\theta}^* - a$ doit avoir le même signe que $\Re\{z_d\} + f(\widehat{\theta}^*) - \widehat{\theta}^*$. De plus, puisque :

- $E(0,0,a)$ est du signe de $\Re\{z_d\} + f(a) - a$,
- la fonction $E(0,0,\widehat{\theta})$ a une seule discontinuité en $f(\widehat{\theta}) = a - 1$ pour laquelle le signe reste positif,
- et :

$$\lim_{\widehat{\theta} \to +\infty} E(0,0,\widehat{\theta}) \;=\; 0_- \quad , \qquad \lim_{\widehat{\theta} \to -\infty} E(0,0,\widehat{\theta}) \;=\; 0_+ \;, \tag{3.48}$$

il y a un nombre impair de solution $\widehat{\theta}^*$. D'après la Proposition 14, on en déduit que pour $f(\widehat{\theta}^*) - a \neq \pm 1$ et pour η suffisament petit, le système en boucle fermée de forme standard (3.30) a au moins une solution périodique approximée par :

$$\left. \begin{array}{rcl} x(k) & \approx & \Re\left\{ \frac{\underline{d}\, z_d^k}{z_d + f(\widehat{\theta}^*) - a} \right\} \;+\; \left(1 + \frac{(a - \widehat{\theta}^*)}{1 + f(\widehat{\theta}^*) - a} \right) x_d \\ \widehat{\theta}(k) & \approx & \widehat{\theta}^* \end{array} \right\} . \tag{3.49}$$

En particulier, pour $\Re\{z_d\} + f(a) - a$ strictement négatif, il y en a au moins une dans l'intervalle défini par $f(\widehat{\theta}) = a - 1$ et $\widehat{\theta} = a$. Celle-ci est telle que (3.45) est vérifiée et, puisque f est supposée croissante :

$$-1 \;<\; f(\widehat{\theta}^*) - a \;\leq\; f(a) - a \;\leq\; 1 - \varepsilon \;. \tag{3.50}$$

Il lui correspond donc une solution périodique exponentiellement stable. Une synthèse f telle que $f(\theta) - \theta$ est le plus négatif possible pour tout θ – placement de pôle avec a_m proche de 1 par exemple – est favorable à ce cas. Notons que, si la sortie désirée était haute fréquence, au lieu de basse fréquence comme ici, on aurait le même comportement mais cette fois avec $f(\theta) - \theta$, le plus positif possible. Par ailleurs, de nouveau, si l'autocorrélation de la perturbation est trop grande, i.e. $\Re\{z_d\} > 1 - \varepsilon$, ce cas ne pourra avoir lieu.

Pour le cas où $\Re\{z_d\} + f(a) - a$ est positif, nous pensons que, pour toute synthèse f, l'équation (3.39) n'a qu'une seule solution $\widehat{\theta}^*$. Pour cette solution, (3.45) est vérifiée et $f(\widehat{\theta}^*) - a < 1$ si et seulement si le rapport signal sur bruit est grand, i.e. :

$$\frac{x_d^2}{|\underline{d}|^2} \;>\; \frac{(\Re\{z_d\} + a + 1 - f^{-1}(a+1))}{(1 + \Re\{z_d\})\,(2 + a - f^{-1}(a+1))^2\,(f^{-1}(a+1) - a)} \;. \tag{3.51}$$

L'unique solution périodique associée est donc exponentiellement stable si le rapport signal sur bruit est suffisament grand pour satisfaire cette inégalité, instable si le rapport signal sur bruit est trop petit.

<u>Cas 2 : $f(\widehat{\theta}^*) - a = -1$ et $y_d = 0$</u> alors $\alpha_1 = 0$ et (3.38) donne une équation en α_2, par exemple si $z_d \neq \pm 1$:

$$\alpha_2^{*2} = \frac{|\underline{d}|^2 \left(\Re\{z_d\} + a - 1 - f^{-1}(a-1)\right)}{4\left(1 - \Re\{z_d\}\right)\left(f^{-1}(a-1) - a\right)} . \tag{3.52}$$

Puisque $f^{-1}(a-1) - a < 0$, ceci n'est donc possible que si $\Re\{z_d\} + a - 1 - f^{-1}(a-1)$ est négatif – cas d'une autocorrélation de la perturbation très négative – . Dans ce cas, il y a deux valeurs pour α_2^* et le déterminant (3.18) est :

$$\begin{vmatrix} 0 & -M\,\dfrac{\partial f}{\partial \theta}(f^{-1}(a-1))\,\alpha_2^* \\ 2\,M\,\alpha_2^*\,(a - f^{-1}(a-1)) & \star \end{vmatrix} \neq 0 . \tag{3.53}$$

D'après la Proposition 14, on en déduit que, pour ce cas de rapport signal sur bruit nul, si η est suffisament petit et $Re\{z_d\} + a - 1 - f^{-1}(a-1)$ est négatif, le système en boucle fermée, de forme standard (3.30), a deux solutions périodiques approximées par :

$$\left.\begin{array}{rcl} x(k) & \approx & \Re\left\{\frac{d\,z_d^k}{z_d - 1}\right\} \pm \sqrt{\frac{|\underline{d}|^2(Re\{z_d\}+a-1-f^{-1}(a-1))}{4(1-\Re\{z_d\})(f^{-1}(a-1)-a)}} \\ \widehat{\theta}(k) & \approx & f^{-1}(a-1) \end{array}\right\} . \tag{3.54}$$

Il est important de noter que la composante $\widehat{\theta}(k)$ de ces solutions évoluent dans un voisinage de la frontière du domaine $\mathcal{E}$ de stabilité donné par le contrôleur linéaire gelé en $\widehat{\theta}$:

$$u(k, \widehat{\theta}) = -f(\widehat{\theta})\,y(k) + \left[1 + f(\widehat{\theta}) - \widehat{\theta}\right] y_d . \tag{3.55}$$

<u>Cas 3 : $f(\widehat{\theta}^*) - a = 1$</u> alors $\alpha_2 = 0$ et (3.38) donne une équation en α_1, par exemple si $z_d \neq \pm 1$:

$$\alpha_1^{*2} = \frac{|\underline{d}|^2 \left(Re\{z_d\} + a + 1 - f^{-1}(a+1)\right)}{4\left(f^{-1}(a+1) - a\right)\left(1 + \Re\{z_d\}\right)} - \left(\frac{2 + a - f^{-1}(1+a)}{2}\right)^2 x_d^2 . \tag{3.56}$$

Ceci n'est donc possible que si $Re\{z_d\} + a + 1 - f^{-1}(a+1)$ est positif – cas d'une autocorrélation très positive – . Aussi le rapport signal sur bruit ne doit pas satisfaire (3.51), i.e., comme nous l'avons vu ci-dessus, une solution périodique instable doit exister. Il y a alors deux valeurs pour α_1^* et le déterminant (3.18) est, avec M égal à la période de la suite $\{d(k)\}$ si elle est paire, le double sinon,

$$\begin{vmatrix} 0 & -M\,(-1)^{M-1}\,\dfrac{\partial f}{\partial \theta}(f^{-1}(1+a))\,\alpha_1^* \\ 2\,M\,\alpha_1^*\,(2 + a - f^{-1}(1+a)) & \star \end{vmatrix} \neq 0 . \tag{3.57}$$

D'après la Proposition 14, si $Re\{z_d\} + a + 1 - f^{-1}(a+1)$ est positif, on en déduit encore que, pour un rapport signal sur bruit petit et pour η suffisament petit, le système en boucle fermée de forme standard (3.30) a deux solutions périodiques approximées par :

$$\left.\begin{array}{rcl} x(k) & \approx & \Re\left\{\frac{d\,z_d^k}{z_d + 1}\right\} + \left(1 + \frac{(a - f^{-1}(1+a))}{2}\right) x_d \\ & & \pm\,(-1)^k \sqrt{\frac{|\underline{d}|^2(Re\{z_d\}+a+1-f^{-1}(a+1))}{4(f^{-1}(a+1)-a)(1+\Re\{z_d\})} - \left(\frac{2+a-f^{-1}(1+a)}{2}\right)^2 x_d^2} \\ \widehat{\theta}(k) & \approx & f^{-1}(1+a) \end{array}\right\} . \tag{3.58}$$

De nouveau la composante $\widehat{\theta}(k)$ de ces solutions évoluent dans un voisinage de la frontière du domaine $\mathcal{E}$ de stabilité du contrôleur linéaire (3.55) gelé en $\widehat{\theta}$.

Cette analyse nous permet de conclure que, pour η petit et y_d non nul,

— si $\Re\{z_d\} + f(a) - a$ est négatif, i.e. la perturbation est plutôt haute fréquence ou la synthèse place un pôle très positif, le système en boucle fermée a au moins une solution périodique exponentiellement stable. Les valeurs des critères de performance en poursuite qui lui sont associées sont approximables par, si $z_d \neq \pm 1$,

$$\begin{aligned} I_m &\approx \left|\frac{(a-\widehat{\theta}^*)}{1+(f(\widehat{\theta}^*)-a)}\right| |y_d| \,, \\ I_2 &\approx \frac{1}{2}\frac{|d|^2}{|z_d+f(\widehat{\theta}^*)-a|^2}\left(1+\frac{(\Re\{z_d\}+f(\widehat{\theta}^*)-\widehat{\theta}^*)(\widehat{\theta}^*-a)}{(1+f(\widehat{\theta}^*)-\widehat{\theta}^*)^2}\right) \,, \\ I_\infty &\approx \left|\frac{d}{z_d+f(\widehat{\theta}^*)-a}\right|\left(1+\sqrt{\frac{(\Re\{z_d\}+f(\widehat{\theta}^*)-\widehat{\theta}^*)(\widehat{\theta}^*-a)}{2(1+f(\widehat{\theta}^*)-\widehat{\theta}^*)^2}}\right) \,. \end{aligned} \tag{3.59}$$

où $\widehat{\theta}^*$, donné par (3.47), est dans l'intervalle défini par $f(\widehat{\theta}) = a - 1$ et $\widehat{\theta} = a$ et d'autant plus proche de a que le rapport signal sur bruit $\frac{y_d^2}{|d|^2}$ est grand.

— On a le même résultat si $\Re\{z_d\} + f(a) - a$ est positif et le rapport signal sur bruit est suffisament grand pour vérifier :

$$\frac{y_d^2}{|d|^2} > \frac{(\Re\{z_d\}+a+1-f^{-1}(a+1))}{(1+\Re\{z_d\})\left(2++a-f^{-1}(a+1)\right)^2\left(f^{-1}(a+1)-a\right)} \,. \tag{3.60}$$

— Si le rapport signal sur bruit est petit, la solution périodique des cas précédents devient instable. Par contre il apparait de nouvelles solutions périodiques dont les valeurs des critères de performance en poursuite associées sont approximables par, si $z_d \neq \pm 1$,

$$\begin{aligned} I_m &\approx \left|\frac{(a-f^{-1}(1+a))}{2}\right| |y_d| \,, \\ I_2 &\approx \frac{|d|^2}{4\left(f^{-1}(a+1)-a\right)} \,, \\ I_\infty &\approx \left|\frac{d}{2(1+\Re\{z_d\})}\right| + \left|\frac{a-f^{-1}(1+a)}{2}\right| |y_d| \\ &\quad + \sqrt{\tfrac{|d|^2(Re\{z_d\}+a+1-f^{-1}(a+1))}{4(f^{-1}(a+1)-a)(1+\Re\{z_d\})} - \left(\tfrac{2+a-f^{-1}(1+a)}{2}\right)^2 y_d^2} \,. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Comparé au cas où le rapport signal sur bruit est grand, la valeur quadratique moyenne est meilleure mais la valeur supérieure est augmentée et ce d'autant plus que ce rapport est plus faible. Aussi, ces solutions ayant leur composante $\widehat{\theta}(k)$ évoluant dans un voisinage de la frontière du domaine de stabilité du contrôleur linéaire (3.55) gelé, le régime transitoire vers ces solutions est de type *intermittent* [8], la phase laminaire correspondant aux instants où $\widehat{\theta}(k)$ est dans le domaine stabilisant, la phase de relaminarisation résultant de l'accroissement du rapport signal sur bruit $\frac{y(k)}{d(k)}$ provoqué par le passage de $\widehat{\theta}(k)$ dans le domaine déstabilisant. Ce phénomène très gênant a été décrit par exemple dans [1] et analysé dans [38, 35].

3.2.1.2 Conclusion

Le régime permanent dépend essentiellement du rapport signal sur bruit, de la synthèse et de l'autocorrélation de la perturbation. Un petit rapport signal sur bruit est défavorable car le régime transitoire est alors le plus souvent de type intermittent, surtout si l'autocorrélation de la perturbation est grande en valeur absolue. Il apparait aussi que la synthèse doit dépendre des signaux exogènes. En général, elle doit placer un pôle de même signe que l'autocorrélation de la sortie désirée – ici très positif – , ceci étant d'autant plus efficace que le rapport signal sur bruit est plus grand et que l'autocorrélation $\Re\{z_d\}$ de la perturbation est moins positive, i.e. de même signe que celle de la sortie désirée.

D'après notre analyse, nous voyons que, pour un contrôleur adaptatif sans modification, les *perturbations les plus défavorables* pour une sortie désirée constante sont celles ayant une autocorrélation proche de 1 – celle de la sortie désirée – et conduisant à un petit rapport signal sur bruit.

Enfin, mentionnons que le lecteur trouvera dans [40] une étude du cas où la sortie désirée n'est pas constante.

3.2.2 Contrôleur adaptatif avec modèle interne

La première idée pour améliorer les performances du contrôleur non modifié est d'introduire un modèle interne – technique de commande linéaire visant à annuler l'effet de la perturbation –. La suite $\{y_d(k)\}$ étant constante, prenons :

$$\begin{array}{rclrclrcl} U_y(q^{-1}) &=& 1 & V_y(q^{-1}) &=& 0 & W_y(q^{-1}) &=& 0 \\ U_u(q^{-1}) &=& 1 & V_u(q^{-1}) &=& 0 & W_u(q^{-1}) &=& 1 \\ \end{array}$$
$$T(q^{-1}) = S(q^{-1}) = 1 - q^{-1} \tag{3.62}$$

pour définir la transformation du système à commander introduite en (2.14). Les suites $\{u(k)\}$ et $\{y(k)\}$ sont alors données par :

$$y(k) = y_p(k) - y_d \quad , \qquad u_p(k) = u(k) + u_p(k-1) \ , \tag{3.63}$$

les suites $\{u_p(k)\}$ et $\{y_p(k)\}$ étant celles du système à commander que l'on suppose toujours décrit par (voir (3.23)) :

$$y_p(k+1) = a\, y_p(k) + u_p(k) + d(k) \tag{3.64}$$

À partir du modèle de synthèse (2.16), la forme standard du système bouclé restreint au sous ensemble $S(k)$, défini en (3.4), obtenue dans ce cas est le système du troisième ordre suivant :

$$\left.\begin{array}{rcl} x(k+1) &=& \left[\widehat{\theta}(k) - f(\widehat{\theta}(k))\right] x(k) + \left[a - \widehat{\theta}(k)\right] x_s(k) + \underline{d}_s(k) \\ x_s(k+1) &=& \left[\widehat{\theta}(k) - f(\widehat{\theta}(k)) - 1\right] x(k) + \left[a - \widehat{\theta}(k)\right] x_s(k) + \underline{d}_s(k) \\ \widehat{\theta}(k+1) &=& \widehat{\theta}(k) + \eta\, \dfrac{x_s(k)\left(\underline{d}_s(k) - x_s(k)\,(\widehat{\theta}(k) - a)\right)}{1 + \eta\, x_s(k)^2} \end{array}\right\} \tag{3.65}$$

avec :

$$x = \frac{y}{\sqrt{r\eta}} \quad , \qquad \underline{d} = \frac{d}{\sqrt{r\eta}} \quad , \qquad \underline{d}_s(k) = \underline{d}(k) - \underline{d}(k-1) \; . \tag{3.66}$$

3.2.2.1 Analyse

D'après la Proposition 12, il existe une solution bornée sur $]-\infty, +\infty[$ au système (3.65) gelé en $\widehat{\theta}$ si et seulement si :

$$z_d^2 \;+\; z_d\,(f(\widehat{\theta}) - a) \;+\; a - \widehat{\theta} \;\neq\; 0 \; . \tag{3.67}$$

Dans ce cas, elle s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x(k,\alpha,\widehat{\theta}) \\ x_s(k,\alpha,\widehat{\theta}) \end{pmatrix} = \Re\left\{ \frac{(z_d-1)\underline{d}}{z_d^2 + z_d(f(\widehat{\theta})-a) + a - \widehat{\theta}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\overline{z_d} \end{pmatrix} z_d^k + \alpha \begin{pmatrix} a-\widehat{\theta} \\ \lambda + f(\widehat{\theta}) - \widehat{\theta} \end{pmatrix} \lambda^k \right\} \tag{3.68}$$

où λ est une racine de :

$$\lambda^2 \;+\; \lambda\,(f(\widehat{\theta}) - a) \;+\; a - \widehat{\theta} \;=\; 0 \tag{3.69}$$

et α est un nombre complexe non nul si et seulement si :

$$1 + 2a - \widehat{\theta} - f(\widehat{\theta}) = 0 \quad \text{ou} \quad a - \widehat{\theta} = 1 \; . \tag{3.70}$$

Elle est exponentiellement stable si et seulement si :

$$1 + 2a - \widehat{\theta} - f(\widehat{\theta}) \;>\; 0 \quad \text{et} \quad a - \widehat{\theta} \;<\; 1 \tag{3.71}$$

donc en particulier avec (3.37) si :

$$a \;-\; 1 \;<\; \widehat{\theta} \;<\; a \;+\; \frac{\varepsilon}{2} \; . \tag{3.72}$$

Si $z_d \neq \pm 1$, la fonction E définie en (3.16) est,

– <u>si $a - \widehat{\theta} = 1$</u>, cas où λ est un complexe de module 1,

$$\frac{E(\alpha,\widehat{\theta})}{M} = \frac{|\underline{d}|^2 |z_d - 1|^2\,(1 - \Re\{z_d\})\,(f(a-1) - a + 2 + 2\Re\{z_d\})}{2|z_d^2 + z_d(f(a-1) - a) + 1|^2} + \frac{1}{2}\,|\alpha|^2\,(a - f(a-1))^2 \; , \tag{3.73}$$

– <u>si $1 + 2a - \widehat{\theta} - f(\widehat{\theta}) = 0$</u>, cas où $\lambda = -1$,

$$\frac{E(\alpha,\widehat{\theta})}{M} = \frac{|\underline{d}|^2 |z_d - 1|^2\,(1 - \Re\{z_d\})\left(f(\widehat{\theta}) - \widehat{\theta} + 1 + 2\Re\{z_d\}\right)}{2|z_d^2 + z_d(f(\widehat{\theta}) - a) + a - \widehat{\theta}|^2} - |\alpha|^2\,(-1 + f(\widehat{\theta}) - \widehat{\theta}))^2\,(\widehat{\theta} - a) \; , \tag{3.74}$$

– <u>sinon</u> $\alpha = 0$ et

$$\frac{E(0,\widehat{\theta})}{M} = \frac{|\underline{d}|^2\,(1 - \Re\{z_d\})^2\left(f(\widehat{\theta}) - \widehat{\theta} + 1 + 2\Re\{z_d\}\right)}{|z_d^2 + z_d(f(\widehat{\theta}) - a) + a - \widehat{\theta}|^2} \; . \tag{3.75}$$

Il n'y a de solutions à $E(0,\widehat{\theta}) = 0$ que s'il y a des solutions $\widehat{\theta}^*$ à – comparer avec (3.41) – :

$$1 \, + \, 2\,\Re\{z_d\} \, = \, \widehat{\theta} \, - \, f(\widehat{\theta}) \; . \tag{3.76}$$

Du fait de (3.37), ceci n'est possible que pour une autocorrélation de la perturbation faible et négative :

$$-\,1 \, + \, \frac{\varepsilon}{2} \, \leq \, \Re\{z_d\} \, \leq \, -\frac{\varepsilon}{2} \; . \tag{3.77}$$

Dans ce cas, la synthèse joue encore un rôle essentiel. Par exemple pour des autocorrélations autour de $-\frac{1}{2}$, on peut trouver des synthèses telles qu'il existe un régime stationnaire attractif sous forme d'une solution périodique exponentiellement stable. Les valeurs des critères de performance en poursuite sont alors approximées par :

$$\begin{aligned}
I_m \;&\approx\; 0 \; , \\
I_2 \;&\approx\; \frac{1}{2}\left|\frac{(z_d-1)d}{z_d^2+z_d(f(\widehat{\theta}^*)-a)+a-\widehat{\theta}^*}\right|^2 \; , \\
I_\infty \;&\approx\; \left|\frac{(z_d-1)d}{z_d^2+z_d(f(\widehat{\theta}^*)-a)+a-\widehat{\theta}^*}\right| \; .
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Considérons le cas où $f(a-1)-a+2+2\Re\{z_d\}$ est négatif. C'est celui d'une autocorrélation de la perturbation suffisament négative, par exemple, pour une synthèse de placement de pôle,

$$\Re\{z_d\} \, \leq \, -\frac{1-a_m}{2} \; . \tag{3.79}$$

Il existe alors une solution complexe α^* à $E\,(\alpha,(a-1)) = 0$. Seul le module de α^* est déterminé et le déterminant (3.18) est nul dans ce cas. On ne peut donc conclure à l'existence d'un régime stationnaire. Cependant, s'il existe, le régime transitoire correspondant est probablement de type intermittent et les valeurs des critères de performance en poursuite associées sont approximées par :

$$\begin{aligned}
I_m \;&\approx\; 0 \; , \\
I_2 \;&\approx\; \frac{1}{2}\left|\frac{(z_d-1)d\,[(f(a-1)-a)^2+(1-\Re\{z_d\})(f(a-1)-a)+2(1-\Re\{z_d\}^2]}{(z_d^2+z_d(f(a-1)-a)+1)(a-f(a-1))}\right|^2 \; , \\
I_\infty \;&\approx\; \left|\frac{(z_d-1)d}{z_d^2+z_d(f(a-1)-a)+1}\right|\left(1 \, + \, \frac{\sqrt{(1-\Re\{z_d\})\,(f(a-1)-a+2+2\Re\{z_d\})}}{|a-f(a-1)|}\right) \; .
\end{aligned} \tag{3.80}$$

En dernier lieu, considérons le cas où $f(\widehat{\theta}^*)-\widehat{\theta}^*+1+2\Re\{z_d\}$ est positif, avec

$$\widehat{\theta}^* \, + \, f(\widehat{\theta}^*) \, = \, 1 \, + \, 2\,a \; , \tag{3.81}$$

par exemple :

$$\Re\{z_d\} \, \geq \, -\frac{1-a_m}{2} \tag{3.82}$$

lorsqu'une synthèse de placement de pôle est utilisée. Ce cas correspond donc à une autocorrélation plutôt positive. Cette fois, il existe deux solutions réelles α^* à $E\left(\alpha, \widehat{\theta}^*\right) = 0$. Leur valeur absolue est d'autant plus faible que $f(\widehat{\theta}^*) - \widehat{\theta}^*$ est négatif, i.e. que la synthèse place un pôle plus positif. Aussi, en diagonalisant la matrice :

$$A(\widehat{\theta}^*) = \begin{pmatrix} \widehat{\theta}^* - f(\widehat{\theta}^*) & a - \widehat{\theta}^* \\ \widehat{\theta}^* - f(\widehat{\theta}^*) - 1 & a - \widehat{\theta}^* \end{pmatrix} \tag{3.83}$$

on peut voir que le déterminant (3.18) associé est de la forme :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \neq 0 \\ 0 & \neq 0 & \star \\ \neq 0 & \star & \star \end{vmatrix} \neq 0 \,. \tag{3.84}$$

Il existe donc une solution péridodique comme régime stationnaire correspondant. Le régime transitoire correspondant est probablement de type intermittent et les valeurs des critères de performance en poursuite associées sont approximées par :

$$\begin{aligned} I_m &\approx 0\,, \\ I_2 &\approx \frac{1}{2}\left|\frac{(z_d-1)d}{(z_d+1)(z_d+a-\widehat{\theta}^*)}\right|^2 \left(\frac{(1+\Re\{z_d\})(\widehat{\theta}^*-a+1-\Re\{z_d\})}{2(\widehat{\theta}^*-a)}\right)\,, \\ I_\infty &\approx \left|\frac{(z_d-1)d}{(z_d+1)(z_d+a-\widehat{\theta}^*)}\right| \left(1+\sqrt{\frac{(1-\Re\{z_d\})(a-\widehat{\theta}^*+1+\Re\{z_d\})}{4(\widehat{\theta}^*-a)}}\right)\,. \end{aligned} \tag{3.85}$$

3.2.2.2 Conclusion

Cette analyse nous permet de conclure que, dans le cas d'un modèle interne annulant la sortie désirée, constante ici, la sortie désirée n'intervient en particulier plus dans nos différents critères sur l'erreur de poursuite. Par contre, nous sommes amenés au cas peu favorable d'un rapport signal sur bruit nul avec le problème probable de régime transitoire de type intermittent, même pour des autocorrélations faibles de la perturbation. À l'opposé du cas sans modèle interne, plus cette autocorrélation est positive et moins grande est l'amplitude des parties explosives des intermittences, cet effet étant d'autant plus sensible que la synthèse place un pôle plus positif. Nous concluons que le modèle interne est intéressant si le rapport signal sur bruit est faible et s'il annule – approximativement – à la fois sortie désirée et perturbation. Il donne donc ses moins mauvais résultats dans le cas des perturbations les plus défavorables pour le contrôleur non modifié. En particulier, si $z_d = 1$, le modèle interne $1 - q^{-1}$ est aussi celui de la perturbation, i.e. $\underline{d}_s(k) \equiv 0$, et on est ramené au cas idéal. Si le rapport signal sur bruit est grand et la perturbation n'est pas assez réduite par le modèle interne – autocorrélation de la perturbation pas trop positive –, il conduit en général à un régime transitoire de type intermittent alors que le contrôleur sans modèle interne n'a pas ce problème justement dans ce cas. Par contre, les critères sur l'erreur de poursuite donnés par l'algorithme avec modèle interne seront meilleurs que ceux donnés par l'algorithme sans modification surtout lorsque le rapport signal sur bruit est petit. Nous en déduisons que le modèle interne est une bonne modification mais qui n'est pas suffisante. Il faut lui adjoindre une modification qui évitera les régimes transitoires de type intermittent.

3.2.3 Contrôleur adaptatif avec modèle interne et zone morte

Dans [38, 35], il a été mis en évidence sur un exemple que les phases explosives du phénomène d'intermittence résultent d'une dérive du paramètre estimé qui le conduit de la région où le contrôleur linéaire gelé correspondant est stabilisant à la région où ce contrôleur est déstabilisant. Pour faire disparaitre ce phénomène, il suffirait donc d'empêcher cette dérive. Mais, pour cela, il faut être capable de déceler quand elle a lieu. D'après la Proposition 15, cette dérive est approximativement décrite par le mouvement des solutions de (3.21), soit ici pour le contrôleur avec modèle interne :

$$\theta_{\mathrm{moy}}(k+1) \;=\; \theta_{\mathrm{moy}}(k) \;+\; \text{valeur moyenne de } \{y_s(k)\,(y_s(k+1) - u(k) - \theta_{\mathrm{moy}}(k)\,y_s(k))\} \tag{3.86}$$

où d'après (3.75) :

$$\text{valeur moyenne de } \left\{y_s(k)\,(y_s(k+1) - u(k) - \widehat{\theta}(k)\,y_s(k))\right\} \tag{3.87}$$

$$= \frac{|d|^2\,(1-\Re\{z_d\})^2\,(f(\theta_{\mathrm{moy}}(k)) - \theta_{\mathrm{moy}}(k) + 1 + 2\Re\{z_d\})}{|z_d^2 + z_d(f(\theta_{\mathrm{moy}}(k)) - a) + a - \theta_{\mathrm{moy}}(k)|^2}\,,$$

$$= \frac{|d|^2\,(1-\Re\{z_d\})^2(f(\theta_{\mathrm{moy}}(k))-\theta_{\mathrm{moy}}(k)+1+2\Re\{z_d\})}{(1-\Re\{z_d\})(f(\theta_{\mathrm{moy}}(k))+\theta_{\mathrm{moy}}(k)+1+2\Re\{z_d\}-a)^2+(1+\Re\{z_d\})(f(\theta_{\mathrm{moy}}(k))-\theta_{\mathrm{moy}}(k)-1+2\Re\{z_d\})^2}\,.$$

L'équation (3.86) n'est valable que tant que $\theta_{\mathrm{moy}}(k)$ reste dans le domaine $\mathcal{E}$ de stabilité du contrôleur linéaire gelé associé, soit ici que tant que les racines de :

$$z^2 \;+\; z\,(f(\theta_{\mathrm{moy}}(k)) - a) \;+\; a - \theta_{\mathrm{moy}}(k) \;=\; 0 \tag{3.88}$$

sont de module strictement inférieur à 1, i.e. :

$$1 \;>\; a - \theta_{\mathrm{moy}}(k) \;>\; \frac{1 + \theta_{\mathrm{moy}}(k) - f(\theta_{\mathrm{moy}}(k))}{2}\,. \tag{3.89}$$

Nous cherchons une modification telle que la mise à jour de $\widehat{\theta}(k)$ s'arrête justement lorsque $\widehat{\theta}(k)$ se rapproche trop de la frontière de ce domaine. Malheureusement il ne se passe rien de particulier pour les solutions de l'équation moyenne (3.86) au moment où elles franchissent cette frontière de $\mathcal{E}$ et pas plus pour le signal $y(k)$ qui, d'après la Proposition 15, peut être approximé par $\sqrt{r\eta}\,x(k,0,\theta_{\mathrm{moy}}(k))$ en (3.68).

Pour obtenir une méthode efficace pour arrêter l'adaptation, nous revenons sur la conception de l'algorithme d'adaptation. Après transformation, le système à commander vérifie :

$$y_s(k+1) \;=\; a\,y_s(k) \;+\; u(k) \;+\; d_s(k)\,. \tag{3.90}$$

On en déduit que, pour tout paramètre $\widehat{\theta}$, l'erreur d'observation associée,

$$e(k+1,\widehat{\theta}) \;=\; y_s(k+1) \;-\; \widehat{\theta}\,y_s(k) \;-\; u(k)\,, \tag{3.91}$$

ne sera pas nulle en général. Il est donc inutile de laisser l'algorithme d'adaptation chercher un paramètre qui annulerait cette erreur. On introduit alors la notion de *zone morte* : l'adapation est arrêtée lorsque l'erreur d'observation devient trop petite en valeur absolue. Ceci donne l'algorithme suivant à comparer avec (2.18) :

$$\left.\begin{array}{rcl} e(k) & = & y_s(k) - y_s(k-1)\widehat{\theta}(k-1) - u(k-1) \\ \widehat{\theta}_+(k-1) & = & \widehat{\theta}(k-1) + \dfrac{\alpha(k)}{\overline{y_s}(k-1)} \mathcal{Z}\left(e(k)\right) \overline{e}(k) \\ \widehat{\theta}(k) & = & \mathrm{Proj}\left(\widehat{\theta}_+(k-1)\right) \end{array}\right\} \tag{3.92}$$

où $\overline{\cdot}$ est la normalisation définie en (2.20) et la zone morte $\mathcal{Z}$ est donnée par [41] (voir aussi [10] :

$$\mathcal{Z}(e) = \sup\left\{1 - \frac{\Delta}{|e|}, 0\right\} . \tag{3.93}$$

3.2.3.1 Analyse

On a [33] :

Proposition 16 *Supposons l'existence d'un scalaire strictement positif ε et d'une valeur θ du paramètre tels que :*

1. pour tout k :

$$|y_s(k+1) - \theta\, y_s(k) - u(k)| \leq \Delta - \varepsilon , \tag{3.94}$$

2. la suite $\{\alpha(k)\}$ vérifient, avec des suites $\{\beta(k)\}$ et $\{P(k)\}$,

$$\alpha(k) = \kappa(k)\, \mathcal{Z}(e(k)) , \quad \kappa(k) = \frac{P(k-1)\overline{y_s}(k-1)^2}{r(k)+P(k-1)\overline{y_s}(k-1)^2} , \quad C \geq r(k) \geq 0 , \quad \beta(k) \geq 0$$

$$P_s \geq P(k) \geq (1 - \beta(k)P(k-1)\overline{y_s}(k-1)^2)\ P(k-1)$$

$$\beta(k) \leq \inf\left\{\frac{2-\kappa(k)-\varepsilon}{\mathcal{Z}(e(k))\,[1-\varepsilon\kappa(k)]}, \frac{[2-\varepsilon]\,[2-\mathcal{Z}(e(k))] - \kappa(k)\mathcal{Z}(e(k))}{[2-\mathcal{Z}(e(k))]\,[2-\mathcal{Z}(e(k)) - \varepsilon\kappa(k)\mathcal{Z}(e(k))]}\right\} \tag{3.95}$$

où P_s et $P(0)$ sont des réels strictement positifs.
Dans ce cas, l'algorithme (2.18) nous donne :

1. *la suite $\{\widehat{\theta}(k)\}$ est bornée,*
2. *la suite $\{\widehat{\theta}(k+1) - \widehat{\theta}(k)\}$ est de carrés sommables, et sommable si la suite $\{P(k-1)\overline{y_s}(k)\}$ est bornée.*
3. *la suite $\left\{\overline{y_s}(k+1) - \overline{u}(k) - \overline{y_s}(k)\widehat{\theta}(k+1)\right\}$ est sommable.*

L'un des points important mentionné dans cette Proposition est que, pour toute solution telle que la suite $\{\overline{y_s}(k)\}$ est bornée – supposé dans la suite (voir Propositions 1.5 et 1.6) – , la suite de paramètres estimés $\{\widehat{\theta}(k)\}$ convergent vers un *paramètre limite*. Pour cela, le *seuil* Δ de la zone morte est choisi pour que (3.94) soit satisfait. En particulier, pour le système (3.23) avec d vérifiant (3.24), il suffit de prendre :

$$\Delta \geq |d|\,(1 - \Re\{z_d\}) . \tag{3.96}$$

Par ailleurs, sauf pour des conditions initiales très particulières dépendant de toute la suite $\{d(k)\}$, le paramètre limite $\widehat{\theta}_\infty$ de la suite $\{\widehat{\theta}(k)\}$ est nécessairement dans le domaine $\mathcal{E}$ de stabilité du contrôleur linéaire gelé. L'objectif que nous nous étions fixé dans cette section est donc atteint. Aussi, dans ce cas, les suites $\{y(k)\}$ et $\{y_s(k)\}$ convergent vers les suites correspondantes du système gelé en $\widehat{\theta}_\infty$, i.e. :

$$\lim_{k\to\infty} \begin{pmatrix} y(k) \\ y_s(k) \end{pmatrix} = \Re\left\{ \frac{(z_d-1)d}{z_d^2 + z_d(f(\widehat{\theta}_\infty)-a) + a - \widehat{\theta}_\infty} \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\overline{z_d} \end{pmatrix} z_d^k \right\} . \tag{3.97}$$

Un paramètre $\widehat{\theta}$ du domaine de stabilité $\mathcal{E}$ ne pourra donc être paramètre limite que si en ce point la condition de zone morte est satisfaite, i.e. :

$$\Re\left\{ \frac{(z_d-1)(z_d+f(\widehat{\theta})-\widehat{\theta})}{z_d^2 + z_d(f(\widehat{\theta})-a) + a - \widehat{\theta}} z_d^k \right\} \leq \Delta \quad \forall k . \tag{3.98}$$

Les valeurs possibles pour les critères de performance en poursuite sont donc les suivantes :

$$\begin{aligned} I_m &= 0 , \\ I_2 &= \frac{1}{2} \left| \frac{(z_d-1)d}{z_d^2 + z_d(f(\widehat{\theta})-a) + a - \widehat{\theta}} \right|^2 , \\ I_\infty &\approx \left| \frac{(z_d-1)d}{z_d^2 + z_d(f(\widehat{\theta})-a) + a - \widehat{\theta}} \right| . \end{aligned} \tag{3.99}$$

où $\widehat{\theta}$ est un point quelconque vérifiant (3.98) et :

$$1 > a - \widehat{\theta} > \frac{1+\widehat{\theta}-f(\widehat{\theta})}{2} . \tag{3.100}$$

On en conclut que Δ ne fixe pas directement les caractéristiques de poursuite mais plus explitement la plage de valeurs possibles pour le paramètre limite de la suite des paramètres estimés. Le *seuil* Δ de la zone morte doit donc être choisi en fonction des connaissances a priori sur les erreurs de modélisation possibles et non pas en fonction de ce que l'on attend du système commandé.

La synthèse joue encore un rôle très important, à la fois sur la plage des paramètres limites possibles et sur la valeur des critères de performance. Si on cherche une synthèse telle que les critères I_2 et I_∞ soient minimisés pour le pire des paramètres stabilisant le système gelé, i.e. satisfaisant (3.100), on obtient :

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \theta + 1 \quad \text{si} \quad \Re\{z_d\} > \tfrac{1}{2} , \\ &= \theta - 1 \quad \text{si} \quad \Re\{z_d\} < \tfrac{1}{2} . \end{aligned} \tag{3.101}$$

On retrouve le fait qu'il est intéressant de choisir la synthèse en fonction des signaux exogènes au système bouclé qui se réduisent ici à la perturbation grâce à l'utilisation d'un modèle interne. Notons aussi que, bien que la perturbation d est non mesurée, son autocorrélation peut être approximée puisque, d'après (3.97),

$$\lim_{(k,k_0)\to\infty} \frac{\sum_{i=k-k_0}^{k} y(i)y(i-1)}{\sum_{i=k-k_0}^{k} y(i)^2} = \Re\{z_d\} \tag{3.102}$$

lorsque $\widehat{\theta}_\infty$ vérifie (3.100).

3.2.3.2 Conclusion

L'introduction d'une zone morte en plus d'un modèle interne permet de supprimer les comportements de type intermittent et garantie l'existence d'un régime permanent exponentiellement stable pour presque toutes conditions initiales. Cependant, son efficacité dépend du choix du seuil qui doit être fait essentiellement en fonction des connaissances a priori sur les possibilités de modéliser le système à commander. Nous observons encore que la synthèse devrait placer des pôles en fonction de l'autocorrélation de la perturbation, celle de la sortie désirée n'intervenant plus du fait de l'utilisation d'un modèle interne.

3.2.4 Conclusion

Lorsque le système à commander est perturbé par un signal stationnaire, l'application des outils introduits à la section 3.1 nous permet d'analyser le comportement asymptotique des solutions et de donner des indications sur la façon de choisir les différents éléments du contrôleur adaptatif ainsi que de préciser dans quelles conditions telle ou telle modification – modèle interne, zone morte, ...doit être introduite. En particulier nous avons mis en évidence que le rapport signal sur bruit, les autocorrélations des signaux exogènes au système en boucle fermée et la synthèse joue des rôles très importants. Par exemple nous avons montré l'intérêt de déterminer la synthèse en fonction des autocorrélations.

Ces conclusions ne sont pourtant valides dans leurs détails que pour le système très particulier que nous avons étudié. La seule vraie généralité ici est la façon d'utiliser les outils lorsque l'on est dans le cas d'adaptation lente. Ce peu de généralité résulte du fait qu'un système linéaire adaptatif est fondamentalement non linéaire et que tout raisonnement reposant uniquement sur la théorie des systèmes linéaires peut amener à des conclusions entièrement fausses.

3.3 Présence de dynamiques négligées

Pour illustrer l'effet que peuvent avoir des dynamiques négligées et appuyer d'avantage la conclusion de la section précédente, nous allons montrer ici que certaines hypothèses des résultats obtenus pour le cas idéal doivent être fortement précisées pour aborder des cas plus réels. Ainsi nous avons montré dans la Proposition 4 qu'une suite de sortie désirée permettant de vérifier la condition (1.37) d'excitation persistente, garantie l'existence d'une unique solution globalement exponentiellement stable. Nous allons voir qu'en présence de dynamiques négligées, c'est justement à cause de cette excitation persistente que des problèmes du type régime transitoire avec des intermittences peuvent apparaitre.

Supposons que le système à commander est :

$$\left(1 - aq^{-1}\right)\left(1 - bq^{-1}\right) y_p(k) \;=\; q^{-1}\left(1 - (b+\delta)q^{-1}\right) u_p(k) \tag{3.103}$$

où a, b et δ sont des nombres réels. Si $|b| < 1$ et δ est suffisament petit, le modèle de synthèse (1.1) est obtenu en négligeant la presque non commandabilité associée au pôle b. Prenons toujours comme objectif de commande le fait que la sortie y_p tende vers une sortie désirée supposée encore constante pour simplifier :

$$y_d(k) \;=\; y_d \;. \tag{3.104}$$

Au contrôleur adaptatif (3.3) sans autre modification que la normalisation et la projection, i.e.

$$y(k) \;=\; y_p(k) \quad , \qquad u_p(k) \;=\; u(k) \quad , \tag{3.105}$$

correspond le contrôleur linéaire gelé en θ suivant :

$$u(k,\theta) \;=\; -f(\theta)\, y(k) \;+\; (1 + f(\theta) - \theta)\, y_d \;. \tag{3.106}$$

Toujours pour simplifier, supposons que la synthèse soit celle du placement de pôle, i.e. :

$$f(\theta) \;=\; \theta \;-\; a_m \;. \tag{3.107}$$

3.3.0.1 Analyse

Le domaine $\mathcal{E}$ de stabilité obtenu dans ce cas est non vide si et seulement si b et δ sont tels qu'il existe au moins un point θ vérifiant les trois inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} (1-a)\,(1-b) \;+\; (1-(b+\delta))\,(\theta - a_m) \;&>\; 0 \;, \\ (1+a)\,(1+b) \;-\; (1+(b+\delta))\,(\theta - a_m) \;&>\; 0 \;, \\ a\,b \;-\; (b+\delta)\,(\theta - a_m) \;&<\; 1 \;. \end{aligned} \tag{3.108}$$

En particulier ce sera le cas si :

$$|b| \;<\; 1 \;-\; \delta\, a \quad \text{et} \quad |\delta a| \;<\; 1 \;. \tag{3.109}$$

La fonction E définie en (3.16) est ici donnée par :

$$E(0,\widehat{\theta}) \;=\; \frac{y_d^2}{M}\,\frac{[1-(b+\delta)]^2[1-a_m]^2 - [(1-(b+\delta))(1-a_m)]\left[(1-a)(1-b)+(1-(b+\delta))(\widehat{\theta}-a_m)\right]}{\left[(1-a)(1-b)+(1-(b+\delta))(\widehat{\theta}-a_m)\right]^2} \;. \tag{3.110}$$

D'après la Proposition 13, les sources possibles de solutions périodiques sont données par les zéros de E. Ici,

<u>Si $y_d \neq 0$</u> et $b+\delta \neq 1$, il n'y a qu'un seul zéro donné par :

$$\widehat{\theta}^* \;=\; a \;-\; \delta\,\frac{1-a}{1-(b+\delta)} \;. \tag{3.111}$$

Et en ce point, $\frac{\partial E}{\partial \theta}$ est négatif. Avec la Proposition 14, on en déduit que si ce point $\widehat{\theta}^*$ ne vérifie pas (3.108), il n'existe pas de solutions périodiques exponentiellement stables et régulières en y_d. Par contre, il peut en exister avec leur composante évoluant dans un voisinage de la frontière du domaine $\mathcal{E}$ de stabilité défini par (3.108) et donc auxquelles il est presque sûrement associé un régime transitoire de type intermittent. Or $\widehat{\theta}^*$ n'appartient pas à $\mathcal{E}$ en particulier si :

$$1 \;<\; b+\delta \;, \tag{3.112}$$

bien que, dans ce cas, il existe un contrôleur linéaire gelé stabilisant au moins tant que (3.109) est satisfait.

Si $y_d = 0$, alors d'après la forme standard suivante obtenue dans ce cas :

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1(k+1) & = & \left(a + \frac{(a-(b+\delta)(a_m-\widehat{\theta}(k))}{a-b}\right) x_1(k) \;+\; \frac{(a-(b+\delta)(a_m-\widehat{\theta}(k))}{a-b}\, x_2(k) \\ x_2(k+1) & = & \frac{\delta(a_m-\widehat{\theta}(k))}{a-b}\, x_1(k) \;+\; \left(b + \frac{\delta(a_m-\widehat{\theta}(k))}{a-b}\right) x_2(k) \\ \widehat{\theta}(k+1) & = & \widehat{\theta}(k) \;+\; \eta\, \frac{[x_1(k)+x_2(k)][x_1(k+1)+x_2(k+1)]}{1+[x_1(k)+x_2(k)]^2} \end{array}\right\} \tag{3.113}$$

on voit qu'il existe un ensemble intégral $x_1 = x_2 = 0$ normalement hyperboliquement stable si sa composante $\widehat{\theta}$ vérifie (3.108) et instable sinon. À l'aide de [34, Propriété 2.5], on en déduit que la plupart des solutions convergent vers cet ensemble avec la suite de sortie $\{y(k)\}$ tendant exponentiellement vers 0.

3.3.0.2 Conclusion

Comme nous l'avions annoncé au début de cette section, c'est parce qu'une sortie désirée vérifiant la condition d'excitation persistente est introduite que des problèmes se révèlent. En fait, on remarque que cette excitation porte exactement sur la bande de fréquences – ici la composante continue – où la dynamique négligée est la plus significative. Il est donc nécessaire de préciser la notion d'excitation persistente. Ainsi [18, 2] :

Definition 6 *On dit qu'une suite stationnaire de commande en boucle fermée $\{u_{\mathrm{bf}}(k)\}$ vérifie la condition d'excitation persistente dominante si :*

1. *elle satisfait l'inégalité (1.37),*
2. *son spectre a pour support des fréquences telles que lorsque les fonctions de transfert du modèle de synthèse et du système à commander y coïncident, le contrôleur obtenu par la synthèse stabilise le système à commander.*

Cette définition montre la difficulté qu'il y a de savoir a priori si la propriété de dominance est satisfaite ou non, celle-ci dépendant en particulier du modèle de synthèse et de la synthèse elle-même.

Chapitre 4

Conclusion

Les résultats rapportés dans ce document montrent que de très gros efforts ont été consentis pour obtenir une bien meilleure compréhension théorique des systèmes linéaires adaptatifs.

Nous avons vu au chapitre 2 qu'une théorie assez complète et de difficulté réduite est disponible sur le fait que la commande adaptative garantie des solutions bornées lorsqu'elle est appliquée à des systèmes linéaires. Malheureusement, la seule connaissance de cette propriété de bornitude est très insuffisante pour aborder des applications.

En ce qui concernent les aspects performance asymptotique étudiés au chapitre 3, nous avons montré l'existence de moyens d'investigation efficaces. Cependant les phénomènes à étudier sont d'une telle complexité qu'il est difficile de déduire de leur étude des lois précises pour régler les différentes composantes d'un contrôleur adaptatif. Au contraire de la commande linéaire, chacune de ses composantes a des effets secondaires importants modifiant l'action des autres.

Nous n'avons rapporté aucun résultat sur les régimes transitoires. Très peu de recherches ont porté sur ce sujet, la cause essentielle étant de nouveau la trop grande complexité.

Ce qui explique ce bref bilan que nous venons de dresser et ce qui est le premier message que nous voulons faire passer avec ce rapport est :

> *La commande adaptative des systèmes linéaires est une commande non linéaire qui, du fait même de l'adaptation traduite en une criticalité du système dynamique, peut engendrer des comportements extrêmement complexes et difficiles à étudier dans le détail.*

Une approche reposant uniquement sur la théorie des systèmes linéaires est souvent insuffisante et mène parfois à des conclusions totalement contraires à celles qu'il faudraient réellement tirées.

Ces faits expliquent de notre point de vue pourquoi l'application de la commande adaptative reste du domaine de spécialistes très expérimentés. Cependant, nous avons montré qu'une telle commande a aussi de grands avantages et l'investissement dans la formation de tels spécialistes nous semble justifié.

Références

[1] Anderson B.D.O. : *Adaptive systems, lack of persistency of excitation and bursting phenomena.* Automatica, Vol. 21, No. 3. 1985.

[2] Anderson B.D.O., Bitmead R.R., Johnson C.R., Kokotovic P.V., Kosut R.L., Mareels I.M.Y., Praly L., Riedle B.D. : *Stability of adaptive systems: Passivity and averaging analysis.* MIT Press 1986.

[3] Anderson B.D.O., Johnson C.R. : *Exponential convergence of adaptive identification and control algorithm.* Automatica 18 (1982) 1-13.

[4] Åström K.J., Hägglund T. : *Adaptive tuning of PID controllers.* Instrument Society of America.

[5] Åström K.J., Wittenmark B. : *Adaptive control.* Addison Wesley 1989.

[6] Bai E.W., Sastry S.S. : *Persistency of excitation, sufficient richness and parameter convergence in discrete time adaptive control.* Systems & Control Letters 6 (1985) 153-163.

[7] Bai E.-W., Fu L.-C., Sastry S.S. : Averaging analysis for discrete time and sampled data systems. IEEE transactions on Circuit and systems. N.34 February.

[8] Bergé P., Pomeau Y., Vidal C. : *L'ordre dans le chaos.* Collection Enseignement des sciences, 33. Hermann 1984.

[9] Cristi R. : *Internal persistency of excitation in indirect adaptive control.* IEEE Transactions on Automatic Control, December 1987.

[10] Egardt B. : *Stability of adaptive controllers.* Springer Verlag 1979.

[11] Gawthrop P.J. : *Continuous-time self-tuning control : Volume 1 - design.* John wiley & Sons 1987.

[12] Giri F., M'Saad M., Dugard L., Dion J.-M. : *Robust pole placement indirect adaptive control.* Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing. Vol. 2, N. 2, June 1988.

[13] Goodwin G.C., K.S. Sin : *Adaptive filtering, prediction and control.* Prentice-Hall 1984.

[14] Grimble M.J. : *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing.* Wiley

[15] Harris C.J., Billings S.A. : *Self-tuning and adaptive control: Theory and applications.* Peter Peregrinus 1982.

[16] Householder A.S. : *The theory of matrices in numerical analysis.* Dover. 1964

[17] Johansson R. : *Global Lyapunov stability and exponential convergence of direct adaptive control.* Int. J. Control, 1989, Vol. 50, No. 3, 859-869.

[18] Ioannou P.A., Kokotovic P.V. : *Adaptive systems with reduced order models.* Lecture Notes in Control and Information Sciences 47. Springer Verlag, 1983.

[19] Ioannou P., Sun J. : *Theory and design of robust direct and indirect adaptive control schemes.* Int. J. Control, Vol. 47, No. 3, 775-813, 1988.

[20] Landau I.D.: *Adaptive control: The model reference approach.* Control and Systems Theory. Vol. 8. Dekker 1979.

[21] Landau I.D. : *Identification et commande des systèmes à l'aide des progiciels P.I.M. et PC-REG.* Editions Hermes 1988.

[22] Landau I.D., Dugard L. : *Commande adaptative: Aspects pratiques et théoriques.* Masson 1986.

[23] de Larminat P., Raynaud H.-F. : *A robust solution to the adamissibility problem in indirect adaptive control without persistency of excitation.* Int. J. of Adaptive Control and Signal Processing. Vol. 2, N. 2, June 1988.

[24] Lefschetz S. : *Diferential equations: Geometric theory.* Dover, 1977.

[25] Ljung L. : *System identification : Theory for the user.* Prentice Hall 1987.

[26] Lozano-Leal R. : *Robust adaptive regulation without persistent excitation.* IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 34, No. 12, December 1989.

[27] Middleton R., Goodwin G., Hill D., Mayne D. : *Design issues in adaptive control.* IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 33, N. 1, January 1988.

[28] Najim K. : *Commande adaptative des processus industriels.* Masson 1982.

[29] Narendra K.S. : *Adaptive and learning systems: Theory and applications.* Plenum Press 1986.

[30] Narendra K., Annaswamy A. : *Stable adaptive systems.* Information and Systems Sciences Series. Prentice Hall. 1989.

[31] Polderman J.-W.: *A state space approach to the problem of adaptive pole assignment.* MCSS, Vol.2, N.1, 1989.

[32] Pomet J.-B., Coron J.-M., Praly L. : *On periodic solutions of adaptive systems in the presence of periodic forcing terms.* Maths. Control Signals Systems (1990) 3: 373-399.

[33] Praly L. : *Introduction à la théorie de la commande adaptative des systèmes linéaires.* Cours E.N.S.M.P.

[34] Praly L. : *Commande linéaire adaptative: Solutions bornées et leurs propriétés.* Thèse en Mathématiques et Automatique. Université de Paris IX Dauphine. UER Mathématiques de la Décision. Octobre 1988.

[35] Praly L. : *Nonlinear dynamics of adaptive linear systems: an elementary example.* IFAC Symposium, Capri, Italy. June 1989.

[36] Praly L. : *Almost exact modelling assumption in adaptive linear control.* Int. J. Control, 1990, VOL. 51, NO. 3, 643-668.

[37] Praly L. : *Topological orbital equivalence with asymptotic phase for a two time scales discrete time system.* Math. Control Signals Systems (1990) 3: 225-253.

[38] Praly L., España M. : *An example of oscillations in adaptive linear control.* Proceed. 5th Yale Workshop on Applications of adaptive systems theory. Yale University. 1987.

[39] Praly L., Lin S.-F., Kumar P. : *A robust minimum variance controller.* SIAM J. Control and Optimisation Vol. 27, No. 2, March 1989.

[40] Praly L., J.-B. Pomet : *Periodic solutions in adaptive systems: the regular case.* Proceed. 10th IFAC world congress on automatic control. Vol. 10. 1987.

[41] Praly L., Redjah M. : *An indirect adaptive control scheme for disturbed MIMO systems.* Proceed. 21st IEEE Conference on Decision and Control. 1982.

[42] Praly L., Trulsson E. : *Decentralized indirect adaptive control.* RAIRO APII - 1986- 20 - 295 - 315. Dunod. 1986.

[43] Riedle B. : *Integral manifolds of slow adaptation.* Ph. D. Dissertation, Electrical Engineering, University of Illinois at Urbana-Champaign, USA. 1986.

[44] Sastry S., Bodson M. : *Adaptive control : Stability, convergence and robustness.* Prentice Hall advance reference series. 1989.

[45] Sanders J.A., Verhulst F. : *Averaging methods in nonlinear dynamical systems.* Springer Verlag, 1985.

[46] Shub M. : *Stabilité globale des sytèmes dynamiques.* Astérisque 56. Société Mathématique de France. 1978.

[47] Vidyasagar M. : *The graph metric for unstable plants and robustness estimates for feedback stability.* IEEE Transactions on Automatic Control. May 1984.

[48] Wen C., Hill D. : *Global boundedness of single loop and decentralised adaptive control just using estimation projection.* Technical Report EE9084. University of Newcastle. Australia. September 1990

[49] Ydstie B.E. : *Stability of discrete model reference control – revisited.* Systems & Control Letters, 13 429-438, 1989.

[50] Ydstie B.E. : *Stability of the direct self tuning regulator.* pp.201-238 in : *Foundations of Adaptive Control*, P. V. Kokotovic, Ed., Springer-Verlag, Berlin, 1991.

Index