THÈSE

présentée à
L'École Nationale Supérieure des Mines de Paris
par

Nicolas Petit

en vue de l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE DES MINES DE PARIS

Spécialité : Mathématiques et Automatique

Sujet de la thèse :

SYSTÈMES À RETARDS. PLATITUDE EN GÉNIE DES PROCÉDÉS ET CONTRÔLE DE CERTAINES ÉQUATIONS DES ONDES

soutenue le 31 mai 2000 devant le jury composé de

MM.	Michel Fliess	Président
	Georges Bastin	Rapporteur
	Jean-Michel Coron	Rapporteur
	Jean-Pierre Corriou	Examinateur
	Yann Creff	Examinateur
	Hugues Mounier	Examinateur
	Pierre Rouchon	Examinateur

Nicolas Petit

SYSTÈMES À RETARDS. PLATITUDE EN GÉNIE DES PROCÉDÉS ET CONTRÔLE DE CERTAINES ÉQUATIONS DES ONDES

NICOLAS PETIT
École Nationale Supérieure des Mines de Paris, Centre Automatique et Systèmes,
60, Bd. Saint-Michel, 75272 Paris Cedex 06, France.
E-mail : `petit@cas.ensmp.fr`

Mots clefs. — Contrôle en génie des procédés. Contrôle d'équations des ondes. Systèmes à retards. Platitude. Contraintes. Réacteur parfaitement agité. Réacteur tubulaire. Commande répartie. Mélanges. Retards variables. Équation de Burgers. Équation de Saint-Venant. Équation des télégraphistes. Équation des câbles pesants.

Keywords. — Process control. Control of wave equations. Delay systems. Flatness. Constraints. Continuous stirred reactor. Plug flow reactor. Distributed control. Mixing. Variable delays. Burgers' equation. Saint-Venant equation. Telegraph equation. Heavy chain equation.

21 juillet 2000

À mes parents, ma femme, mon fils

SYSTÈMES À RETARDS. PLATITUDE EN GÉNIE DES PROCÉDÉS ET CONTRÔLE DE CERTAINES ÉQUATIONS DES ONDES

Nicolas Petit

Résumé. — Le travail présenté s'inscrit dans le cadre de la platitude, théorie récente dans le domaine du contrôle des systèmes. Nous présentons des réalisations industrielles en génie des procédés, et des contributions théoriques dans le domaine des équations aux dérivées partielles.

À partir d'applications industrielles, réalisées avec le groupe TotalFinaElf et aujourd'hui en service dans les usines concernées, nous montrons l'intérêt pratique de la platitude dans le domaine du contrôle des procédés : gestion de grands transitoires, prise en compte explicite des non-linéarités, des retards, des contraintes...

Nous traitons ensuite un ensemble d'exemples physiques de systèmes régis par des équations des ondes. En réécrivant ces équations aux dérivées partielles et leurs conditions limites comme des équations à retards, nous exhibons une paramétrisation de leurs trajectoires établissant ainsi la propriété de platitude de ces systèmes. Il est alors possible de prouver de manière constructive la commandabilité de ces systèmes en calculant des trajectoires entre différents états.

Tous ces exemples, où les retards jouent des rôles à chaque fois différents, nous permettent de mettre en valeur l'importance pratique et théorique de la propriété de platitude dans le domaine du génie des procédés et du contrôle des équations des ondes.

***Abstract* (Delay systems. Flatness in process control and control of some wave equations)**

The work presented here stands in the field of control of systems. It relies on the recent theory of flatness. We present industrial realizations in process control and theoretical results in the field of partial differential equations.

At first we detail four industrial applications developed in collaboration with TotalFinaElf. The obtained results underlines the relevance of our flatness-based approach in process control : achievement of large transients, explicit handling of nonlinearities, delays, constraints…

Then we consider several physical systems ruled by wave equations. Writing these equations and their boundary conditions as delay systems, we give an explicit parametrization of their trajectories. This shows the flatness of these systems and provides a constructive proof of their controllability.

All these examples, where delays play different roles, enlighten both the practical and theoretical importance of the flatness property in the fields of process control and wave equations.

Remerciements

Je remercie Michel Fliess président du jury, Georges Bastin et Jean-Michel Coron rapporteurs de ma thèse, ainsi que Jean-Pierre Corriou, Yann Creff et Hugues Mounier qui en ont été examinateurs.

Je tiens à remercier avec beaucoup de sincérité mon directeur de thèse Pierre Rouchon pour tout ce que je lui dois.

Je remercie également Philippe Martin, François Chaplais, Laurent Praly, Jean Lévine et Pierre Carpentier. Merci à François Malrait et Jean-Baptiste Malézieux. Merci à Jean-Christophe Culioli et Brigitte d'Andrea-Novel.

Merci à Philippe Zaccagnino de la Direction Recherche Technique Environnement du groupe ELF, aux équipes du Centre de Recherches ELF à Solaize, du Centre Technique ATOCHEM, et aux exploitants et services procédés des usines APPRYL PP2 à Lavéra, ATOFINA PS Carling et de la raffinerie ELF-ANTAR FRANCE de Feyzin.

Introduction générale

Dans ce mémoire, nous présentons une contribution théorique en automatique dans le cadre de la platitude [**FLMR95, FLMR99**] et des applications industrielles de contrôle de systèmes en génie des procédés, réalisées en collaboration avec le groupe TotalFinaElf.

Tout au long de ce manuscrit, on utilise la notion de platitude, dont nous présentons ici une brève définition.

Platitude. — Soit un système $\dot{x} = f(x, u)$ où l'état est $x \in \mathbb{R}^n$, et la commande $u \in \mathbb{R}^m$. On dira que le système est *plat* et admet z pour *sortie plate* (combinaison de x, u et ses dérivées avec $dimz = dimu$), si toutes les grandeurs du système sont paramétrées par z et ses dérivées :

– d'une part on aura la reconstitution de tout l'état $x = h_1(z, \dot{z}, \ldots, z^{(n)})$

– et d'autre part la dynamique équivalente $u = h_2(z, \dot{z}, \ldots, z^{(n+1)})$.

π-liberté. Plus spécifiquement, dans le cadre de la théorie des modules on peut considérer un système à retards (constants) comme un $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \delta]$-module. On peut s'intéresser également à la possibilité de paramétrer les grandeurs du systèmes. On s'autorise en plus des opérations algèbriques utilisées précédemment l'inversion des retards (plus généralement l'inversion d'un polynôme π en l'opérateur retard) et on parle alors de π-liberté et de sortie π-plate (voir l'Annexe C).

Organisation du mémoire. — Le mémoire est constitué de trois parties regroupant

1. les travaux en commande de génie des procédés

2. les études menées sur les systèmes de mélange

3. les résultats obtenus dans le domaine du contrôle de certaines équations des ondes.

Première partie. — Nous nous intéressons ici à des problèmes importants en génie des procédés. Ils répondent à des questions directement issues du monde industriel.

Nous montrons au chapitre 1 la platitude, ou plus exactement la π-liberté [**Mou95**] d'une classe de modèles linéaires à retards multi-entrées, multi-sorties. Ces modèles sont très souvent utilisés en contrôle de procédés.

Au chapitre 2 nous présentons, à partir d'une réalisation industrielle à la raffinerie ELF-ANTAR FRANCE de Feyzin (Rhône), une méthode de commande en temps-minimum sous contraintes exploitant la paramétrisation explicite des trajectoires des systèmes issus du chapitre 1.

Au chapitre 3 nous expliquons la réalisation du système de conduite du réacteur APPRYL PP2 à Lavéra (Bouches du Rhône). Ici encore les modèles employés s'appuient sur ceux du chapitre 1 à des changements de coordonnées non linéaires près au niveau des entrées et des sorties.

Ces deux applications montrent comment la platitude qui fournit une paramétrisation explicite des trajectoires permet de prendre en compte les non-linéarités en pratique. Elle conduit à des contrôleurs avec d'excellentes performances dynamiques (suivi de trajectoires) lors de grands transitoires. Cet aspect répond à une demande forte dans le domaine du génie des procédés et garantit d'importants gains de productivité.

Au chapitre 4 nous étudions la réalisation d'un régulateur thermique pour le réacteur ATOFINA PS de Carling (Moselle). Le modèle utilisé ici (réaction-convection) ne relève plus directement de la classe des modèles du chapitre 1. La dynamique se ramène à $\dot{x}(t) = u(t) - u(t-1)$, système non commandable (la quantité $x(t) - \int_{t-1}^{t} u$ est un invariant). Nous apportons une réponse satisfaisante en pratique pour la commande de ce système.

Deuxième partie. — La deuxième partie du mémoire est réservée à une classe très particulière de systèmes en génie des procédés : les systèmes de mélanges. Ces travaux constituent les préliminaires académiques à l'écriture du cœur du logiciel ANAMEL version 4, logiciel ELF de pilotage de mélangeuse de raffinerie, que pour des raisons de confidentialité nous ne pouvons décrire ici.

Au chapitre 5 nous montrons comment exploiter la platitude d'un système assez simple de mélange (lois linéaires), afin d'atteindre les spécifications désirées tout en gérant des contraintes statiques et dynamiques sur la recette du mélange.

Le chapitre 6 traite le cas où les retards dus aux volumes morts dans les tuyauteries sont importants et dépendent des commandes de débit. Le système est encore plat. Il admet une paramétrisation explicite de ses trajectoires qui fait intervenir en plus des opérations algébriques et de l'opération de dérivation, la composition et l'inversion des fonctions. Nous mettons cette propriété en évidence dans le cas d'un réseau simple avec deux nœuds de mélange. Ensuite nous traitons le cas général d'un réseau de canalisations en forme d'arbre binaire.

Troisième partie. — Dans la troisième partie du mémoire, nous avons regroupé les résultats sur la planification de trajectoires de certains systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Le travail effectué sur le réacteur ATOFINA PS de Carling à la première partie nous a conforté dans l'idée que le contrôle des équations aux dérivées partielles avait une grande importance dans le domaine des applications.

Nous avons donc recherché l'incidence que pouvait avoir la platitude pour certains de ces systèmes. Les équations que nous abordons sont toutes des équations des ondes que nous réécrivons sous forme de systèmes à retards.

Au chapitre 7, nous traitons deux exemples pour lesquels les calculs qui reposent sur la méthode des caractéristiques sont très similaires : le "jongleur" et l'équation de Burgers sans diffusion. Nous nous ramenons dans les deux cas à des relations entrées-sorties avec retards dépendant de l'entrée.

Ensuite au chapitre 8, nous abordons le contrôle d'un récipient contenant un fluide gouverné par les équations de Saint-Venant. Moyennant une approximation, nous ramenons les équations du système et les conditions limites à des équations à retards linéaires dont nous exprimons une paramétrisation.

Le chapitre 9 est consacré à l'équation des télégraphistes, équation régissant la propagation d'un signal dans une ligne électrique. En utilisant le calcul opérationnel, nous exhibons des équations à retards ponctuels et répartis. Sous cette forme la platitude du système apparaît clairement. Nous montrons alors comment l'exploiter pour précompenser les distorsions engendrées lors de la propagation du signal.

Enfin au chapitre 10 nous étudions des systèmes de câbles pesants transportant une charge. Ce problème est une généralisation aux équations aux dérivées partielles des problèmes de planification de mouvement pour les systèmes pendulaires, systèmes dont l'étude est à l'origine des systèmes plats [**FLMR92, FLMR95**]. Via des opérateurs à retards ponctuels et répartis nous montrons que, comme pour ces systèmes pendulaires classiques, la sortie plate du système est encore l'extrémité libre du système.

Pour les chapitres 8, 9 et 10, les trajectoires sont décrites explicitement à l'aide d'opérateurs à retards ponctuels ou répartis à support compact. Cette propriété fondamentale permet en pratique de raccorder des trajectoires, prouvant ainsi que ces systèmes sont commandables [**Fli92, Wil91**].

TABLE DES MATIÈRES

Partie I. Contrôle de procédés 9

1. Platitude d'une classe de modèles classiques en génie des procédés 11
- Introduction 11
- 1.1. Résultat principal 14
- 1.2. Conclusion 20

2. Contrôle en temps minimum de l'acidité pour une unité d'alkylation 21
- Introduction 21
- 2.1. Présentation du procédé 22
- 2.2. Résolution du problème de commande 24
- 2.3. Résultats industriels 28
- 2.4. Résolution numérique 29
- 2.5. Conclusion sur la commande en temps minimum sous contraintes en utilisant la platitude 34

3. Commande du réacteur parfaitement agité APPRYL PP2 37
- Introduction 37
- 3.1. Présentation du procédé 38
- 3.2. Équations de la dynamique 40
- 3.3. Platitude du système et calcul du contrôleur 42
- 3.4. Résultats industriels 44
- 3.5. Conclusion 45

4. Commande du réacteur tubulaire ATOFINA PS Carling 49
- Introduction 49

4.1. Présentation du procédé 50
4.2. Interprétation en tant que système à retard 53
4.3. Méthode type Lyapunov 53
4.4. Synthèse quadratique 54
4.5. Résultats industriels 57
4.6. Conclusion 58

Partie II. Systèmes de mélanges 59

5. Mélanges linéaires 61
Introduction 61
5.1. Platitude du système 63
5.2. Planification de trajectoires optimales en temps sous contraintes 64
5.3. Simulations boucle ouverte 71
5.4. Observateur 73
5.5. Conclusion 76

6. Mélanges linéaires avec retards dépendant des entrées 79
Introduction 79
6.1. Mélange des couleurs - ordonnancement des batchs 80
6.2. Résultat général pour les réseaux en forme d'arbres binaires 85
6.3. Conclusion 94

Partie III. Contrôle de certaines équations des ondes 95

7. Le jongleur et l'équation de Burgers sans diffusion 99
Introduction 99
7.1. Modèle du jongleur 100
7.2. Équation de Burgers 104
7.3. Conclusion 106

8. Récipient d'eau et équations de Saint-Venant 109
Introduction 109
8.1. Modèle physique non linéaire 110
8.2. Étude du modèle linéarisé 112
8.3. Paramétrisation explicite 113
8.4. Planification de trajectoires entre deux points stationnaires 114
8.5. Signification physique de la sortie plate 115
8.6. Comparaisons entre la prédiction linéaire et la simulation non linéaire 116
8.7. Conclusion 118

9. Équation des télégraphistes 121
Introduction 121

9.1. Modèle physique ... 122
9.2. Calcul du filtre de précompensation ... 123
9.3. Simulations ... 126
9.4. Conclusion ... 129

10. Équation des câbles pesants ... 133
Introduction ... 133
10.1. Câble homogène sans charge ... 135
10.2. Câble inhomogène (i.e. à section variable) sans charge ... 137
10.3. Câble inhomogène portant une charge ponctuelle ... 147
10.4. Conclusion ... 154

A. Commande en temps minimum sous contraintes d'état et de commande des équations de Saint-Venant ... 155

B. Approximation de systèmes linéaires à retards par des fractions continues ... 163

C. Quelques éléments de théorie des modules pour les systèmes à retards ... 167

D. Exemple de trajectoires pour les systèmes linéaires MIMO ... 169

E. Une fonction C^∞ dont la dérivée est à support compact ... 175

F. Résultats de la littérature sur deux classes d'équations intégrales ... 177

G. Résultats de la littérature sur les équations de Bessel ... 181

H. Un théorème de Paley-Wiener ... 183

I. Techniques de réglage de la littérature des contrôleurs en génie des procédés ... 185

J. Méthode de simulation de l'équation des télégraphistes ... 187

Bibliographie ... 189

PARTIE I

CONTRÔLE DE PROCÉDÉS

Présentation de la première partie

Le chapitre 1 est consacré à l'étude de la platitude d'une classe très générale de systèmes linéaires multi-entrées, multi-sorties à retards sur les commandes, très utilisés en génie des procédés [**Ste84, Buc64**]. On se trouve en fait dans le cadre de la π-liberté de [**Mou95**] où le système peut être considéré comme un module. Les relations permettant d'exprimer les variables du système au moyen des sorties plates font intervenir des opérations algèbriques usuelles, la dérivation par rapport au temps et les opérateurs d'avance $\exp(\delta s)$ et de retard $\exp(-\delta s)$ (on parle de sorties δ-plates). Nous énonçons et démontrons un résultat général de platitude. Pour ces systèmes, nous en déduisons une solution à la question de la trajectographie que nous détaillons dans le cas 2×2. Ces travaux ont été l'objet de la publication [**PCR97**].

Au chapitre 2 nous expliquons la mise en œuvre industrielle à la raffinerie ELF-ANTAR FRANCE de Feyzin (Rhône) d'une technique de commande en temps minimum sous contraintes exploitant la platitude du système qui est justement de la forme étudiée au chapitre 1. Ce régulateur est en service depuis janvier 1997. Nous donnons des résultats grandeur nature de son fonctionnement. Ces travaux ont donné lieu à l'article [**PCR99**].

Au chapitre 3 nous montrons l'intérêt de la platitude dans le cas du réacteur APPRYL PP2 situé à Lavéra (Bouches du Rhône). Ce réacteur de polymérisation (type parfaitement agité) est le cœur d'une unité de fabrication de polypropylène. Il peut être considéré comme un réacteur parfaitement agité où le retard agit sur la commande en raison des dynamiques de dilution et d'importantes longueurs de canalisations. C'est un système non linéaire à retard. Nous établissons la platitude du système et l'utilisons pour concevoir un régulateur qui permet des changements de point de fonctionnement rapides et précis. Ce régulateur est en service depuis juillet 1999. Ces travaux sont publiés dans [**PRB$^+$00**].

Au chapitre 4 nous détaillons notre travail sur le réacteur ATOFINA PS de Carling (Moselle). Ce réacteur de polymérisation fait partie d'une unité de fabrication de polystyrène. C'est un réacteur tubulaire. La réaction se produit le long du réacteur qu'on peut modéliser par des équations aux dérivées partielles de réaction-convection. Le retard intervient comme l'expression de l'avancement de la réaction. En tenant compte du caractère "piston" du réacteur nous montrons comment concevoir un contrôleur efficace. Ce contrôleur est en service depuis décembre 1999.

Ces régulateurs sont actuellement en service dans les usines concernées.

CHAPITRE 1

PLATITUDE D'UNE CLASSE DE MODÈLES CLASSIQUES EN GÉNIE DES PROCÉDÉS

Dans ce chapitre on s'intéresse à une classe générale de systèmes linéaires avec retards sur les entrées. Ces modèles sont très utilisés en génie des procédés (voir [**Ste84**] ou [**Buc64**, page 88]).

Nous montrons ici, sous une hypothèse très peu restrictive, que ces systèmes sont plats, ou plus précisément δ-plats (voir [**Mou95**] et l'Annexe C). On dispose ainsi d'une paramétrisation explicite des trajectoires de ces systèmes via une famille finie de fonctions indépendantes et de leurs dérivées.

En introduction on explique sur un exemple simple l'intérêt de cette propriété du point de vue de la trajectographie et on donne une esquisse de la preuve.

La section 1.1 est consacrée au cas général, on y énonce et démontre un résultat général.

Les développements de ce chapitre ont fait l'objet de la publication [**PCR97**].

Introduction

Modèle. — *Considérons le système suivant comportant deux entrées (indépendantes) et deux sorties*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{K_1^1 e^{-\delta_1^1 s}}{1+\tau_1^1 s} & \frac{K_1^2 e^{-\delta_1^2 s}}{1+\tau_1^2 s} \\ \frac{K_2^1 e^{-\delta_2^1 s}}{1+\tau_2^1 s} & \frac{K_2^2 e^{-\delta_2^2 s}}{1+\tau_2^2 s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$$

où s est la variable associée à la transformée de Laplace, $i \in \{1,2\}$, $j \in \{1,2\}$, $\tau_i^j \in R^{*+}, K_i^j \in R^*, \delta_i^j \in R^+$. $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ est la sortie du système, $u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$ est la commande [(1)].

[(1)] On utilise les indices en haut sur la commande par soucis d'homogénéité avec les notations de la section suivante

Un point stationnaire $(\bar{y}, \bar{u})$ est donné par les relations

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} K_1^1 & K_1^2 \\ K_2^1 & K_2^2 \end{pmatrix} \bar{u}.$$

Nous cherchons à déterminer les commandes u permettant de faire passer le système du point stationnaire $(\bar{y}, \bar{u})$ au point stationnaire $(\tilde{y}, \tilde{u})$ en temps T convenablement choisi.

À la section 1.1 nous montrons, dans un cas très général, qu'il existe une famille de variables, de même nombre que le nombre d'entrées, qui jouent un rôle particulier et que nous appellerons dans la suite les sorties *δ-plates*. Ces quantité sont construites par résolution d'un système d'équations linéaires. Ici cette construction amène à considérer les grandeurs $\xi = (\xi^1, \xi^2)$ dont la forme est

$$\begin{aligned}
\xi^1(t) = & \frac{\tau_1^1 \, K_2^1}{\frac{1}{\tau_1^2} - \frac{1}{\tau_1^1}} \left(\dot{y}_1(t+\delta_1^1) + \frac{y_1(t+\delta_1^1)}{\tau_1^2} \right) \\
& - \frac{\tau_2^1 \, K_1^1}{\frac{1}{\tau_2^2} - \frac{1}{\tau_2^1}} \left(\dot{y}_2(t+\delta_2^1) + \frac{y_2(t+\delta_2^1)}{\tau_2^2} \right) \\
& + \left(\frac{K_1^1 \, K_2^1}{\frac{1}{\tau_2^2} - \frac{1}{\tau_2^1}} - \frac{K_1^1 \, K_2^1}{\frac{1}{\tau_1^2} - \frac{1}{\tau_1^1}} \right) u^1(t) \\
& - \frac{\tau_1^1 \, K_2^1 \, K_1^2}{1 - \frac{\tau_1^2}{\tau_1^1}} \, u^2(t - \delta_1^2 + \delta_1^1) \\
& + \frac{\tau_2^1 \, K_1^1 \, K_2^2}{1 - \frac{\tau_2^2}{\tau_2^1}} \, u^2(t - \delta_2^2 + \delta_2^1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi^2(t) = & \frac{\tau_1^2 \, K_2^2}{\frac{1}{\tau_1^1} - \frac{1}{\tau_1^2}} \left(\dot{y}_1(t+\delta_1^2) + \frac{y_1(t+\delta_1^2)}{\tau_1^1} \right) \\
& - \frac{\tau_2^2 \, K_1^2}{\frac{1}{\tau_2^1} - \frac{1}{\tau_2^2}} \left(\dot{y}_2(t+\delta_2^2) + \frac{y_2(t+\delta_2^2)}{\tau_2^1} \right) \\
& + \left(\frac{K_1^2 \, K_2^2}{\frac{1}{\tau_2^1} - \frac{1}{\tau_2^2}} - \frac{K_1^2 \, K_2^2}{\frac{1}{\tau_1^1} - \frac{1}{\tau_1^2}} \right) u^2(t) \\
& - \frac{\tau_1^2 \, K_2^2 \, K_1^1}{1 - \frac{\tau_1^1}{\tau_1^2}} \, u^1(t - \delta_1^1 + \delta_1^2) \\
& + \frac{\tau_2^2 \, K_1^2 \, K_2^1}{1 - \frac{\tau_2^1}{\tau_2^2}} \, u^1(t - \delta_2^1 + \delta_2^2).
\end{aligned}$$

Sous l'hypothèse que les τ_i^j sont tous différents, on peut reconstituer toutes les variables du système à l'aide de combinaisons linéaires de $\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi}$. Plus précisément

$$\begin{aligned}
y_1(t) =& \frac{\xi^1(t-\delta_1^1) + \tau_2^1\ \dot{\xi}^1(t-\delta_1^1)}{(\tau_1^1 - \tau_2^1)\ K_2^1} + \frac{\xi^2(t-\delta_1^2) + \tau_2^2\ \dot{\xi}^2(t-\delta_1^2)}{(\tau_1^2 - \tau_2^2)\ K_2^2} \\
y_2(t) =& \frac{\xi^1(t-\delta_2^1) + \tau_1^1\ \dot{\xi}^1(t-\delta_2^1)}{(\tau_2^1 - \tau_1^1)\ K_1^1} + \frac{\xi^2(t-\delta_2^2) + \tau_1^2\ \dot{\xi}^2(t-\delta_2^2)}{(\tau_2^2 - \tau_1^2)\ K_1^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^1(t) =& \frac{\xi^1(t) + (\tau_1^1 + \tau_2^1)\ \dot{\xi}^1(t) + \tau_1^1\ \tau_2^1\ \ddot{\xi}^1(t)}{K_1^1\ K_2^1\ (\tau_1^1 - \tau_2^1)} \\
u^2(t) =& \frac{\xi^2(t) + (\tau_1^2 + \tau_2^2)\ \dot{\xi}^2(t) + \tau_1^2\ \tau_2^2\ \ddot{\xi}^2(t)}{K_1^2\ K_2^2\ (\tau_1^2 - \tau_2^2)}.
\end{aligned}$$

Ces relations montrent la relation biunivoque entre les trajectoires de ξ et celle des variables (y, u). On peut également écrire de manière équivalente les conditions initiales et finales dans les coordonnées des sorties δ-plates.

$$\begin{aligned}
\bar{\xi}^1 =& \frac{\tau_1^1\ K_2^1}{1 - \frac{\tau_1^2}{\tau_1^1}}\ (\bar{y}_1 - K_1^2\ \bar{u}^2) - \frac{\tau_2^1\ K_1^1}{1 - \frac{\tau_2^2}{\tau_2^1}}\ (\bar{y}_2 - K_2^2\ \bar{u}^2) \\
&+ \left(\frac{K_1^1\ K_2^1}{\frac{1}{\tau_2^2} - \frac{1}{\tau_2^1}} - \frac{K_1^1\ K_2^1}{\frac{1}{\tau_1^2} - \frac{1}{\tau_1^1}} \right)\ \bar{u}^1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\xi}^2 =& \frac{\tau_1^2\ K_2^2}{1 - \frac{\tau_1^1}{\tau_1^2}}\ (\bar{y}_1 - K_1^1\ \bar{u}^1) - \frac{\tau_2^2\ K_1^2}{1 - \frac{\tau_2^1}{\tau_2^2}}\ (\bar{y}_2 - K_2^1\ \bar{u}^1) \\
&+ \left(\frac{K_1^2\ K_2^2}{\frac{1}{\tau_2^1} - \frac{1}{\tau_2^2}} - \frac{K_1^2\ K_2^2}{\frac{1}{\tau_1^1} - \frac{1}{\tau_1^2}} \right)\ \bar{u}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\xi}^1 =& \frac{\tau_1^1\ K_2^1}{1 - \frac{\tau_1^2}{\tau_1^1}}\ (\tilde{y}_1 - K_1^2\ \tilde{u}^2) - \frac{\tau_2^1\ K_1^1}{1 - \frac{\tau_2^2}{\tau_2^1}}\ (\tilde{y}_2 - K_2^2\ \tilde{u}^2) \\
&+ \left(\frac{K_1^1\ K_2^1}{\frac{1}{\tau_2^2} - \frac{1}{\tau_2^1}} - \frac{K_1^1\ K_2^1}{\frac{1}{\tau_1^2} - \frac{1}{\tau_1^1}} \right)\ \tilde{u}^1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\xi}^2 =& \frac{\tau_1^2\ K_2^2}{1 - \frac{\tau_1^1}{\tau_1^2}}\ (\tilde{y}_1 - K_1^1\ \tilde{u}^1) - \frac{\tau_2^2\ K_1^2}{1 - \frac{\tau_2^1}{\tau_2^2}}\ (\tilde{y}_2 - K_2^1\ \tilde{u}^1) \\
&+ \left(\frac{K_1^2\ K_2^2}{\frac{1}{\tau_2^1} - \frac{1}{\tau_2^2}} - \frac{K_1^2\ K_2^2}{\frac{1}{\tau_1^1} - \frac{1}{\tau_1^2}} \right)\ \tilde{u}^2.
\end{aligned}$$

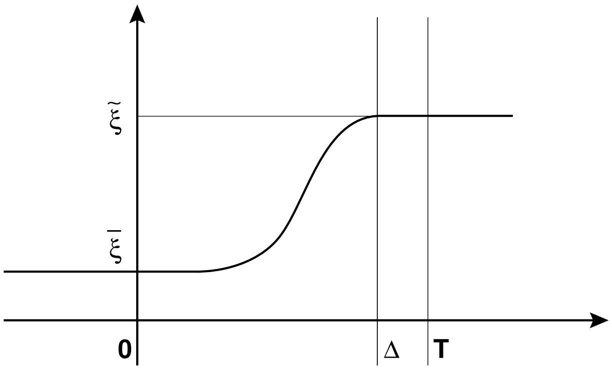

Figure 1 – Exemple de transition entre deux points stationnaires.

La continuité des commandes exige $\dot{\xi}(t \leq 0) = 0$, $\ddot{\xi}(t \leq 0) = 0$, $\dot{\xi}(t \geq \Delta) = 0$, $\ddot{\xi}(t \geq \Delta) = 0$ avec $\Delta = T - \max_{i,j}(\delta_i^j)$, sous l'hypothèse que $T > \max_{i,j}(\delta_i^j)$. N'importe quelle fonction régulière $[0, \Delta] \ni t \longmapsto \xi(t)$ vérifiant les conditions précédentes permet de calculer des commandes réalisant la transition entre les points stationnaires désirés (voir figure 1).

On pourra par exemple choisir

$$\xi(t) = \left(1 - \pi\left(\frac{t}{\Delta}\right)\right)\bar{\xi} + \pi\left(\frac{t}{\Delta}\right)\tilde{\xi}$$

où

$$\pi(\sigma) = \begin{cases} 0 & \sigma < 0 \\ 6\,\sigma^5 - 15\,\sigma^4 + 10\,\sigma^3 & 0 \leq \sigma \leq 1 \\ 1 & \sigma > 1. \end{cases}$$

En outre il est possible de raccorder en temps fini des trajectoires. Il suffit pour cela de remplacer $(\bar{y}, \bar{u})$ et $(\tilde{y}, \tilde{u})$ par $(\bar{y}, \bar{u})(t)$ et $(\tilde{y}, \tilde{u})(t)$, puis de calculer $\bar{\xi}(t)$ et $\tilde{\xi}(t)$ et d'utiliser

$$\xi(t) = \left(1 - \pi\left(\frac{t}{\Delta}\right)\right)\bar{\xi}(t) + \pi\left(\frac{t}{\Delta}\right)\tilde{\xi}(t).$$

Dans le cas général, sujet de la section suivante, nous prouvons la possibilité de paramétrer d'une manière semblable les trajectoires du système.

1.1. Résultat principal

Le système que nous considérons à partir de maintenant et nommons le *système original* possède p sorties et m entrées indépendantes. C'est un modèle classique en contrôle des procédés, voir [**Ste84**] et [**Buc64**, page 88].

Modèle. —

Entrées *Sorties*	u^1	$\dots$	u^m
$y_1 = z_1^1 + \dots + z_1^m$	z_1^1	$\dots$	z_1^m
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$y_p = z_p^1 + \dots + z_p^m$	z_p^1	$\dots$	z_p^m

où l'état partiel z_i^j vérifie

$$z_i^j = \frac{K_i^j e^{-\delta_i^j s}}{1 + \tau_i^j s} u^j,$$

où s est la variable associée à la transformée de Laplace, $i \in \{1, \dots, p\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$ $\tau_i^j \in R^{*+}, K_i^j \in R, \delta_i^j \in R^+$. $y_1, \dots, y_p$ sont les sorties du système, $u^1, \dots, u^m$ sont les commandes.

Clairement, $K_i^j = 0$ implique que l'entrée u^j n'affecte pas la sortie y_i.

Nous supposons que dans chaque colonne j, il existe un indice i_j tel que $K_{i_j}^j \neq 0$, ce qui signifie que chaque entrée a bien une influence sur le système.

Définition. — *Dans chaque colonne j, notons $\{z_{nz_1}^j, \dots, z_{nz_{t_j}}^j\}$ l'ensemble des états partiels z_i^j pour lesquels $K_i^j \neq 0$. Ce sont les seuls états intervenant vraiment sur les sorties. Parmi ceux-ci formons l'ensemble maximal $\{z_{i_1}^j, \dots, z_{i_{n_j}}^j\}$ tels que $\tau_{i_k}^j \neq \tau_{i_l}^j$ quel que soit $k, l \leq n_j$. Nous appelons ces états partiels les* **états partiels essentiels** *de la colonne. Chaque colonne contient au moins un de ces états partiels.*

Théorème 1.1 **(Résultat principal)**. — *Soit $\delta = \{e^{-\delta_i^j s}, i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, m\}$. Pour chaque colonne j, on peut exhiber ξ^j, une $R[\delta^{-1}]$ combinaison d'éléments de $\{z_{i_1}^j, \dots, z_{i_{n_j}}^j\}$ qui est une base du $R[\frac{d}{dt}, \delta, \delta^{-1}]$ module correspondant à la famille $\{u^j, z_{i_1}^j, \dots, z_{i_{n_j}}^j\}$. En outre ceci ne requiert aucune relation de commensurabilité entre les retards δ_i^j.*

On obtient alors $\{\xi^1, \dots, \xi^m\}$ qui est une base du $R[\frac{d}{dt}, \delta, \delta^{-1}]$ module correspondant au système original, module engendré par les états partiels essentiels et les entrées du système. Ceci prouve la δ-liberté de ce module (voir [**Mou95**] *et l'Annexe C).*

Construction de $\{\xi^1, \dots, \xi^m\}$. — Considérons n'importe laquelle des m colonnes, disons par exemple la $j^{ème}$.

Notons $\{z_{i_1}^j, \dots, z_{i_{n_j}}^j\}$ l'ensemble de ses états partiels essentiels. Clairement n_j, le nombre d'états partiels essentiels de la $j^{ème}$ colonne, dépend de j. Afin de simplifier les notations, notons maintenant $\{z_{i_1}^j, \dots, z_{i_{n_j}}^j\}$ par $\{z_1, \dots, z_q\}$. D'une certaine manière, nous oublions temporairement le numéro de la colonne sur laquelle nous travaillons et nous réordonnons les états partiels.

Recherchons une base du $R[\frac{d}{dt}, \delta, \delta^{-1}]$ module correspondant à $\{u^j, z^j_{i_1}, \ldots, z^j_{i_{n_j}}\}$. En d'autres termes, cherchons une base du $R[\frac{d}{dt}, \delta, \delta^{-1}]$ module correspondant à $\{u, z_1, \ldots, z_q\}$. Cherchons une telle base parmi les $R[\delta^{-1}]$ combinaisons suivantes

$$\xi = a_1 \ z_1(t+\delta_1) + \ldots + a_q \ z_q(t+\delta_q)$$

où les $a_1, \ldots, a_q$ sont à choisir. Calculons alors les dérivées successives de ξ.

$$\dot{\xi} = -\left(\frac{a_1}{\tau_1} \ z_1(t+\delta_1) + \ldots + \frac{a_q}{\tau_q} \ z_q(t+\delta_q)\right) + \left(\frac{a_1 \ K_1}{\tau_1} + \ldots + \frac{a_q \ K_q}{\tau_q}\right) \ u(t)$$

puisque

$$\dot{z_k}(t+\delta_k) = \frac{K_k \ u(t) - z_k(t+\delta_k)}{\tau_k}.$$

Débarrassons nous de $u(t)$ dans cette expression. Pour cela nous imposons

$$\frac{a_1 \ K_1}{\tau_1} + \ldots + \frac{a_q \ K_q}{\tau_q} = 0.$$

La dérivée suivante s'écrit

$$\ddot{\xi} = \ \left(\frac{a_1}{(\tau_1)^2} \ z_1(t+\delta_1) + \ldots + \frac{a_q}{(\tau_q)^2} \ z_q(t+\delta_q)\right) + \left(\frac{a_1 \ K_1}{(\tau_1)^2} + \ldots + \frac{a_q \ K_q}{(\tau_q)^2}\right) \ u(t).$$

Une fois de plus nous annulons le terme multipliant $u(t)$ en imposant

$$\frac{a_1 \ K_q}{(\tau_1)^2} + \ldots + \frac{a_q \ K_q}{(\tau_q)^2} = 0.$$

Nous procédons ainsi jusqu'à la dérivée $(q-1)^{ème}$ de ξ

$$\begin{aligned}(\xi)^{(q-1)} =&(-1)^{(q-1)} \left(\frac{a_1}{(\tau_1)^{(q-1)}} \ z_1(t+\delta_1) + \ldots + \frac{a_q}{(\tau_q)^{(q-1)}} \ z_q(t+\delta_q)\right) \\ &+ \left(\frac{a_1 \ K_1}{(\tau_1)^{(q-1)}} + \ldots + \frac{a_q \ K_q}{(\tau_q)^{(q-1)}}\right) \ u(t).\end{aligned}$$

La dernière condition est

$$\frac{a_1 \ K_1}{(\tau_1)^{(q-1)}} + \ldots + \frac{a_q \ K_q}{(\tau_q)^{(q-1)}} = 0.$$

Finalement si les $q-1$ équations de C portant sur les q variables a_i sont satisfaites alors D est vérifiée

$$C : \left\{\begin{array}{rcl} \frac{a_1 \ K_1}{\tau_1} + \ldots + \frac{a_q \ K_q}{\tau_q} & = & 0 \\ \frac{a_1 \ K_1}{(\tau_1)^2} + \ldots + \frac{a_q \ K_q}{(\tau_q)^2} & = & 0 \\ & \vdots & \\ \frac{a_1 \ K_1}{(\tau_1)^{(q-1)}} + \ldots + \frac{a_q \ K_q}{(\tau_q)^{(q-1)}} & = & 0 \end{array}\right.$$

$$D : \begin{cases} \xi &= a_1\ z_1(t+\delta_1) + \ldots + a_q\ z_q(t+\delta_q) \\ \dot{\xi} &= -\left(\frac{a_1}{\tau_1}\ z_1(t+\delta_1) + \ldots + \frac{a_q}{\tau_q}\ z_q(t+\delta_q)\right) \\ &\vdots \\ (\xi)^{(q-1)} &= (-1)^{(q-1)}\ \left(\frac{a_1}{(\tau_1)^{(q-1)}}\ z_1(t+\delta_1) + \ldots + \frac{a_q}{(\tau_{i_q})^{(q-1)}}\ z_q(t+\delta_q)\right). \end{cases}$$

Résultats techniques. —

Proposition 1.2. — *Le système d'équations linéaires C est sous-déterminé. En lui ajoutant une condition de normalisation, par exemple $a_1 = 1$, on obtient une unique solution vérifiant $(a_i)_{i=1\ldots q} \neq 0$.*

Démonstration. — L'ajout de la condition $a_1 = 1$ nous donne un système linéaire carré

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{K_1}{\tau_1} & \frac{K_2}{\tau_2} & \ldots & \frac{K_q}{\tau_q} \\ \frac{K_1}{(\tau_1)^2} & \frac{K_2}{(\tau_2)^2} & \ldots & \frac{K_q}{(\tau_q)^2} \\ \\ \frac{K_1}{(\tau_1)^{(q-1)}} & \frac{K_2}{(\tau_2)^{(q-1)}} & \ldots & \frac{K_q}{(\tau_q)^{(q-1)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \\ a_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix}.$$

– Montrons en premier que ce système est inversible en regardant son déterminant.

$$\begin{aligned} det =& 1 \begin{vmatrix} \frac{K_2}{\tau_2} & \ldots & \frac{K_q}{\tau_q} \\ \frac{K_2}{(\tau_2)^2} & \ldots & \frac{K_q}{(\tau_q)^2} \\ \\ \frac{K_2}{(\tau_2)^{(q-1)}} & \ldots & \frac{K_q}{(\tau_q)^{(q-1)}} \end{vmatrix} \\ =& \frac{K_2}{\tau_2} \ldots \frac{K_q}{\tau_q} \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \frac{1}{(\tau_2)} & \ldots & \frac{1}{(\tau_q)} \\ \\ \frac{1}{(\tau_2)^{(q-2)}} & \ldots & \frac{1}{(\tau_q)^{(q-2)}} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

On reconnaît ici un déterminant de Vandermonde. On obtient alors

$$det = \prod_{2 \leq m \leq q} \frac{K_m}{\tau_m} \prod_{2 \leq k < l \leq q} \left(\frac{1}{\tau_l} - \frac{1}{\tau_k}\right).$$

Puisque les $\{z_1, \ldots, z_q\}$ sont les états partiels essentiels de la colonne, nous savons que

- quel que soit m tel que $2 \leq m \leq n_j$ on a $K_m \neq 0$
- quels que soient k, l tels que $2 \leq k < l \leq n_j$ on a $\tau_l \neq \tau_k$.

En conséquence le déterminant du système est non nul, le système est donc inversible.

– Ensuite montrons que tous les $(a_i)_{i=1\dots q}$ sont non nuls.

Les formules de Cramer nous donnent quel que soit $k \in \{2, \dots, q\}$

$$
a_k = \begin{vmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
\frac{K_1}{\tau_1} & \frac{K_2}{\tau_2} & \dots & \frac{K_{k-1}}{\tau_{k-1}} & 0 & \frac{K_{k+1}}{\tau_{k+1}} & \dots & \frac{K_q}{\tau_q} \\
\frac{K_1}{(\tau_1)^2} & \frac{K_2}{(\tau_2)^2} & \dots & \frac{K_{k-1}}{(\tau_{k-1})^2} & 0 & \frac{K_{k+1}}{(\tau_{k+1})^2} & \dots & \frac{K_q}{(\tau_q)^2} \\
 & & & & & & & \\
\frac{K_1}{(\tau_1)^{(q-1)}} & \frac{K_2}{(\tau_2)^{(q-1)}} & \dots & \frac{K_{k-1}}{(\tau_{k-1})^{(q-1)}} & 0 & \frac{K_{k+1}}{(\tau_{k+1})^{(q-1)}} & \dots & \frac{K_q}{(\tau_q)^{(q-1)}}
\end{vmatrix}
$$

$$
\times \begin{vmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 \\
\frac{K_1}{\tau_1} & \frac{K_2}{\tau_2} & \dots & \frac{K_q}{\tau_q} \\
\frac{K_1}{(\tau_1)^2} & \frac{K_2}{(\tau_2)^2} & \dots & \frac{K_q}{(\tau_q)^2} \\
 & & & \\
\frac{K_1}{(\tau_1)^{(q-1)}} & \frac{K_2}{(\tau_2)^{(q-1)}} & \dots & \frac{K_q}{(\tau_q)^{(q-1)}}
\end{vmatrix}^{-1}.
$$

En développant le numérateur nous obtenons alors

$$
\begin{aligned}
a_k =& (-1)^k \left(\prod_{l \neq k} \frac{K_l}{\tau_l} \right) \\
& \times \begin{vmatrix}
1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\
\frac{1}{(\tau_1)} & \dots & \frac{1}{(\tau_{k-1})} & \frac{1}{(\tau_{k+1})} & \dots & \frac{1}{(\tau_q)} \\
 & & & & & \\
\frac{1}{(\tau_1)^{(q-2)}} & \dots & \frac{1}{(\tau_{k-1})^{(q-2)}} & \frac{1}{(\tau_{k+1})^{(q-2)}} & \dots & \frac{1}{(\tau_q)^{(q-2)}}
\end{vmatrix} \\
& \times \begin{vmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 \\
\frac{K_1}{\tau_1} & \frac{K_2}{\tau_2} & \dots & \frac{K_q}{\tau_q} \\
\frac{K_1}{(\tau_1)^2} & \frac{K_2}{(\tau_2)^2} & \dots & \frac{K_q}{(\tau_q)^2} \\
 & & & \\
\frac{K_1}{(\tau_1)^{(q-1)}} & \frac{K_2}{(\tau_2)^{(q-1)}} & \dots & \frac{K_q}{(\tau_q)^{(q-1)}}
\end{vmatrix}^{-1}.
\end{aligned}
$$

Ceci donne

$$
\begin{aligned}
a_k =& (-1)^k \frac{\prod_{l \neq k} \frac{K_l}{\tau_l}}{\prod_{l=2}^{q} \frac{K_l}{\tau_l}} \frac{\prod_{l=2, l \neq k}^{l=q} \left(\frac{1}{\tau_l} - \frac{1}{\tau_1} \right)}{\prod_{l=2, l \neq k}^{l=q} \left(\frac{1}{\tau_l} - \frac{1}{\tau_k} \right)} \\
=& (-1)^k \frac{\tau_k}{\tau_1} \frac{K_1}{K_k} \frac{\prod_{l=2, l \neq k}^{l=q} \left(\frac{1}{\tau_l} - \frac{1}{\tau_1} \right)}{\prod_{l=2, l \neq k}^{l=q} \left(\frac{1}{\tau_l} - \frac{1}{\tau_k} \right)}.
\end{aligned}
$$

Puisque les $\{z_1, \ldots, z_q\}$ sont les états partiels essentiels nous pouvons conclure que pour tout $k \in \{2, \ldots, q\}$, $a_k \neq 0$.

□

Proposition 1.3. — *Le système linéaire D est inversible.*

Démonstration. — On peut réécrire le système D sous la forme

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \dot{\xi} \\ \vdots \\ \xi^{(q-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_q \\ -\frac{a_1}{\tau_1} & \ldots & -\frac{a_q}{\tau_q} \\ \vdots & & \vdots \\ (-1)^{(q-1)} \frac{a_1}{(\tau_1)^{(q-1)}} & \ldots & (-1)^{(q-1)} \frac{a_q}{(\tau_q)^{(q-1)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t+\delta_1) \\ \vdots \\ z_q(t+\delta_q) \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est

$$det = (-1)^{\frac{(q-1)q}{2}} \prod_{i=1}^{q} a_i \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \frac{1}{\tau_1} & \ldots & \frac{1}{\tau_q} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{(\tau_1)^{(q-1)}} & \ldots & \frac{1}{(\tau_q)^{(q-1)}} \end{vmatrix}.$$

Nous savons d'après la proposition 1.2 que $\prod_{i=1}^{q} a_i \neq 0$. D'autre part nous avons un autre déterminant de Vandermonde. Puisque les $\{z_1, \ldots, z_q\}$ sont les états partiels essentiels, ce déterminant est non nul et D est inversible. □

Proposition 1.4. — *ξ est une base du $R[\frac{d}{dt}, \delta, \delta^{-1}]$ module correspondant à $\{u, z_1, \ldots, z_q\}$ (en d'autres termes, ξ^j est une base du $R[\frac{d}{dt}, \delta, \delta^{-1}]$ module correspondant à $\{u^j, z^j_{i_1}, \ldots, z^j_{i_{n_j}}\}$).*

Démonstration. — Puisque D est inversible on peut calculer $z_1(t+\delta_1), \ldots z_q(t+\delta_q)$ grâce à $\xi(t), \ldots, \xi^{(q-1)}(t)$.

Enfin on peut utiliser n'importe laquelle des équations des dynamiques des états partiels essentiels pour reconstituer l'entrée u. Ainsi

$$u(t) = \frac{\tau_1 \; \dot{z_1}(t+\delta_1) + z_1(t+\delta_1)}{K_1}.$$

□

Proposition 1.5. — *Pour chaque colonne j construisons ξ^j. La famille $\{\xi^1, \ldots, \xi^m\}$ constitue un base du $R[\frac{d}{dt}, \delta]$ module engendré par les états partiels essentiels et les entrées du système original.*

Démonstration. — Quel que soit $j = 1, \ldots, m$, ξ^j est une base du module correspondant aux états partiels essentiels de la colonne et à son entrée $\{u^j, z^j_{i_1}, \ldots, z^j_{i_{n_j}}\}$. Constituons la famille $\{\xi^1, \ldots, \xi^m\}$. Cette famille engendre tous les états partiels essentiels du système original. D'autre part cette famille est libre car elle engendre m

entrées qui sont indépendantes. Nous pouvons donc conclure que c'est une base du module engendré par les états partiels essentiels et les entrées du système original. □

Proposition 1.6. — *Le système original admet une représentation δ-libre.*

Démonstration. — Nous avons calculé une base $\{\xi^1, \dots, \xi^m\}$ du $R[\frac{d}{dt}, \delta, \delta^{-1}]$ module correspondant à une représentation du système original. Cette représentation est donc δ-libre. □

Remarque. — On peut si cela est nécessaire, calculer parmi les $\{z^j_{nz_1}, \dots, z^j_{nz_{t_j}}\}$ les états partiels qui ne font pas partie des états partiels essentiels $\{z^j_{i_1}, \dots z^j_{i_{n_j}}\}$. Notons ces ***états partiels non essentiels*** $z^j_{ne_1}, \dots, z^j_{ne_{tne_j}}$. Clairement $t_j = tne_j + n_j$. Pour chaque $z^j_{i_{ne_h}}$ on peut trouver un état partiel essentiel $z^j_{i_{n_p}}$ tel que $\tau^j_{i_{n_p}} = \tau^j_{i_{ne_h}} = \tau$. Il existe donc un élément de torsion du module correspondant à $\{z^j_{nz_1}, \dots, z^j_{nz_{t_j}}\}$: soit

$$w(t) = \frac{z^j_{i_{ne_h}}(t + \delta^j_{i_{ne_h}})}{K^j_{i_{ne_h}}} - \frac{z^j_{i_{n_p}}(t + \delta^j_{i_{n_p}})}{K^j_{i_{n_p}}}.$$

Cet élément est de torsion car il vérifie l'équation autonome

$$\tau \ \dot{w}(t) = -w(t).$$

Ainsi, à une condition initiale près, la connaissance de $z^j_{i_{n_p}}$ est équivalente à celle de $z^j_{i_{ne_h}}$. De même la connaissance de $z^j_{i_1}, \dots z^j_{i_{n_j}}$ est équivalente à la connaissance de la famille $\{z^j_{nz_1}, \dots, z^j_{nz_{t_j}}\}$.

En fait les états partiels non essentiels peuvent être considérés comme la partie non-minimale de la réalisation du système.

1.2. Conclusion

Nous avons montré qu'une large classe de systèmes linéaires à retards, très utilisés en génie des procédés, était δ-plat. Cela signifie, comme pour les systèmes plats, que nous avons une paramétrisation explicite des trajectoires de ses systèmes via une famille finie de fonctions indépendantes et de leurs dérivées. Dans le chapitre suivant, nous utilisons cette propriété pour générer des trajectoires (voir aussi l'Annexe D pour certains détails).

CHAPITRE 2

CONTRÔLE EN TEMPS MINIMUM DE L'ACIDITÉ POUR UNE UNITÉ D'ALKYLATION

Nous présentons ici à travers une application industrielle une méthode générale de commande en temps minimum pour les systèmes linéaires à retards dont nous avons établi la propriété de platitude au chapitre 1.

Le contrôleur que nous présentons est en service sur l'unité de régulation du circuit acide de l'unité d'alkylation de la raffinerie ELF-ANTAR France de Feyzin (Rhône) depuis janvier 1997.

Nous détaillons l'installation industrielle et le problème de contrôle et montrons qu'il s'écrit sous la forme d'un problème d'optimisation que nous résolvons de manière approchée à l'aide d'une discrétisation de la sortie plate du système, ce qui nous permet de nous ramener à un problème de dimension finie.

La section 2.4 est consacrée à la preuve de la convergence de cette méthode. Plus précisément nous prouvons que notre méthode de résolution du temps minimum sous contraintes par discrétisation converge effectivement vers la solution du problème continu, lorsqu'elle existe, lorsque le pas de discrétisation tend vers 0. Ces travaux sont l'objet de [**PCR99**] (soumis à publication).

Nous présentons également les solutions apportées en pratique aux problèmes d'estimation. Nous concluons en donnant des résultats d'exploitation sur une période de 6 mois.

Introduction

L'alkylation en raffinerie. — L'alkylation des butènes est une opération courante dans les raffineries pétrolières. Cette opération permet la synthèse d'alkylats, produits intéressants pour leur indice d'octane élevé et utilisé dans la composition de carburants. Il existe plusieurs types de procédés, celui que nous décrivons ici utilise l'acide sulfurique comme catalyseur, il équipe la raffinerie Elf Antar France de Feyzin, voir figure 1.

Catalyse acide. — Le catalyseur acide alimente en série et de manière continue deux réacteurs. Partiellement détérioré au cours de l'alkylation, le catalyseur est soutiré du second réacteur et dirigé vers un ballon de stockage pour une régénération hors site. Il est nécessaire de maintenir une quantité minimale de catalyseur dans les réacteurs pour que la réaction se déroule correctement. On peut en fournir plus que le minimum requis pour éviter les risques de dysfonctionnement mais cela induit de coûteuses surconsommations. L'opérateur cherche donc à stabiliser l'unité légèrement au dessus de la quantité minimale requise. La détérioration du catalyseur est très lente, ce qui rend difficile un pilotage manuel.

Limiter l'appoint d'acide. — En 1996, la raffinerie a décidé de mettre en place un régulateur afin de limiter la consommation d'acide. L'unité étant très lente, nous avons choisi de mettre en œuvre un algorithme de commande en temps minimal. Ce régulateur fonctionne depuis janvier 1997, avec un taux d'utilisation supérieur à 98%. Il a permis de diminuer d'environ 5% la consommation annuelle d'acide.

2.1. Présentation du procédé

Circuit hydrocarbure et circuit acide. — L'alkylation comporte deux circuits qui sont représentés sur la figure 1 : un circuit hydrocarbures et un circuit acide. L'unité fait réagir des butènes et de l'isobutane pour former préférentiellement des iso-octanes (alkylats).

$$\underset{\text{isobutane}}{(CH_3)_3CH} + \underset{\text{butène}}{C_4H_8} \longrightarrow \underset{\text{iso-octane}}{(CH_3)_2CH - CH_2C(CH_3)_3}$$

Les flux riches en butènes (charge oléfinique) et en isobutane (recycle) sont mélangés puis envoyés vers les deux réacteurs en parallèle où la réaction se déroule, catalysée par l'acide sulfurique. Le produit de la réaction est flashé[(1)]. La partie gaz est dirigée vers un circuit frigorifique. Celui-ci permet de générer un recycle froid qui, mélangé à la charge oléfinique et au recycle, compense en partie l'exothermicité de la réaction. La partie liquide est lavée puis dirigée vers un déisobutaniseur. Le déisobutaniseur permet de concentrer en tête les isobutanes apportés par une charge dite saturée et ceux encore présents dans la partie liquide du flash. Au fond de cette colonne sont essentiellements soutirés l'alkylat et le normal-butane (autre inerte), qui seront ensuite séparés.

Consommation de l'acide. — Le circuit acide fonctionne en série sur les deux réacteurs. Un flux d'acide frais (i.e. riche en acide suflurique) entre dans le premier réacteur et circule entre celui-ci et le décanteur associé. Des effets parasites liés notamment

[(1)]il s'agit d'une détente permettant la récupération des produits volatiles

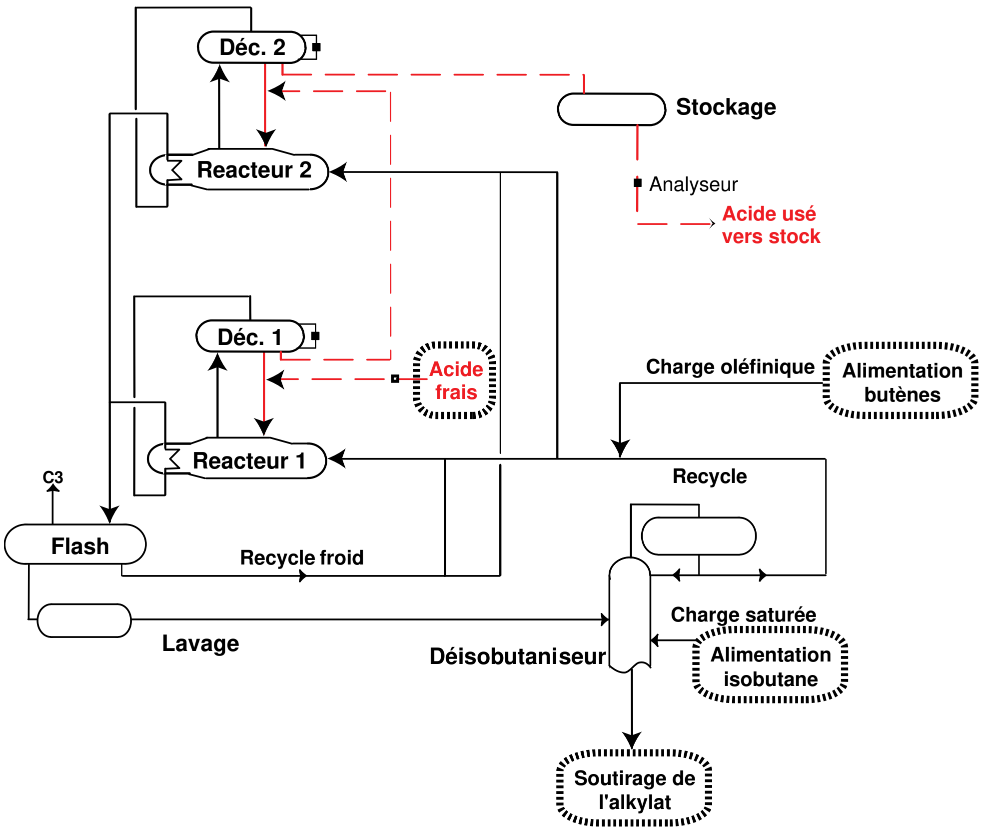

Figure 1 – Procédé d'alkylation. Entrées : alimentation en butènes, alimentation en isobutane, appoint d'acide frais. Sortie : soutirage de l'alkylat. Circuit acide en pointillés.

à des réactions avec des impuretés présentes en petites quantités dans les charges d'hydrocarbures induisent une déconcentration de l'acide (on parle de consommation d'acide). Un débit équivalent à celui du flux d'acide frais est soutiré du premier décanteur et alimente le second réacteur où une circulation similaire est mise en œuvre avec un décanteur associé. Le second réacteur induit lui aussi une consommation d'acide. Le flux d'acide usé est soutiré du second décanteur et part dans un ballon de stockage plein d'où il est extrait pour être régénéré hors du site. La concentration est analysée en sortie du ballon de stockage : ceci donne un élément quantitatif sur ce qui est attendu de la régénération.

Seuil minimal d'acidité. — Il est nécéssaire d'ajuster le débit d'acide frais afin de compenser les variations de la consommation d'acide, pour ne pas franchir un seuil minimal de concentration en deça duquel les réactions parasites deviennent prépondérantes et induisent des dysfonctionnements graves de l'unité. La concentration étant par construction la plus faible à la sortie du second décanteur, il suffit de surveiller celle-ci pour garantir un fonctionnement correct des deux réacteurs. Mais s'autoriser d'amples marges de sécurité se traduit par un fort débit d'acide frais, donc par un surcoût : il est préférable de travailler près du minimum requis.

Lenteur de la dynamique. — Le circuit acide se caractérise par la lenteur des variations de la concentration de l'acide. L'effet d'une modification du débit d'acide frais est pleinement ressenti au bout d'environ une semaine. Par ailleurs, une telle modification entraîne des temps de passage dans le ballon de stockage : ceux-ci varient de 8 à 24 heures environ.

2.2. Résolution du problème de commande

Dans un premier temps, nous modélisons le circuit acide. Le modèle physique permet de déduire un modèle linéaire suffisant pour la commande. Il est souhaitable de réguler la sortie du second décanteur plutôt qur la sortie du ballon de stockage. Ceci implique toutefois la construction d'un estimateur car seule la sortie du ballon de stockage est mesurée. Nous nous servons aussi du modèle physique pour construire cet estimateur.

2.2.1. Modélisation. — Le circuit acide peut être vu comme deux blocs en série suivis d'un ballon de stockage. Ce ballon est plein et on peut l'assimiler à un réacteur piston. Chaque bloc comporte un réacteur (ou contacteur) et un décanteur. D'une manière assez réaliste on peut le considérer comme un réacteur parfaitement agité. Le modèle du circuit acide est donc formé par la concaténation des deux modèles de blocas et du modèle de ballon de stockage.

Équations bilans. — Pour chaque bloc, l'équation bilan sur la masse partielle d'acide sulfurique donne

$$\rho V \frac{dx}{dt} = -\left(u + A(p)\right) x + u x_{in},$$

où

- ρ est la masse volumique de l'acide sulfurique (supposée constante) ;
- V est le volume d'acide dans le bloc (contacteur+ décanteur), supposé constant ;
- x est la teneur en acide dans le bloc. Comme le bloc est parfaitement agité, nous considérons que cette concentration est égale à la concentration en sortie ;
- x_{in} est la teneur en acide du flux entrant ;
- u est le débit entrant et sortant ;

- A est un terme de consommation. Il dépend d'un ensemble de perturbations noté p et prend en compte l'ensemble des effets induisant une déconcentration mesurable de l'acide.

Retard sur la mesure. — Le ballon de stockage est assimilé à un réacteur piston. D'un point de vue dynamique, ce ballon introduit dans le système un retard égal au rapport entre la masse d'acide retenue et le débit circulant.

Modèle. — *Finalement, le modèle du circuit acide s'écrit*

$$\rho V_1 \frac{dx_1}{dt} = -\left(u + A_1(p)\right) x_1 + ux_f \tag{1}$$

$$\rho V_2 \frac{dx_2}{dt} = -\left(u + A_2(p)\right) x_2 + ux_1 \tag{2}$$

$$y = x_2(t - \frac{K}{u}), \tag{3}$$

où

- *x_1 et x_2 représentent respectivement la concentration en acide sulfurique à la sortie du premier et du second bloc ;*
- *u est la commande, i.e. le débit entrant dans le premier réacteur ;*
- *x_f est la concentration du flux d'alimentation ;*
- *A_1 et A_2 représentent respectivement les débits spécifiques dans le premier et dans le second bloc ;*
- *ρ est la masse volumique de l'acide ;*
- *V_1 et V_2 représentent les volumes d'acide dans le premier et le second bloc ;*
- *y est la sortie mesurée : concentration en acide à la sortie du ballon. La dépendance du retard par rapport à la commande est exprimée par le terme $\frac{K}{u}$.*

2.2.2. Commande. —

Modèle de commande. — D'après la structure type "cascade" des deux blocs, si on contrôle correctement x_2 alors on contrôle x_1 d'après l'équation (2). Pour agir le plus efficacement possible, nous commandons une estimation de x_2. Comme y correspond à la valeur retardée de x_2, si x_2 est bien régulée, alors il en sera de même pour y. Nous verrons dans ce qui suit comment est utilisé le modèle de connaissance pour construire une estimation de x_2. À cause des dynamiques très lentes, lorsque la situation est analysée sur une plage de temps de l'ordre de quelques heures, il est possible de résumer le modèle pour la commande à son l'approximation linéaire autour du point de fonctionnement désiré

$$\frac{d}{dt}(x - x^{moy}) = a(u - u^{moy}) + \pi - \pi^{moy},$$

où

- x est la teneur en acide sulfurique en sortie du second bloc (x_2) et x^{moy} sa valeur moyenne (nous simplifions les notations : x correspond à x_2 dans les sections précédentes) ;
- u est la commande et u^{moy} sa valeur moyenne ;
- π représente la contribution des perturbations mesurables p et π^{moy} sa valeur moyenne ;
- a représente le gain par unité de temps.

Simplification de la dynamique. — En d'autres termes, en notant $P = -au^{moy} + \pi - \pi^{moy}$ et en considérant que x^{moy} est constant,

$$\frac{dx}{dt} = au + P. \tag{4}$$

Le gain a et la valeur de P (constante) sont obtenus à partir d'une approximation tangente du modèle de base (pente à l'origine d'une réponse à un échelon).

Commande sous contraintes en temps minimal par platitude. — L'idée repose sur la possibilité de paramétrer explicitement par x, la sortie plate, l'ensemble des trajectoires du système. En supposant x connu, u se déduit immédiatement : les contraintes sur x, sur la commande et sur ses variations s'expriment toutes linéairement en fonction de x. En discrétisant le modèle on transforme ce problème de commande optimale en un problème de dimension finie. La question de l'existence d'une trajectoire se ramène à une question d'existence de solutions pour un problème de programmation linéaire. En cas de solutions multiples, la solution choisie est celle donnant le temps minimal pour le retour à la consigne de x.

Expression des contraintes. — En effet, notons x^i les valeurs de x aux $n-1$ instants futurs d'échantillonnage et exprimons les contraintes qui doivent être satisfaites sur cet horizon, l'exposant 1 reprérant la valeur actuelle. Les n contraintes sur x s'écrivent $x^{min} \leq x^i \leq x^{max}$. Les $n-1$ contraintes sur u s'écrivent $a\Delta u^{min} + \Delta P^i \leq x^{i+1} - x^i \leq a\Delta u^{max} + \Delta P^i$, où Δ est la période d'échantillonnage et P^i la contribution des perturbations à l'instant i. Le signe de a influe sur ces inégalités. Il est ici strictement positif. Les contraintes sur les variations de u donnent une expression similaire. L'atteinte de la consigne en régime stable est garantie par l'ajout des contraintes $x^n = x^{n-1} = x^{setpoint}$. Enfin, la mesure x^{mes} de x (ou son estimation dans notre cas) est prise en compte par $x^1 = x^{mes}$. L'ensemble des contraintes peut se résumer par $AX \leq B$, X étant le vecteur des x^i. Tout X satisfaisant cette inégalité permet de construire un profil de commande admissible

$$u^i = \frac{x^{i+1} - x^i - \Delta P^i}{a\Delta} \; \forall i = 1, n-1$$

Résolution du temps minimum par dichotomie. — Comme il peut exister plusieurs solutions pour X, il faut un mécanisme aboutissant à une solution unique. Effectuer une dichotomie sur n pour trouver le vecteur X de plus petite dimension satisfaisant l'ensemble des contraintes constitue le mécanisme que nous mettons en œuvre. C'est une commande en temps minimal.

Itération à chaque pas de temps. — Seule la commande u^1 est appliquée et le processus est réitéré à chaque instant d'échantillonnage, pour compenser en partie les perburbations non mesurables et les erreurs de modélisation. À chaque passage, nous calculons une prédiction pour le passage suivant

$$x^{pred} = x^{mes} + \Delta a(u - u^{moy}) + \Delta(\pi - \pi^{moy}).$$

Au passage suivant, l'écart filtré entre la prédiction et la "mesure" est introduit dans le terme P. C'est une méthode standard de compensation.

2.2.3. Estimation. —

Recopie du système et recalage avec mesure retardée. — La commande exposée précédemment suppose la connaissance de x_2. Or, nous ne disposons que de y : il nous faut construire une observation de x_2 à partir d'une mesure retardée, le retard étant en outre variable. Nous avons essayé plusieurs approches pour finalement retenir celle-ci

$$\rho V_1 \frac{dz_1}{dt} = -\left((u + A_1(p))\, z_1 + u x_f\right) \tag{5}$$

$$\rho V_2 \frac{dz_2}{dt} = -\left(u + A_2(p)\right) z_2 + u z_1 \tag{6}$$

$$\hat{y} = z_2 + \varphi(z_2(t - \frac{K}{u}), y), \tag{7}$$

où l'état estimé z, φ représente un filtre (contenant un intégrateur) de l'écart entre l'estimation retardée et la mesure y.

Convergence. — Les deux premières équations de ce système sont une recopie de celles du modèle. Plus précisément, il est possible de prouver que, si le système n'est pas perturbé, z_1 et z_2 convergent vers x_1 et x_2. Classiquement, bien que ce système dépende du temps, sa forme triangulaire permet de montrer que z_1 converge exponentiellement vers x_1 car $(u + A_1(p))$ est borné inférieurement par une constante positive. Puis on peut prouver que z_2 converge exponentiellement vers x_2 car $(u + A_2(p))$ est borné inférieurement par une constante positive et que $(z_1 - x_1)$ est une fonction exponentiellement décroisante (voir [**Kha92**]).

2.2.4. Mise en place. — La mise en place de ce régulateur a pris environ 6 mois. La raffinerie Elf Antar France de Feyzin et le Centre de Recherches Elf à Solaize ont d'abord mis au point et validé le modèle de l'unité (nous remercions ici MM. Dajczman -Feyzin- et Djenab -CRES-). La recherche d'un estimateur a pris plus de temps, le problème étant d'acquérir de la robustesse vis à vis des imprécisions sur les retards variables.

L'agorithme est implementé sur un calculateur HP1000 de la raffinerie. Son exécution est lancée toutes les 15 minutes.

2.3. Résultats industriels

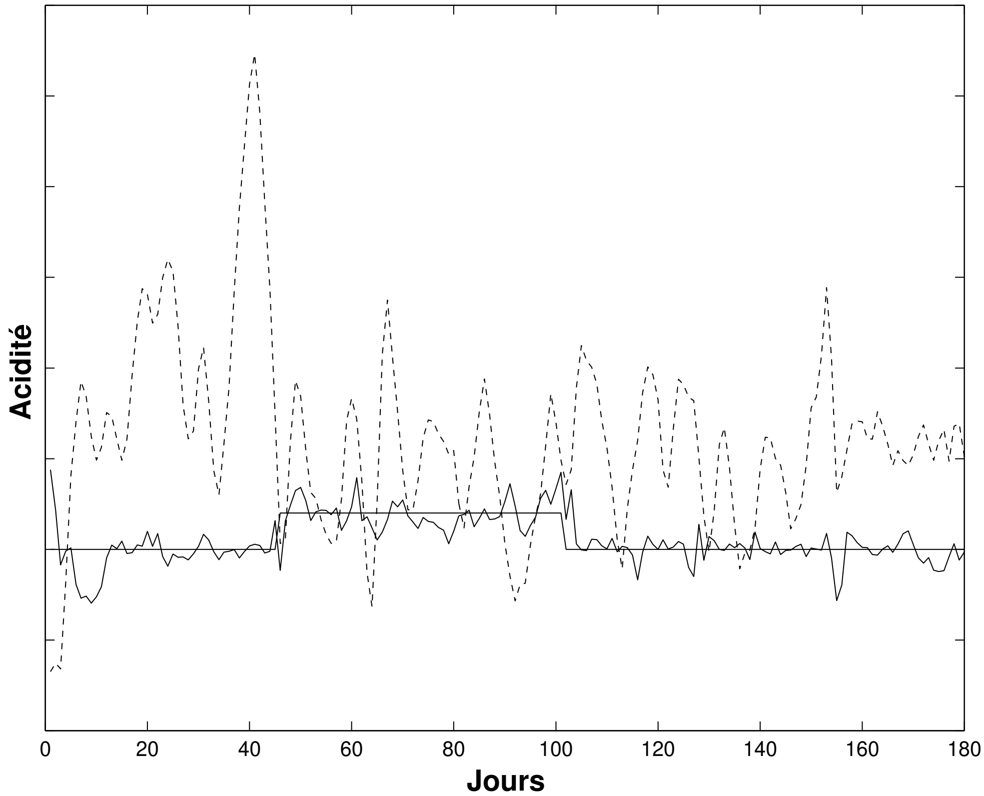

Figure 2 – Moyennes journalières de l'acidité sur une période de 6 mois : point de consigne, résultats avec notre contrôleur, et sans (en pointillés) d'après historique.

Utilisation depuis janvier 1997. — Le dispositif de contrôle a été très rapidement accepté par les opérateurs. Depuis son installation, il a pratiquement toujours été bouclé (taux de bouclage supérieur à 98%). Pour commencer les opérateurs ont d'abord observé son comportement avec un point consigne supérieur à l'objectif. Ils ont été rapidement convaincus par son comportement et par sa capacité à stabiliser l'unité (alors que l'action du régulateur intervenait avant les mesures de concentration, ce qui était une surprise à première vue). Après une courte période, ils ont accepté d'abaisser le point de consigne et donc de diminuer la quantité nécessaire d'acide frais. Nous donnons les résultats de notre contrôleur sur une période de 6 mois à la figure 2. On peut comparer ces résultats avec, en sur-impression, les résultats de l'unité sans

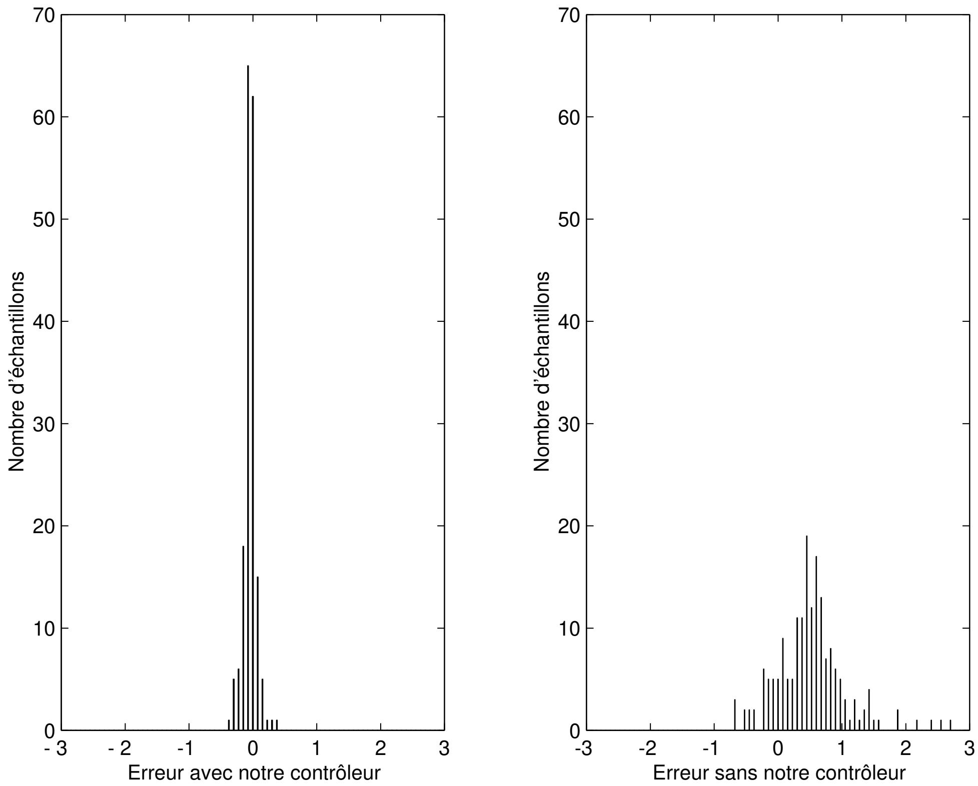

Figure 3 – Histogramme correspondant à la figure 2. Période de 6 mois. Moyennes journalières de l'écart entre entre l'acidité et sa consigne : à gauche avec notre contrôleur, à droite sans notre contrôleur (d'après historique).

contrôleur sur une période similaire. On a également représenté ces données sous forme d'histogrammes sur la figure 3.

Gains réalisés. — Le contrôleur a deux aspects positifs. D'une part il soulage les opérateurs et leur permet de se concentrer sur des tâches plus délicates. D'autre part par sa capacité de stabilisation et de rejet de perturbation, il permet de baisser le point de consigne, et d'ainsi économiser environ 5% d'acide frais.

2.4. Résolution numérique

Dans ce qui suit nous montrons comment transformer une solution du problème discret en une solution d'un problème continu. La régularisation s'effectue par une convolution avec un noyau C^∞ suivi d'une homothétie temporelle (on trouvera des détails sur la technique de régularisation dans [**Sch73**, pages 165–167]). On démontre ainsi la proposition 2.1.

Ensuite nous montrons (proposition 2.8 et proposition 2.9) que le problème continu et le problème discret possède une unique solution en temps minimum.

Enfin nous concluons (théorème 2.10) que lorsque le pas de la discrétisation temporelle tends vers zéro, la solution du problème discret converge vers la solution du problème continu.

Notation. — Considérons un ensemble de nombre réels $Y_{min}^{(0)}, Y_{max}^{(0)}, Y_{max}^{(1)}, Y_{max}^{(2)}$ supposés tels que $Y_{max}^{(1)} \geq 0$, $Y_{max}^{(2)} \geq 0$, notons $C(T)$ le sous-ensemble des fonctions $Y \in C^2([O,T])$ vérifiant les conditions suivantes

$$C(T) : \begin{cases} \forall t \in]0,T[: \\ Y_{min}^{(0)} \leq Y(t) \leq Y_{max}^{(0)} \\ \left|\dot{Y}(t)\right| \leq Y_{max}^{(1)} \\ \left|\ddot{Y}(t)\right| \leq Y_{max}^{(2)} \\ Y(0) = 0, \dot{Y}(0) = 0, \ddot{Y}(0) = 0 \\ Y(T) = 1, \dot{Y}(T) = 0, \ddot{Y}(T) = 0. \end{cases}$$

Notons $D(N, \delta t)$ l'ensemble des échantillons $Y_N = [Y_N(0), Y_N(1), \ldots, Y_N(N)]$ vérifiant les conditions suivantes

$$D(N,\delta t) : \begin{cases} \forall i \in \mathbb{N}(\text{ où si nécessaire } Y_N(i<0) = Y_N(0))\,, Y_N(i>N) = Y_N(N) : \\ Y_{min}^{(0)} \leq Y_N(i) \leq Y_{max}^{(0)} \\ \left|\frac{Y_N(i+1) - Y_N(i)}{\delta t}\right| \leq Y_{max}^{(1)} \\ \left|\frac{Y_N(i+2) - 2\ Y_N(i+1) + Y_N(i)}{(\delta t)^2}\right| \leq Y_{max}^{(2)} \\ Y_N(0) = 0\ ,\ Y_N(N) = 1. \end{cases}$$

Dans ce qui suit nous notons $[x]$ *le plus grand entier inférieur ou égal à* x.

Proposition 2.1. — $\forall (N, \delta t)$, $D(N, \delta t) \neq \emptyset$ *implique* $C\left((N + 3/2)\delta t(1 + \delta t)\right) \neq \emptyset$.

Démonstration. — Soit Y^{aff} la fonction prolongeant l'interpolation affine de Y_N à gauche et à droite de l'intervalle $[\delta t, (N+1)\delta t]$

$$Y^{aff} = \begin{cases} Y_N(0) & \text{si } t < \delta t, \\ Y_N(i-1) + \frac{Y_N(i) - Y_N(i-1)}{\delta t}(t - i\delta t) & \text{avec } i = [\frac{t}{\delta t}] \text{ si } \delta t \leq t < (N+1)\delta t, \\ Y_N(N) & \text{si } t \geq (N+1)\delta t. \end{cases}$$

Soit χ_ε une approximation de l'unité, i.e. une fonction positive dont le support est $[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]$ telle que $\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} \chi_\varepsilon(s)ds = 1$.

Régularisons Y^{aff} pour obtenir Y^r par la convolution suivante

$$Y^r = Y^{aff} * \chi_\varepsilon.$$

Par construction, le support de Y^r est $[\delta t - \frac{\varepsilon}{2}, (N+1)\delta t + \frac{\varepsilon}{2}]$.

Supposons que $0 < \frac{\varepsilon}{2} \leq \delta t$.

Lemme 2.2. — $Y^r(0) = 0, Y^r((N+1)\delta t + \frac{\varepsilon}{2}) = 1, et\ \forall t, |Y^r(t)| \leq Y^{(0)}_{max}$.

Démonstration. — $|Y_{aff}| \leq Y^{max}$ et $Y^r = Y^{aff} * \chi_\varepsilon$,donc $|Y^r| \leq Y^{(0)}_{max}$. Enfin, $Y^r(0) = 0$ car $Y^{aff}(t < \delta t) = 0$. De même, $Y^r((N+1)\delta t + \frac{\varepsilon}{2}) = 1$ puisque $Y^{aff}(t > (N+1)\delta t) = 1$. □

Lemme 2.3. — $\dot{Y}^r(0) = 0, \dot{Y}^r((N+1)\delta t + \frac{\varepsilon}{2}) = 0, et\ \forall t, \left|\dot{Y}^r(t)\right| \leq Y^{(1)}_{max}$.

Démonstration. —

$$\begin{aligned}\dot{Y}^r(t) &= \dot{Y}^{aff} * \chi_\varepsilon(t)\\ &= \frac{Y_N(i-1) - Y_N(i-2)}{\delta t}\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\eta}\chi_\varepsilon(s)ds + \frac{Y_N(i) - Y_N(i-1)}{\delta t}\int_{\eta}^{\frac{\varepsilon}{2}}\chi_\varepsilon(s)ds\end{aligned}$$

où $\eta \in [-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]$, $i = [\frac{t}{\delta t}]$, et $Y_N(i<0) = Y_N(0)$ $Y_N(i>N) = Y_N(N)$ si nécessaire.

$\dot{Y}^r(t)$ est le barycentre de $\frac{Y_N(i-1)-Y_N(i-2)}{\delta t}$ et $\frac{Y_N(i)-Y_N(i-1)}{\delta t}$. D'où $\left|\dot{Y}^r\right| \leq Y^{(1)}_{max}$. Cette dernière formule implique $\dot{Y}^r(0) = 0$ et $\dot{Y}^r((N+1)\ \delta t\ + \frac{\varepsilon}{2}) = 0$. □

Lemme 2.4. — *On peut choisir χ_ε tel que*

$$\ddot{Y}^r(0) = 0, \ddot{Y}^r((N+1)\delta t + \frac{\varepsilon}{2}) = 0, et\ \forall t \left|\ddot{Y}^r\right| \leq (1+\delta t)\ Y^{(2)}_{max}.$$

Démonstration. —

$$\begin{aligned}\dot{Y}^r(t) &= \dot{Y}^{aff} * \dot{\chi}_\varepsilon(t)\\ &= \frac{Y_N(i-1) - Y_N(i-2)}{\delta t}\int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\eta}\dot{\chi}_\varepsilon(s)ds + \frac{Y_N(i) - Y_N(i-1)}{\delta t}\int_{\eta}^{\frac{\varepsilon}{2}}\dot{\chi}_\varepsilon(s)ds\\ &= -\chi_\varepsilon(\eta)\frac{Y_N(i) - 2Y_N(i-1) + Y_N(i-2)}{\delta t}\end{aligned}$$

où $\eta \in [-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]$, $i = [\frac{t}{\delta t}]$, $Y_N(i<0) = Y_N(0)$ et $Y_N(i>N) = Y_N(N)$ si nécessaire. Ceci implique

$$\left|\ddot{Y}^r\right| \leq |\chi_\varepsilon(r)|\, Y^{(2)}_{max}\delta t$$

et

$$\ddot{Y}^r(0) = 0$$
$$\ddot{Y}^r((N+1)\delta t + \frac{\varepsilon}{2}) = 0.$$

Choisissons χ_ε tel que $\chi_\varepsilon \leq \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}$, ce qui est bien compatible avec $\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}}\chi_\varepsilon(s)ds = 1$. Puis choisissons $\varepsilon = \delta t$. On a alors

$$\left|\ddot{Y}^r\right| \leq (1+\delta t)Y^{(2)}_{max}.$$

□

Enfin, choisissons Y^d par une homothétie temporelle convenable $Y^d(t) = Y^r(\frac{t}{1+\delta t})$.

Lemme 2.5. — *Avec les notations précédentes* $Y^d \in C\left((N+3/2)\delta t(1+\delta t)\right)$.

Démonstration. — D'après les lemmes 2.2, 2.3 et 2.4

$$\begin{cases} Y_{min} \leq Y^d \leq Y_{max} \\ \left|\dot{Y}^d\right| \leq Y^1_{max}, \quad \left|\ddot{Y}^d\right| \leq Y^{(2)}_{max} \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} & Y^d(0) = 0, \dot{Y}^d(0) = 0, \ddot{Y}^d(0) = 0 \\ & Y^d((N+3/2)\delta t(1+\delta t)) = 1, \dot{Y}^d((N+3/2)\delta t(1+\delta t)) = 0, \\ & \ddot{Y}^d((N+3/2)\delta t(1+\delta t)) = 0 \end{aligned}$$

Enfin, le support de Y^r est $[\frac{\delta t}{2}, (N+3/2)\delta t]$. Donc le support de Y_d est inclus dans $[0, (N+3/2)\delta t(1+\delta t)]$. □

Le lemme 2.5 donne la conclusion de la proposition 2.1. □

Proposition 2.6. — $\forall T, C(T) \neq \emptyset$ *implique* $\forall \Delta T \leq 0, C(T+\Delta) \neq \emptyset$.

Démonstration. — Supposons $C(T) \neq \emptyset$, alors il existe $Y \in C(T)$. Quel que soit $\Delta > 0$, prolongeons Y par $\hat{Y}$

$$\hat{Y} = \begin{cases} Y(t) & \text{si} \quad t \leq T \\ Y(T) & \text{si} \quad T < t \leq T + \Delta. \end{cases}$$

Clairement $\hat{Y} \in C(T+\Delta)$ qui est donc non vide. □

Proposition 2.7. — $C(T) \neq \emptyset \Rightarrow \forall N \in \mathbb{N}^*, D(N, \frac{T}{N}) \neq \emptyset$.

Démonstration. — Supposons $C(T) \neq \emptyset$, alors il existe $Y \in C(T)$. Soit $\delta t = \frac{T}{N}$. Considérons $Y_N = [Y(0), Y(\delta t), Y(2\delta t), \ldots, Y(T)]$. Notons $Y_N(j)$ la $(j+1)^{ème}$ coordonnée de Y_N, dont la valeur est $Y(j\delta t)$.

(i). — Clairement

$$Y_{min} \leq Y_N(j) = Y(j\delta t) \leq Y_{max}. \tag{8}$$

(ii). — Considérons les différences finies $Y_N(j+1) - Y_N(j) = 0 + \delta t\ \dot{Y}(j\delta t + \theta_j\ \delta t)$ où $\theta_j \in]0,1[$ d'après la formule de Mac-Laurin.
Or

$$\left|\dot{Y}(j\delta t + \theta_j\ \delta t)\right| \leq Y^{(1)}_{max}$$

donc

$$\forall j, \left|\frac{Y_N(j+1) - Y_N(j)}{\delta t}\right| \leq Y^{(1)}_{max}. \tag{9}$$

(iii). — Enfin considérons les différences finies

$$\begin{aligned} Y_N(j+2) - 2\,Y_N(j+1) + Y_N(j) &= Y((j+2)\delta t) - 2\,Y((j+1)\delta t) + Y(j\delta t) \\ &= \delta t\ \dot{Y}((j+1)\delta t) + \frac{1}{2}(\delta t)^2\ \ddot{Y}((j+1)\delta t + \delta t\ \theta^+) \text{ avec } \theta^+ \in]0,1[\\ &\quad - \delta t\ \dot{Y}((j+1)\ \delta t) + \frac{1}{2}(\delta t)^2\ \ddot{Y}((j+1)\delta t + \delta t\ \theta^-) \text{ avec } \theta^- \in]-1,0[\\ &= \frac{1}{2}\ (\delta t)^2\ (\ddot{Y}((j+1)\delta t + \delta t\ \theta^+) + \ddot{Y}((j+1)\ \delta t + \delta t\ \theta^-)) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\frac{Y_N(j+2) - 2\,Y_N(j+1) + Y_N(j)}{(\delta t)^2} = \frac{1}{2}\ \left(\ddot{Y}((j+1)\delta t + \delta t\ \theta^+) + \ddot{Y}((j+1)\delta t + \delta t\ \theta^-)\right).$$

Or on sait déjà

$$\forall t, \left|\ddot{Y}(t)\right| \leq Y^{(2)}_{max}$$

donc

$$\forall j, \left|\frac{Y_N(j+2) - 2\,Y_N(j+1) + Y_N(j)}{(\delta t)^2}\right| \leq Y^{(2)}_{max}. \tag{10}$$

En conclusion les équations $(8,9,10)$ prouvent que $Y_N \in D(N, \frac{T}{N})$ qui est donc non vide. □

Proposition 2.8. — *Il existe un unique temps minimum, noté T_{mini} , tel que $C(T) \neq \emptyset$.*

Démonstration. — C'est une conclusion directe de la proposition 2.6. □

Proposition 2.9. — *Pour tout δt, il existe un unique entier minimum, noté $N_{mini}(\delta t)$ tel que $D(N,\delta t) \neq \emptyset$.*

Démonstration. — La preuve est similaire à celle de la proposition 2.6. Soit $Y \in D(N,\delta t)$, il est clair que $[Y(0)Y(1)\dots Y(N)Y(N)]$ est un élément de $D(N+1,\delta t)$. □

Théorème 2.10. — *Le temps solution du problème discret, $N_{mini}(\delta t)\delta t$, converge vers T_{mini} lorsque δt tend vers zéro. En d'autres termes, le problème discret converge vers le problème continu lorsque δt tend vers zéro.*

Démonstration. — Nous savons d'après le propostion 2.8 qu'il existe un unique temps minimum T_{mini} tel que $C(T_{mini}) \neq \emptyset$. Pour un δt donné, on a

$$[\frac{T_{mini}}{\delta t}]\delta t < T_{mini} \leq \left([\frac{T_{mini}}{\delta t}] + 1\right)\delta t.$$

Ceci signifiant

$$C\left([\frac{T_{mini}}{\delta t}]\delta t\right) = \emptyset \tag{11}$$

$$C\left(([\frac{T_{mini}}{\delta t}] + 1)\delta t\right) \neq \emptyset. \tag{12}$$

Nous déduisons alors de la proposition 2.7 que $D\left([\frac{T_{mini}}{\delta t}] + 1, \delta t\right) \neq \emptyset$. Soit $\delta t' = \frac{-1+\sqrt{1+4\delta t}}{2}$, i.e. $\delta t'(1+\delta t') = \delta t$. On doit avoir $D\left([\frac{T_{mini}}{\delta t}] - 2, \delta t'\right) = \emptyset$ sinon, d'après la proposition 2.1, on aurait $C\left(([\frac{T_{mini}}{\delta t}] - 1/2)\delta t'(1+\delta t')\right) \neq \emptyset$ ce qui signifierait que $C\left([\frac{T_{mini}}{\delta t}]\delta t\right) \neq \emptyset$ ce qui n'est pas vrai d'après l'équation (11). Donc

$$\begin{cases} D\left([\frac{T_{mini}}{\delta t}] - 2, \frac{-1+\sqrt{1+4\delta t}}{2}\right) = \emptyset \\ D\left([\frac{T_{mini}}{\delta t}] + 1, \delta t\right) \neq \emptyset. \end{cases}$$

D'autre part, on sait d'après la proposition 2.9, que quel que soit δt il existe un unique entier minimum $N_{mini}(\delta t)$ tel que $D(N_{mini}(\delta t), \delta t) \neq \emptyset$.

Ces deux dernières relations impliquent

$$\begin{cases} N_{mini}(\frac{-1+\sqrt{1+4\delta t^2}}{2}) \leq [\frac{T_{mini}}{\delta t}] - 2 \\ N_{mini}(\delta t) \leq [\frac{T_{mini}}{\delta t}] + 1. \end{cases}$$

On en déduit

$$\lim_{\delta t \to 0} N_{mini}(\delta t)\delta t \leq T_{mini}$$

$$\lim_{\delta t \to 0} N_{mini}(\frac{-1+\sqrt{1+4\delta t}}{2})\delta t \leq T_{mini}$$

ce qui donne

$$\lim_{\delta t \to 0} N_{mini}(\delta t)\delta t = T_{mini}.$$

La résolution du problème discret permet de calculer une solution au problème continu par une régularisation et une homothétie temporelle. Le support de la solution du problème continu ainsi obtenue est $[0, (N_{mini}(\delta t) + 3/2)\delta t(1+\delta t)]$ et il converge vers $[0, T_{mini}]$ lorsque le pas de temps δt tend vers zéro. □

2.5. Conclusion sur la commande en temps minimum sous contraintes en utilisant la platitude

Si on fait abstraction de la démonstration, la méthode que nous venons de présenter est tout à fait générale.

Soit un système plat, linéaire ou non, à retard ou non, d'état x, de commande u et de sortie plate z.

S'il s'agit de trouver une trajectoire permettant de faire passer le système d'un point quelconque à un autre, le plus souvent un point stationnaire objectif, on sait qu'il suffit de choisir $z(t) = \sigma(t)$ suffisamment régulière et ayant les bonnes valeurs aux bords de son intervalle de définition $[0, T]$ pour effectuer cette transition en temps T. On a alors la paramétrisation suivante de la trajectoire du système

$$x = f(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(n)})$$
$$u = g(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(n)}, \sigma^{(n+1)}).$$

Le choix de la forme de la fonction σ a en fait une grande importance dans le respect des contraintes car on a équivalence entre les contraintes sur (x, u) et sur $(\sigma, \dot{\sigma}, \dots, \sigma^{(n)}, \sigma^{(n+1)})$.

La question de la commande sous contraintes pour les systèmes plats a d'ailleurs reçu différents développements [**Pet96, van97, PCR99**].

Nous nous sommes plus particulièrement intéressés au cas de la commande en temps minimum sous contraintes, dont nous venons de montrer un exemple. Ce cas admet la procédure de résolution suivante.

Partons d'un point quelconque pour l'état du système (et pour la commande si les contraintes portent également sur elle) et cherchons une commande en temps minimum qui nous permettre de faire rallier un point stationnaire donné au système.

1. Supposons qu'il existe un σ défini sur $[0, T]$, où T est suffisamment grand, permettant d'effectuer la transition voulue en respectant les contraintes.
2. Puisqu'il existe un tel temps T, n'importe quel $T + T'$ avec $T' > 0$ permet la même transition (mais elle est plus lente). Il suffit pour cela de prolonger σ par sa valeur en T sur $[T, T + T']$.
3. Donc il existe un unique T_{mini}, temps minimum qui est tel que $\forall T' > 0$, il existe une fonction σ définie sur $[0, T + T']$ permettant d'effectuer la transition désirée.
4. Supposons que pour un temps T donné, on sache trancher la question de l'existence ou non d'une fonction σ satisfaisant les contraintes (ici par l'algorithme du simplexe) alors on peut déterminer T_{mini} par dichotomie.
5. On peut en général trancher de manière approchée la question de l'existence ou non d'une fonction σ définie sur $[0, T]$ par discrétisation en temps de la fonction σ cherchée et en remplaçant par des schémas aux différences finies les dérivées temporelles successives de σ.

Cette technique de contrôle, déjà présentée dans [**Pet96**], peut être étendue aux systèmes linéaires multivariables (commandables). Ceci fournit alors une alternative à la commande prédictive linéaire (voir [**Ric93**]).

Lorsqu'un système est plat, il est avantageux d'utiliser la paramétrisation explicite de ses trajectoires plutôt que de résoudre des équations différentielles, car c'est justement l'étape la plus pénalisante dans la commande prédictive non linéaire (et en optimisation dynamique).

Dans la section 5.2 (problèmes de mélanges linéaires) et dans l'Annexe A (équations aux dérivées partielles de Saint-Venant) nous donnons des exemples d'application de ces méthodes.

CHAPITRE 3

COMMANDE DU RÉACTEUR PARFAITEMENT AGITÉ APPRYL PP2

Le réacteur APPRYL PP2 situé à Lavéra (Bouches du Rhône) est le cœur d'une unité de fabrication de polypropylène (PP). Ce réacteur produit environ $250kT/an$ de polypropylène. C'est la plus grande usine de production de polypropylène du monde. Il peut être considéré comme un réacteur parfaitement agité où le retard agit sur la commande en raison de la dynamique d'activation du catalyseur.

La prise en compte du retard et de la non-linéarité grâce à la platitude du système a permis de concevoir un régulateur très performant doté par construction de très bonnes performances dynamiques (temps de réponse court et pas de dépassement).

Ce régulateur est en service depuis juillet 1999. Ces travaux ont fait l'objet de la publication [**PRB+00**].

Introduction

Nous présentons ici la conception d'un contrôleur pour un réacteur industriel de polymérisation du propylène. La platitude du système permet de résoudre facilement les problèmes de stabilisation et de génération de trajectoires. Le modèle utilisé fait intervenir un retard en raison de la dynamique d'activation du catalyseur. Nous montrons comment tenir compte explicitement de ce retard et de la non-linéarité de ce modèle.

Pour montrer la pertinence de notre approche, nous fournissons des résultats temps-réel de notre contrôleur. On conclut ici que la platitude permet de piloter des dynamiques complexes (multivariables et non linéaires) et d'atteindre des performances inatteignables par les PIDs classiques.

À la section 3.1 nous décrivons l'organisation de l'usine. À la section 3.2, nous nous concentrons sur les dynamiques de deux variables importantes : le débit de production et le melt-index. À la section 3.3 nous montrons que ces dynamiques sont plates et nous décrivons la conception du contrôleur. Enfin à la section 3.4 nous donnons des résultats industriels y compris lors des phases de transition du réacteur.

3.1. Présentation du procédé

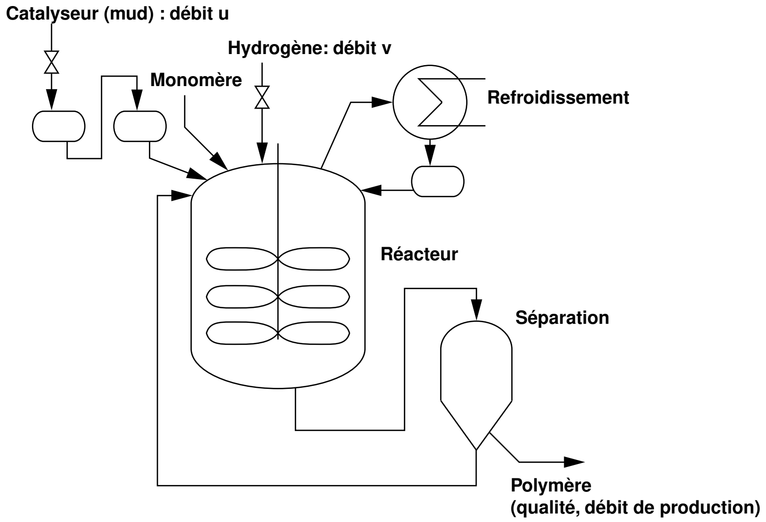

Figure 1 – Le processus de polymérisation : 2 entrées (u, v), 2 sorties *(qualité, production)*. À la différence de l'hydrogène, le catalyseur intervient avec un certain retard dans le réacteur.

L'unité. — L'usine APPRYL PP2, dont une photographie[(1)] est reproduite sur la figure 2, produit $250kT/an$ de polypropylène de différents melt-index (grade ou indice de fluidité). En 1998 c'était la plus grande usine de production de polypropylène au monde [**Rob98**].

Deux grandeurs importantes. — La marche de l'unité est caractérisée par deux grandeurs : le débit de production et le melt-index (appelé aussi indice de fluidité ou grade). Cette dernière grandeur est une mesure des caractéristiques mécaniques du polymère produit ; elle est d'une grande importance pour les applications de mise en forme, de soufflage, *etc* qui interviennent dans la fabrication de pièces pour l'industrie automobile, d'emballages de produits cosmétiques, *etc*[(2)]. La marche de l'unité est organisée en fonction d'un planning qui dépend lui-même du marché des polymères. Ceci implique de fréquents changements de point de fonctionnement. On souhaite

(1) Photographie fournie par APPRYL. Merci à Ph. Pinvidic.

(2) On pourra consulter [**EHS93**, pages 518–547] pour des informations générales sur le polypropylène, sa fabrication, ses débouchés, *etc.*

Figure 2 – L'usine APPRYL PP2 de nuit.

réaliser les transitions entre les points de fonctionnement à l'aide d'un dispositif automatique de commande afin de gagner en précision et en rapidité d'éxécution par rapport au fonctionnement manuel.

La réaction de polymérisation se produit dans le réacteur représenté sur la figure 1. Le monomère se polymérise en présence du catalyseur (mud). Les terminaisons des chaînes se produisent grâce à l'hydrogène présent dans le réacteur. Le melt-index du produit est fonction de la concentration d'hydrogène dans le réacteur. L'exothermicité de la réaction est compensée par un dispositif d'évacuation thermique. À la sortie du réacteur les particules solides (polypropylène) sont séparées du liquide (propylène essentiellement) qu'on réintroduit dans le réacteur.

On dispose de deux commandes : le débit entrant de catalyseur et le débit entrant d'hydrogène. Notons qu'une variation de débit de catalyseur intervient dans le réacteur avec un certain retard, à cause de la présence de différents dispositifs d'activation du catalyseur. Ceci introduit dans le modèle un retard.

Objectifs : stabiliser la production et effectuer des transitions précises et rapides. — En raison de la difficulté de la manœuvre, le changement de point de fonctionnement prend plusieurs heures. L'un des objectifs principaux du dispositif de contrôle est de permettre une réduction substantielle des temps de transition et de contrôler la qualité du produit durant la transition. On doit éviter les oscillations avant, pendant et après la transition. En outre on ne doit pas faire de dépassement (overshoot) lors des transitions.

Les dynamiques en jeu impliquent des phénomènes physiques et chimiques complexes. De simples régulateurs type PID peuvent être installés pour stabiliser le système autour d'un point stationnaire mais ne peuvent garantir de bonnes performances dynamiques entre deux points de fonctionnement.

3.2. Équations de la dynamique

Deux entrées, deux sorties. — Les deux quantités importantes du point de vue économique sont le melt-index du polymère MI et le débit de production du réacteur $Prod$. Ces sorties sont reliées aux entrées via des équations d'état non linéaires avec retard. L'état du système est de dimension 4. Nous le notons $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Modèle non linéaire à retard avec couplage. — Globalement, le débit de catalyseur (mud) joue sur le débit de production ($Prod$). En raison de la dynamique d'activation du catalyseur, on doit considérer un retard sur la commande mud.

Le débit d'hydrogène (H_{2in}) joue sur le grade (melt-index MI) du produit. Il y a un couplage avec l'entrée mud.

Pour des raisons de confidentialité il n'est pas possible de décrire en détail ces équations dynamiques ou de donner des valeurs numériques pour ces variables. Nous nous concentrons sur les structures de ces équations.

Notations. — Qa : quantité de catalyseur dans le réacteur, X_{vol} : taux de solide volumique (polymère) dans la phase liquide du réacteur, C_{H2} : concentration d'hydrogène à l'intérieur du réacteur, MI : melt-index du polymère, $Prod$: débit de production de polymère, mud : débit de catalyseur entrant dans le réacteur, δ : retard sur l'entrée mud, τ : temps de séjour (quelques vingtaines de minutes), p : certains paramètres confidentiels (connus), A : activité du catalyseur à l'intérieur du réacteur, ρ^L : masse volumique du propylène en phase liquide, ρ^V : masse volumique du propylène en phase gazeuse, ρ^{PP} : masse volumique du polypropylène, F : débit entrant de propylène, L : débit de liquide soutiré du réacteur, V : volume de la phase liquide dans le réacteur, H_{2in} : débit d'hydrogène entrant dans le réacteur, a et b : deux constantes.

Modèle physique et corrélations. — Nous utilisons des équations de bilans (matières et énergies) pour obtenir (13, 14) et nous utilisons des résultats d'études statistiques : [**MM91**] adaptée au polypropylène pour (16), et une étude spécifique que nous avons menée pour (15).

$$\dot{Q}a = mud(t-\delta) - \frac{Q_a}{\tau(p)} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\dot{X}_{vol} = \quad & Q_a \frac{A}{(\rho^L - \rho^V)V}\left(X_{vol}(1 - \frac{\rho^L}{\rho^{PP}}) + \frac{\rho^L - \rho^V}{\rho^{PP}}\right) \\ & -X_{vol}F + \frac{\rho^V}{\rho^L}\frac{X_{vol}}{1 - X_{vol}}\frac{L}{(\rho^L - \rho^V)V}\end{aligned} \tag{14}$$

$$\dot{C}_{H2} = H_{2in} - g(p, C_{H2}, Qa) \tag{15}$$

$$\frac{d}{dt}(\log MI) = \frac{a \log C_{H2} + b - \log MI}{\tau(p)} \tag{16}$$

$$y_1 = Prod = L\frac{X_{vol}\rho^{PP}}{(1 - X_{vol})\rho^L} \tag{17}$$

$$y_2 = MI. \tag{18}$$

Les deux entrées sont mud, le débit de catalyseur entrant dans le système (en amont du réacteur), et H_{2in} le débit d'hydrogène entrant dans le réacteur.

Les deux sorties du système sont MI la qualité (melt-index) du polymère sortant du réacteur et $Prod$, le débit de production de polymère sortant du réacteur.

L'équation (13) est une équation de dilution avec un retard sur l'entrée. L'équation (14) provient de bilans de masses. L'équation (15) est une équation bilan avec une régression non linéaire. L'équation (16) est une équation de dilution où la structure du terme source provient d'une étude statistique de la littérature [**MM91**].

Couplage. — Les équations (13), (14) et (17) montrent la relation reliant l'entrée mud à la sortie $Prod$. Les dynamiques sont non linéaires et font intervenir un retard sur l'entrée (activation du catalyseur).

Les équations (15), (16) et (18) montrent la relation reliant l'entrée H_{2in} à la sortie MI. L'entrée mud a également une influence sur cette sortie via un couplage dans l'équation (15).

Modèle. —

Modèle de contrôle. — Les équations (13, 14, 15, 16, 17, 18) *s'écrivent formellement*

$$\dot{x}_1 = u(t-\delta) - \frac{x_1}{\tau(p)} \tag{19}$$

$$\dot{x}_2 = x_1 f(x_2) + h(x_2) \tag{20}$$

$$\dot{x}_3 = v - g\,(p, x_3, x_1) \tag{21}$$

$$\dot{x}_4 = \frac{a\ \log(x_3) + b - x_4}{\tau(p)} \tag{22}$$

$$y_1 = k(x_2) \tag{23}$$

$$y_2 = \exp(x_4) \tag{24}$$

où $f > 0$, g h et k sont des fonctions régulières et où δ est un retard constant.

On a la correspondance $x_1 = Qa$, $x_2 = X_{vol}$, $x_3 = C_{H2}$, $x_4 = \log MI$, $y_1 = Prod$, $y_2 = MI$, $u = mud$, $v = H_{2in}$.

3.3. Platitude du système et calcul du contrôleur

Les sorties x_2 et x_4 sont les sorties plates du système. En d'autres termes toutes les variables du système s'expriment au moyen de x_2, x_4 et d'un nombre fini de leurs dérivées.

Ainsi, l'équation (22) s'écrit

$$x_3 = \exp\left(\frac{\dot{x}_4\tau(p) - b + x_4}{a}\right). \tag{25}$$

L'équation (20) donne

$$x_1 = \frac{\dot{x}_2 - h(x_2)}{f(x_2)}. \tag{26}$$

Puis par l'équation (19)

$$u(t-\delta) = \frac{\ddot{x}_2 - \dot{x}_2 h'(x_2)}{f(x_2)} - ((\dot{x}_2 - h(x_2))\frac{\dot{x}_2 f'(x_2)}{f^2(x_2)} + \frac{\dot{x}_2 - h(x_2)}{\tau(p) f(x_2)}. \tag{27}$$

En fait cette équation montre que $u(t)$ s'exprime en fonction de $x_2(t+\delta)$, $\dot{x}_2(t+\delta)$ et $\ddot{x}_2(t+\delta)$.

Enfin l'équation (21) donne l'expression de l'entrée v

(28)

$$v = \exp\left(\frac{\dot{x}_4\tau(p) - b + x_4}{a}\right)\frac{\ddot{x}_4\tau(p) + \dot{x}_4}{a} + g\left(p, \exp\left(\frac{\dot{x}_4\tau(p) - b + x_4}{a}\right), \frac{\dot{x}_2 - h(x_2)}{f(x_2)}\right).$$

Formules de platitude. — *Les équations* $(25, 26, 27, 28)$ *montrent que toutes les variables du système s'écrivent au moyen des deux sorties plates x_2 et x_4 (i.e. X_{vol} et $\log MI$).*

Pour contrôler le système il suffit de contrôler ses sorties plates. D'un point de vue d'ingénierie, $y_2 = \exp(x_4)$ est une variable importante : c'est MI la mesure de la qualité du polymère produit. Il semble naturel de la contrôler. D'un autre côté, x_2 qui n'est pas directement mesurée (c'est X_{vol} le taux volumique de solide à l'intérieur du réacteur), mais $y_1 = k(x_2)$ est importante : c'est le débit de production de polymère.

Calcul du contrôleur. — Les équations (27) et (28) montrent que le problème de la stabilisation autour de n'importe quel point de fonctionnement est facilement résolu par un bouclage linéarisant avec prédiction sur l'intervalle $[t, t+\delta]$ (à cause du retard)

$$u(t) = f_1(x_2(t+\delta), \dot{x}_2(t+\delta), p) = \tilde{f}_1(x_1(t+\delta), x_2(t+\delta), p) \tag{29}$$

$$v(t) = f_2(x_4(t), \dot{x}_4(t), x_2(t), \dot{x}_2(t), p) = \tilde{f}_2(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), p) \tag{30}$$

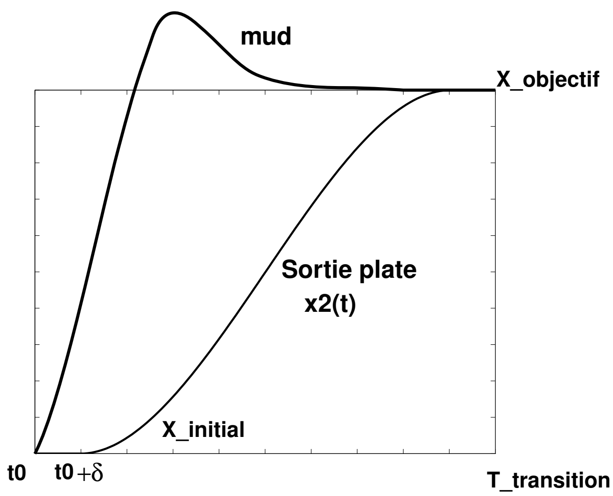

Figure 3 – Principe de calcul d'une transition (ici augmentation du débit de production). Après avoir traduit les objectifs de transitions sur la sortie plate $x_2 = X$, on choisit une transition pour la grandeur x_2 et on calcule la commande u par l'équation (27). On obtient pour la commande un profil en forme de "bosse" avec avance.

où les f_i et $\tilde{f}_i$ sont des fonctions régulières.

Transitions. — En outre, il y a une relation biunivoque entre les trajectoires du système et les trajectoires des sorties plates. On calcule les commandes boucle ouverte par les relations de platitude (en pratique on rajoute une boucle fermée utilisant ces trajectoires de référence). Par exemple, entre deux points stationnaires différents, on construit une trajectoire suffisamment régulière et douce pour que les entrées restent limitées (le problème de trajectographie sous contraintes d'état et d'entrée pour certains réacteurs chimiques en utilisant la platitude du système est l'objet du chapitre2)

À titre d'exemple on a représenté sur la figure 3 un exemple (adimensionnel) de commande boucle ouverte (mud) correspondant à une augmentation du débit de production.

Observateur. — Enfin, donnons quelques détails concernant l'utilisation pratique des équations (29) et (30). Sans rentrer dans les détails, pour des raisons de confidentialité, il est clair que pour calculer les commandes, il nous faut avoir des estimations des grandeurs x_1, x_2, x_3, x_4 et p. Toutes ces grandeurs, à l'exception de x_2 sont mesurées, certaines avec une précision assez faible. Nous utilisons donc des filtres, des estimateurs

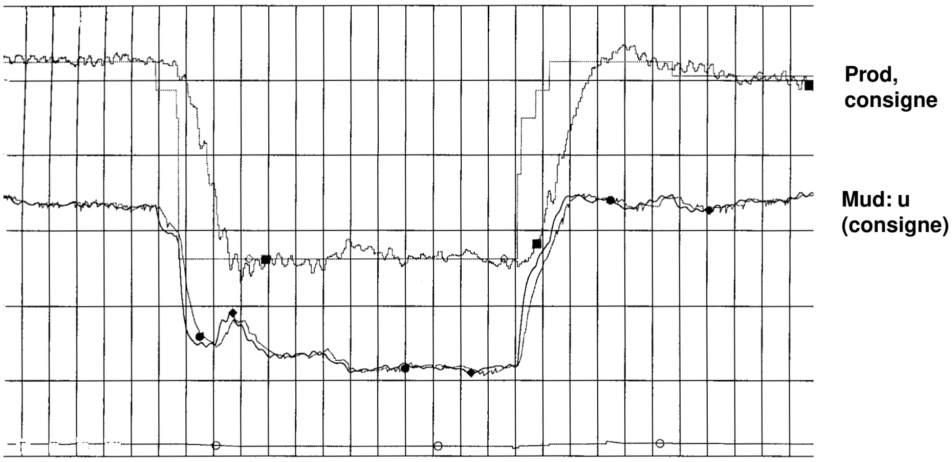

Figure 4 – [Période $30h$]. Résultats avec notre contrôleur. Changements de point de fonctionnement. Sortie : *Prod*. Entrée : *Mud*. Remarquer la précision et la rapidité des transitions.

avec prédiction et un observateur de type Luenberger pour x_2 en utilisant les équations bilan.

3.4. Résultats industriels

Utilisation depuis juillet 1999. — Le contrôleur que nous avons conçu est en service depuis juillet 1999. Aujourd'hui les opérateurs utilisent les régulateurs en spécifiant des points de consignes au lieu d'accéder directement aux entrées.

Performances. — On reporte sur les figures 4, 5 et 6 des périodes de fonctionnement représentatives. Les changements de point stationnaires pour le débit de production sont représentés sur les figures 4 et 5. Les changements simultanés de débit de production et de qualité du polymère sont représentés sur la figure 6. Noter les importants bruits de mesure survenant parfois et la réaction assez lente de l'actionneur de *mud*.

Les transitions sont rapides et précises, la production est régulée, on gagne en stabilité et en répétabilité.

On retrouve bien les entrées en forme de bosse, voir figure 4. Remarquer sur cette même figure l'effet de la compensation du retard sur la commande *mud* par un terme d'avance dans l'équation (27) : le régulateur stabilise la valeur de l'entrée *mud* avant

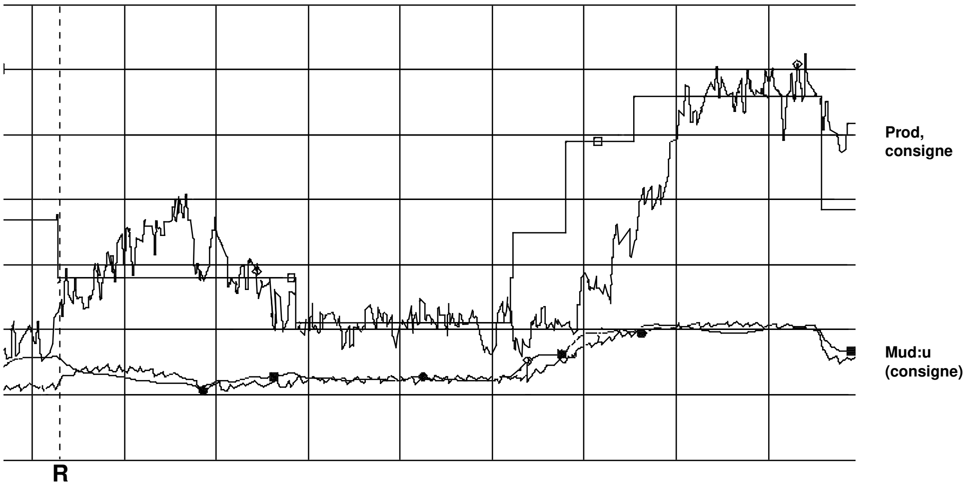

Figure 5 – [Période $9h$]. Mise en service du contrôleur (repère **R**). Stabilisation du débit de production puis changements de point de fonctionnement. Sortie : $Prod$. Entrée : Mud. Les bruits de mesure sur la sortie sont ici assez importants. Noter la différence entre la valeur de consigne pour l'actionneur (sp) et sa vraie valeur (problèmes inhérents à l'actionneur).

d'avoir atteint le point de consigne sur la sortie $Prod$, il anticipe ainsi l'effet du retard et réussit la transition sans dépassement (pas d'overshoot).

Dans ces conditions il est possible d'optimiser le temps de transfert et d'augmenter le point de consigne de débit de production sans risquer de surpasser (par des oscillations indésirables) les capacités de l'unité. Les calculs quantitatifs des gains réalisés sont à l'heure actuelle en cours.

Remerciements. — Nous remercions Jean-Marie Béchet et Philippe Pinvidic de l'usine APPRYL PP2 pour leurs renseignements et explications, Marc Souche du Centre Technique ATOCHEM pour le soutient de ce projet et Frédéric Guérin du Centre Technique ATOCHEM pour son travail actif lors de l'installation et de la mise au point du régulateur.

3.5. Conclusion

La partie la plus importante de ce travail a consisté à trouver un modèle physique réaliste de l'unité (réacteur, canalisations, circuits de refroidissement, *etc*). Une fois ce modèle obtenu, il aurait été possible de construire un observateur-contrôleur linéaire classique (avec gain-scheduling par exemple). Cependant celui-ci aurait été bien peu performant au vu de la demande des opérateurs : faire de grandes transitions de manière rapide et précise. Nous avons montré ici que la prise en compte du retard et des non-linéarités était la bonne solution. Les réglages ont été simples une fois que nous avons bien compris la physique du réacteur. Notons enfin que depuis son installation, il n'a pas été nécessaire de changer ces réglages.

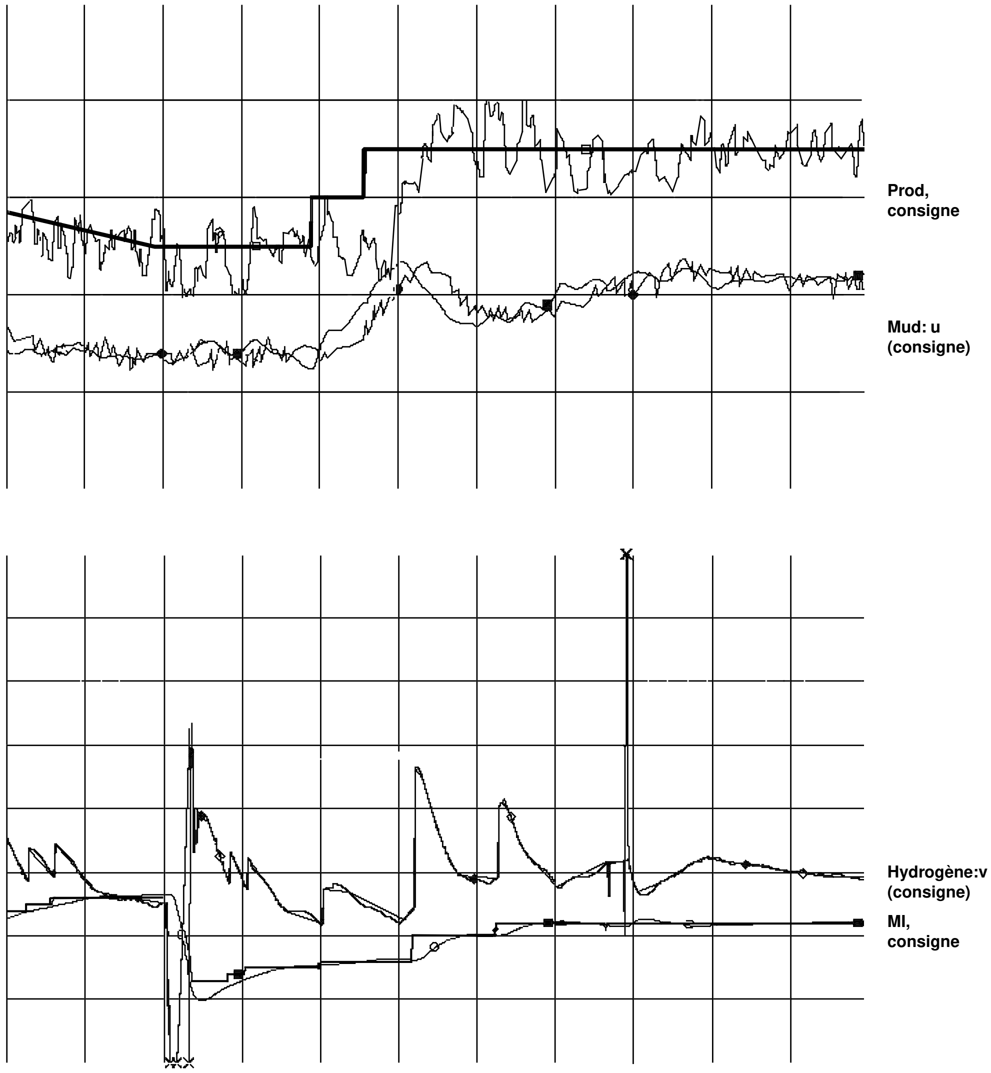

Figure 6 – [Période $12h$]. Résultats avec notre contrôleur. Changements simultanés de débit de production et de qualité du polymère. (En haut) Sortie : $Prod$. Entrée : Mud. Remarquer les bruits de mesure sur la sortie et la différence entre la valeur de consigne pour l'actionneur (sp) et sa vraie valeur (difficultés inhérentes à l'actionneur). (En bas) Sortie : MI. Entrée : $H2in$. À chaque changement de point de consigne, le contrôleur commande une forte entrée d'hydrogène dans le réacteur. Ce fonctionnement permet des transitiosn rapides. Remarquer les pannes du chromatographe survenant parfois (valeur hors limites).

CHAPITRE 4

COMMANDE DU RÉACTEUR TUBULAIRE ATOFINA PS CARLING

Nous exposons ici notre travail sur le régulateur thermique du réacteur de polymérisation du styrène ATOFINA de Carling. C'est un réacteur de type piston dont la dynamique peut être décrite par une équation aux dérivées partielles de réaction-convection. Cette caractéristique permet une écriture sous la forme d'un système à retard et requiert des techniques de commande particulières que nous étudions. Le régulateur que nous présentons ici est en service depuis décembre 1999.

Introduction

Réacteur piston. — Nous développons le calcul d'une loi de commande pour la régulation en température du réacteur de polymérisation du styrène de Carling[(1)]. Ce réacteur a un fonctionnement piston, il produit $120kT/an$ de polystyrène. Pour que le polystyrène produit ait les propriétés physico-chimiques désirées (résistance mécanique, fluidité, *etc*), il doit être astreint à respecter un certain profil de température T^{sp} le long du réacteur (voir figure 1).

Oscillations de la température. — Sur le site, certains phénomènes mal élucidés, combinés avec la forte exothermicité de la réaction, engendrent localement d'importantes oscillations de la température qui se propagent ensuite par effet piston. Le polystyrène produit peut alors être hors-norme.

Le réacteur est donc équipé d'asservissements thermiques (échangeurs thermiques cascadés via des PIDs sur des capteurs de température placés le long du réacteur) pour limiter ces effets indésirables.

Améliorer les régulations. — Les PIDs ne permettaient pas d'augmenter la performance de l'unité. En pratique l'augmentation du niveau de production (charge), i.e.

[(1)]On pourra se reporter à [**EHS93**, pages 616–659] pour des informations générales sur le polystyrène, sa fabrication, ses débouchés,*etc*.

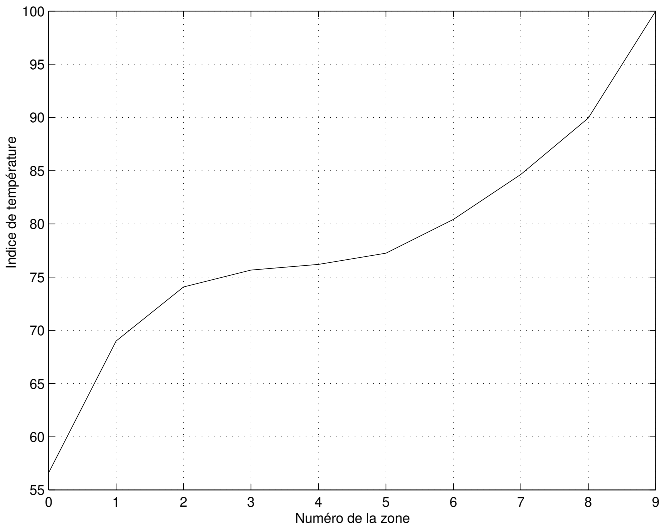

Figure 1 – Exemple de profil de consigne de température T^{sp} le long du réacteur. (Normalisé pour des raisons de confidentialité).

de la vitesse d'écoulement dans le réacteur, était impossible au dessus d'une certaine valeur critique expérimentale. Par le travail présenté ici, nous avons amélioré les asservissements et permis d'augmenter la production de l'unité d'environ 10%.

Problème de contrôle frontière. — Nous montrons que le problème se ramène au contrôle frontière d'une équation aux dérivées partielles monodimensionnelle qu'on peut interpréter comme un système à retard.

4.1. Présentation du procédé

Le réacteur peut être modélisé par une dynamique piston, voir figure 2.

Équations bilans. — Le monomère (styrène) entre d'un coté du réacteur et réagit progressivement en avançant dans le réacteur. La conversion est presque totale lorsque le polystyrène sort à l'autre extrémité du réacteur. La chaleur générée par l'exothermicité de la réaction est évacuée par 8 échangeurs thermiques placés le long du réacteur. À première vue on doit modéliser le système par deux grandeurs : T la température du milieu réactionnel et $x \in [0, 1]$ le taux de conversion. Les bilans d'énergie et de

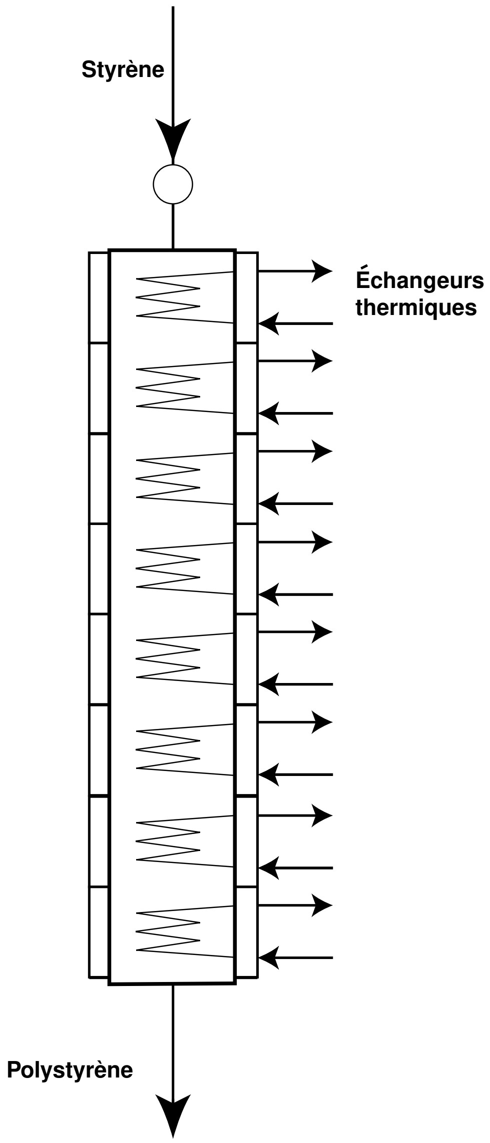

Figure 2 – Le réacteur piston et ses échangeurs thermiques.

matière donnent

$$C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \Delta H r(x,T) + q$$
$$\frac{\partial x}{\partial t} + v \frac{\partial x}{\partial z} = -r(x,T)$$

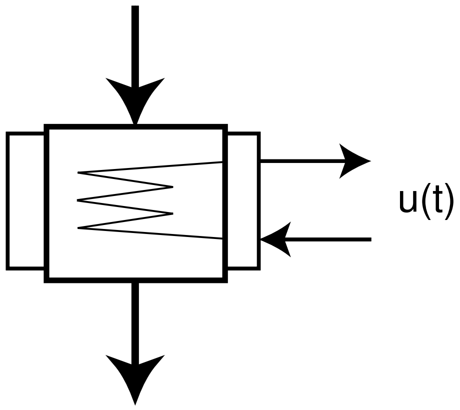

Figure 3 – Une zone du réacteur et son échangeur.

avec $z \in [0, \bar{L}]$ et où C_p est la capacité calorifique du milieu réactionnel (en $kcal.kg^{-1}.K^{-1}$), ΔH est l'enthalpie massique de réaction (en $kcal.kg^{-1}$), r est la vitesse de réaction (en s^{-1}) et q est la puissance échangée (en $kcal.kg^{-1}.s^{-1}$). En toute rigueur v, la vitesse d'écoulement, dépend de la densité qui dépend elle-même de x le taux de conversion : l'écoulement est plus rapide à l'entrée du réacteur qu'à la sortie où le milieu réactionnel est plus dense (environ 5 à 10% d'écart).

Actionneurs. — Par construction q n'est pas une véritable commande répartie, voir figure 2. À un instant donné $[0, \bar{L}] \ni z \mapsto q(t, z)$ est constante par morceaux (8 valeurs différentes). Il est juste de considérer ce réacteur comme 8 petits réacteurs pistons en cascade ayant chacun une seule commande sur leur bord, voir figure 3. Dans ce qui suit nous travaillons sur chaque zone de manière indépendante. Nous notons $L = \bar{L}/8$ sa longueur.

Simplification du modèle. — On a constaté expérimentalement que la variable x, le taux de conversion, ne pose pas de problème et reste quasiment toujours à sa référence. On peut donc simplifier le modèle précédent pour aboutir à une seule équation aux dérivées partielles

$$C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \Delta H r(\bar{x}, T) + q. \tag{31}$$

D'autre part on bénéficie d'une très bonne connaissance de la cinétique chimique i.e. de la fonction r. On peut donc simplifier l'équation précédente par le bouclage $u = \frac{\Delta H r(\bar{x}, T) + q}{C_p}$.

Modèle. —

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v\frac{\partial T}{\partial z} = u. \tag{32}$$

où $T(x,t)$, $x \in [0,L]$ est l'état du système et où $u(t)$ est la commande.

4.2. Interprétation en tant que système à retard

L'équation (32) est équivalente à l'équation à retard

$$T(t,z) = T(t - \frac{z}{v}, 0) + \int_{t-\frac{z}{v}}^{t} u(s)ds. \tag{33}$$

où $T(t,0)$ joue le rôle de terme source.

Nous avons commencé par chercher à commander cette équation en imposant, ce qui semblait légitime, qu'à tout instant $T(t,L) = T^{sp}$. En dérivant (33) il vient alors

$$0 = \dot{T}(t - \frac{L}{v}, 0) + u(t) - u(t - \frac{L}{v}).$$

Réponse insatisfaisante pour le contrôle. — Malheureusement cette récurrence temporelle n'offre aucune robustesse. La dynamique du contrôleur $u(t) = u(t - \frac{L}{v}) - \dot{T}(t - \frac{L}{v}, 0)$ est stable mais non asymptotiquement stable. La moindre erreur sur la vitesse d'écoulement du milieu réactionnel entraîne des problèmes de synchronisation et empêche de stabiliser convenablement le système. Nous avons donc dû abandonner cette voie. [2]

4.3. Méthode type Lyapunov

En simulation nous avions constaté qu'une simple commande opposée à la somme des écarts en température par rapport à leurs références fournissait un contrôleur aux performances assez intéressantes. Nous donnons ici une interprétation de ce phénomène.

Considérons

$$V(t) = \int_0^L (T(t,z) - T^{sp}(z))^2 dz. \tag{34}$$

---

(2)

Remarque : non-commandabilité. — En fait la dynamique de ce système à retard est du type $\dot{x}(t) = u(t) - u(t-1)$. Ce système est non commandable, l'élément $x(t) - \int_{t-1}^{t} u(l)dl$ étant un invariant du système. Ceci complique la planification de trajectoires. Pour effectuer des transitions entre deux points stationnaires, il faut "sacrifier" l'état du système, i.e. laisser sortir du piston tout son contenu pour le laisser oublier son "passé".

Ce qui donne en exploitant (33)

$$V(t) = \int_0^L \left(T(t - \frac{z}{v}, 0) + \int_{t-\frac{z}{v}}^t u(s)ds - T^{sp}(z) \right)^2 dz.$$

D'où

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) =& (T(t,0) - T^{sp}(0))^2 - (T(t,L) - T^{sp}(L))^2 \\ & + 2u(t) \int_0^L \left(T(t - \frac{z}{v}, 0) + \int_{t-\frac{z}{v}}^t u(s)ds - T^{sp}(z) \right) dz. \end{aligned} \tag{35}$$

On aimerait idéalement, par le choix de u, rendre la dérivée $\dot{V}$ négative (fonction de Lyapunov). Le premier terme de cette équation est toujours positif, le second toujours négatif (il nous aide). On ne peut garantir la décroissance exponentielle de V avec une commande u bornée car lorsque V tend vers 0, le facteur multipliant u, i.e. $\int_0^L \left(T(t - \frac{z}{v}, 0) + \int_{t-\frac{z}{v}}^t u(s)ds - T^{sp}(z) \right) dz$ tend également vers 0, le système perdant sa commandabilité.

Un certain compromis. — Le choix suivant est très raisonnable et permet d'avoir 2 termes négatifs dans l'expression (35)

$$\begin{aligned} u(t) &= - \int_0^L \left(T(t - \frac{z}{v}, 0) + \int_{t-\frac{z}{v}}^t u(s)ds - T^{sp}(z) \right) dz \\ &= - \int_0^L (T(t,z) - T^{sp}(z)) dz. \end{aligned} \tag{36}$$

Ceci explique la constatation expérimentale comme quoi une commande opposée à la somme des écarts des températures par rapport à leur référence avaient des performances intéressantes.

Il est clair qu'en changeant de fonction V, par exemple en pondérant autrement la somme on obtiendrait les contrôleurs différents. Nous ne sommes pas parvenus à obtenir une fonction de Lyapunov pour le système (i.e. où tous les termes de la dérivée de V auraient été négatifs). Comment choisir la pondération ? Il faut certainement d'une manière ou d'une autre respecter le caractère piston du réacteur. Dans ce qui suit nous obtenons par critère quadratique, ayant un sens physique, une autre pondération qui fournit cette fois un contrôleur vraiment performant.

4.4. Synthèse quadratique

Discrétisation spatiale de l'effet piston. — Linéarisons directement l'équation (31), en ayant au préalable opéré une discrétisation spatiale en n cellules pour chaque zone, qui nous amène à remplacer $\frac{\partial T}{\partial z}$ par le schéma aux différences $\frac{T_{i+1}(t) - T_i(t)}{\delta z}$.

Le caractère piston du réacteur est bien traduit dans le modèle linéaire par ces termes de différences finies.

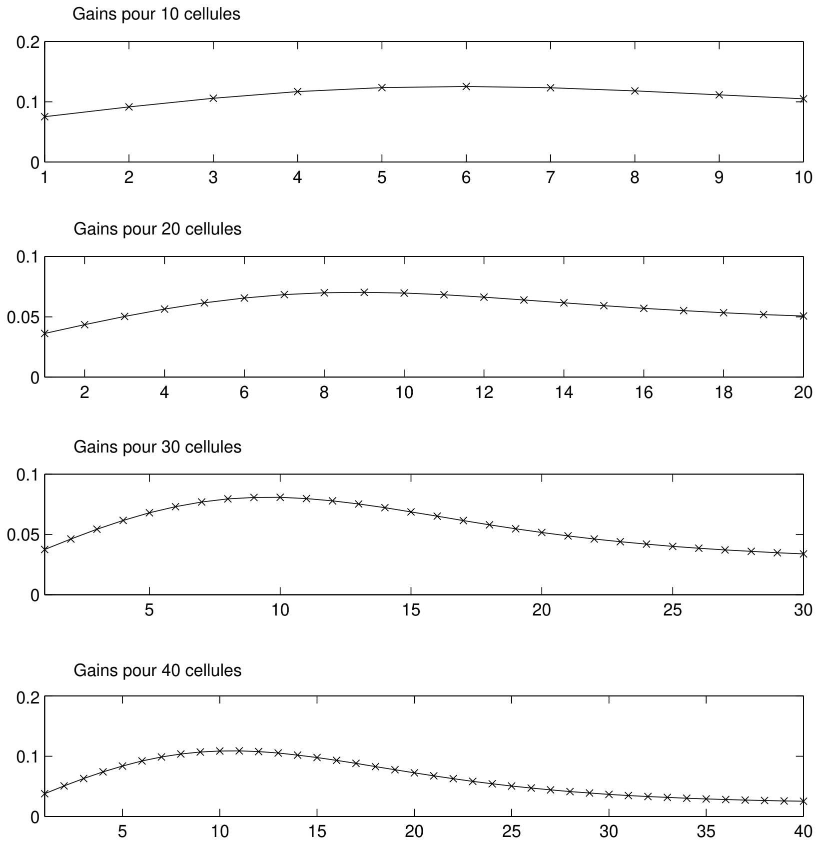

Figure 4 – Calculs des gains pour différentes discrétisations spatiales.

On parvient à la forme d'état

$$\delta\dot{T} = A\delta T + B\delta q$$

où $\delta T = [\delta T_1 \cdots \delta T_n]$ est cette fois un vecteur de dimension n, $\delta T_i \approx T_i - T_i^{sp}$, A est une matrice bi-diagonale (i.e. somme d'une matrice diagonale de dimension $n \times n$ et d'une matrice nilpotente d'indice n) et B est le vecteur $[1 \cdots 1]^T$.

On exprime le critère quadratique asymptotique

$$J(\delta q) = \int_0^{+\infty} \big(R(\delta q)^2 + (\delta T)^T(t)Q(\delta T)(t)\big)\, dt. \tag{37}$$

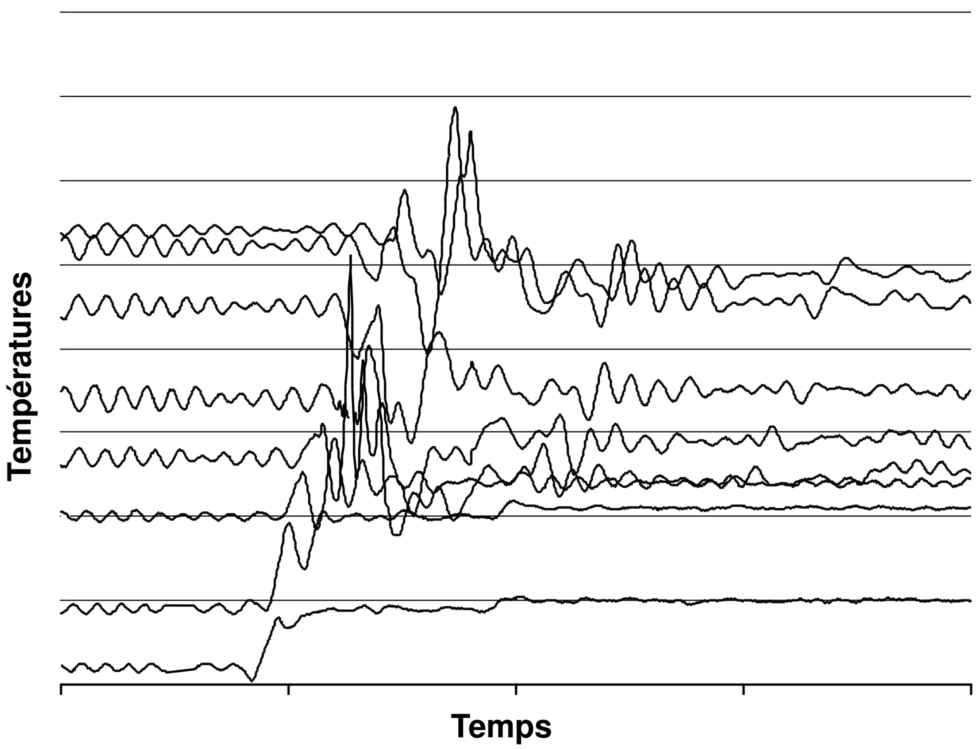

Figure 5 – Résultats sur site sans notre contrôleur (mais avec les PIDs existants). Températures des 8 zones sur une période d'une journée. Essai de changement de grade.

Critère dépendant d'un seul paramètre. — Lorsqu'une "tranche" de milieu réactionnel sort de la zone, la commande n'a plus d'action sur lui. Notre objectif de commande sera donc d'asservir la température de la tranche sortant de la zone à sa référence. Nous allons donc choisir $Q = \left(q_{i,j} = \delta_i^N \delta_j^N\right)$. Il ne reste plus qu'un seul degré de liberté : le choix de $R \in \mathbb{R}^+$, qui est "optimisé" pour obtenir des gains forts mais pas trop en fonction des capacités des actionneurs.

Calcul du contrôleur optimal. — Classiquement (voir par exemple [**dNC94**]) le minimum de ce critère est atteint pour la commande linéaire

$$\delta q = -R^{-1} B^T S \delta T$$

où S est solution de l'équation de Riccati stationnaire

$$A^T S + SA - SBR^{-1} B^T S^T + Q = 0.$$

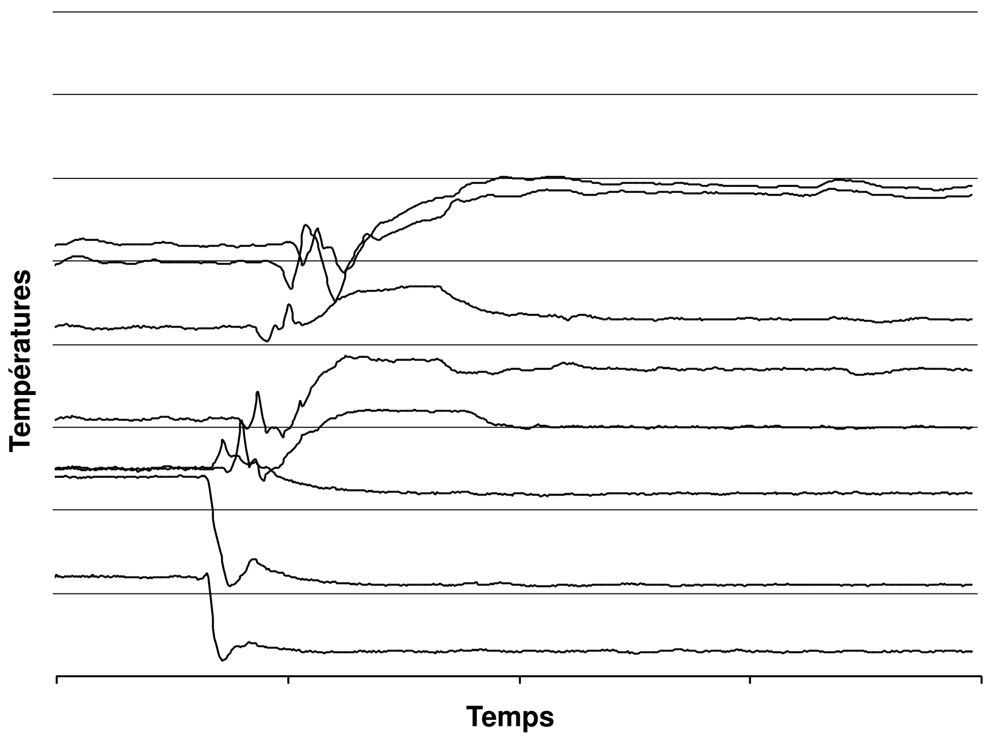

Figure 6 – Résultats sur site avec notre contrôleur. Températures des 8 zones sur une période d'une journée. Changement de grade.

On obtient au total

$$q = q^{ref} - R^{-1}B^T S(T - T^{sp}). \tag{38}$$

Robustesse des calculs et utilisation industrielle. — Afin de voir si la finesse de la discrétisation spatiale avait une incidence sur les gains calculés par cette synthèse quadratique, nous avons calculé les gains correspondants pour $N = 10$, $N = 20$, $N = 30$ et $N = 40$ voir figure 4. On constate que le calcul converge rapidement vers une solution bien définie qui est celle que nous avons retenue et utilisée industriellement.

4.5. Résultats industriels

Utilisation depuis décembre 1999. — Le contrôleur que nous avons conçu est en service depuis décembre 1999 [**Cre00b**]. On a représenté les températures des 8 zones du réacteur. On peut comparer le comportement du réacteur avec et sans notre contrôleur, voir figures 5 et 6. Dans les deux cas on cherche à effectuer un changement de grade, ce qui se traduit par un changement de profil thermique. Les relevés portent sur des périodes d'environ une journée, les échelles, omises pour des raisons de confidentialité, sont identiques [3].

Performances. — On constate qu'en régime stationnaire notre contrôleur stabilise déjà mieux le système.

En régime transitoire on contrôle bien mieux le réacteur et on effectue une transition assez douce et précise en évitant les grandes excursions des températures qu'on constate sur la figure 5.

Gains réalisés. — Ces performances permettent aujourd'hui d'augmenter la production du réacteur d'environ 10% en maximisant la charge admissible tout en préservant le profil thermique.

4.6. Conclusion

Après avoir interprété, au moyen d'un bouclage, la dynamique du réacteur comme une équation à retard (33), nous sommes arrivés à la conclusion qu'il fallait calculer la commande comme une somme pondérée des écarts entre les températures et leurs consignes afin d'obtenir une certaine robustesse. La synthèse quadratique nous donne une réponse simple. Le choix des pondérations dans le critère étant clairement dicté par des considérations physiques sur la nature piston du réacteur, nous parvenons à une commande simple et performante.

[3]Merci à MM. Scarselli, Gonzales de Linares et Boueilh de ATOFINA pour ces graphiques.

PARTIE II

SYSTÈMES DE MÉLANGES

Présentation de la deuxième partie

Dans cette partie on s'intéresse à des modèles de mélange tels qu'ils se posent en génie des procédés, par exemple dans les raffineries, comme le suggère l'exemple du gazole du chapitre 5. Les lois de mélange sont linéaires et peuvent faire intervenir des retards.

Deux cas sont en général considérés en fonction de la nature géomètrique du réseau de canalisations

- les retards sont considérés constants
- les retards dépendent fortement des différences de débits entre les diverses branches du réseau

Au chapitre 5 on se ramène à l'étude de systèmes linéaires dépendant du temps. On montre comment gérer les contraintes sur les recettes tout en convergeant vers le résultat désiré.

Dans le second cas, sujet du chapitre 6, les retards du système dépendent des entrées. En nous autorisant la loi de composition et l'inversion des fonctions, en supplément des règles classiques de calcul algébrique et de dérivation, nous montrons que ces systèmes sont plats. Nous détaillons les calculs sur un cas pratique à la section 6.1 et nous énonçons et démontrons un résultat sur une classe très générale de systèmes de ce type à la section 6.2.

Ces résultats nous donnent un point de vue très clair de la dynamique en boucle ouverte de ces systèmes de mélange. Lorsqu'il s'agit de fermer la boucle par des mesures intervenant de manière discrète, nous savons comment modifier l'entrée du système en comparant les mesures et les prévisions précises que nous pouvons établir.

Ce travail a abouti à la réécriture de l'algorithme du logiciel de commande de mélangeuse ANAMEL (analyse et mélange) pour ELF. La nouvelle version d'ANAMEL (version 4) est actuellement en phase finale d'écriture industrielle chez ELF et très prochainement installée en remplacement de la version précédente [**Cre00a**].

CHAPITRE 5

MÉLANGES LINÉAIRES

Introduction

Un système de production de gazole par mélange est représenté sur la figure 1. Le mélange est réalisé au moyen de quatre bases (produits de base dont les spécifications sont théoriquement connues [(1)]). On souhaite réguler deux spécifications, à savoir la teneur en soufre notée S et le trouble[(2)] noté Tr.
La recette, i.e. le choix des proportions du mélange, est astreinte à certaines contraintes. Le mélange final doit avoir un volume V donné, une teneur en soufre S_{sp} donnée et un trouble Tr_{sp} donné. Par construction, la recette utilisée doit assurer à chaque instant un débit nominal Q donné. En outre une des bases est bloquée si bien qu'au total on ne dispose plus que de 2 commandes.

Modèle. — *On peut résumer le modèle par le tableau suivant où figurent la recette de référence, les contraintes sur la recette (extréma et variation maximale à chaque itération) et les spécifications des bases.*

	Bac 1	*Bac 2*	*Bac 3*	*Bac 4 (bloqué)*
Soufre	s_1	s_2	s_3	s_4
Trouble	tr_1	tr_2	tr_3	tr_4
Recette de référence (%)	*46*	*3*	*46*	*5*
Extrema (%)	*20-100*	*0-100*	*0-100*	*5-5 (blocage)*
Variation à chaque itération	*limitée*	*limitée*	*limitée*	

[(1)] Dans le cadre du logiciel ANAMEL, les spécifications des produits de bases sont en réalité mal connus.
[(2)] Indice caractérisant le comportement du carburant aux basses températures : température à laquelle le carburant devient trouble en raison de l'apparition de cristaux de cires.

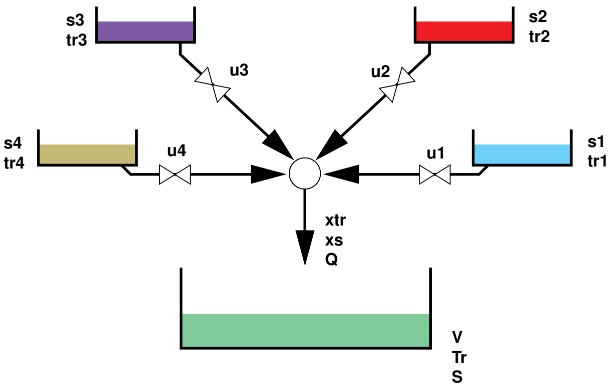

Figure 1 – Modèle de mélange linéaire. Cas type gazole. On dispose de 4 bacs de base pour réaliser le mélange dans le bac de sortie.

Notations. — Dans les calculs qui suivent on note

$$
\begin{array}{rcl}
\left.\begin{array}{r} s_1, s_2, s_3, s_4 \\ tr_1, tr_2, tr_3, tr_4 \end{array}\right\} & : & \text{les propriétés des bases (constantes)} \\
u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4 & : & \text{les débits partiels, } u_4 \text{ est une constante} \\
\left.\begin{array}{r} x_{tr}(t) \\ x_s(t) \end{array}\right\} & : & \text{les propriétés instantanées du mélange (dans le tuyau de sortie)} \\
\left.\begin{array}{r} Tr(t) \\ S(t) \end{array}\right\} & : & \text{les propriétés du mélange dans la cuve} \\
Q & : & \text{le débit nominal donné (constante)} \\
V & : & \text{le volume final du mélange désiré.}
\end{array}
$$

Objectif. — Formellement, on cherche les commandes $u_1(t)$ et $u_2(t)$ permettant de réaliser le mélange total désiré sous les contraintes

$$
\left\{
\begin{array}{l}
u_1^{min} \leq u_1(t) \leq u_1^{max} \\
u_2^{min} \leq u_2(t) \leq u_2^{max} \\
u_3^{min} \leq u_3(t) \leq u_3^{max} \\
u_1^{1min} \leq \dot{u_1}(t) \leq u_1^{1max} \\
u_2^{1min} \leq \dot{u_2}(t) \leq u_2^{1max} \\
u_3^{1min} \leq \dot{u_3}(t) \leq u_3^{1max}.
\end{array}
\right. \tag{39}
$$

Dans la réalité, et nous y reviendrons, les commandes $u_1(t)$ et $u_2(t)$ qui nous intéressent ont des profils bien particuliers, ce sont des fonctions en escaliers. Nous formulons donc le problème sous une forme discrète.

5.1. Platitude du système

Équations du mélange. — Les fluides étant supposés incompressibles

$$u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) + u_4 = Q. \tag{40}$$

On suppose de plus que les mélanges obéissent aux équations linéaires suivantes

$$Qx_{tr} = u_1 tr_1 + u_2 tr_2 + u_3 tr_3 + u_4 tr_4 \tag{41}$$

$$Qx_s = u_1 s_1 + u_2 s_2 + u_3 s_3 + u_4 s_4. \tag{42}$$

Dans un premier temps exprimons u_1 et u_2 en fonction de x_{tr} et x_s. En utilisant (40) dans (42) il vient

$$\begin{aligned} Qx_{tr} &= u_1 tr_1 + u_2 tr_2 + (Q - u_1 - u_2 - u_4) tr_3 + u_4 tr_4 \\ &= u_1(tr_1 - tr_3) + u_2(tr_2 - tr_3) + (Q - u_4) tr_3 + u_4 tr_4 \end{aligned} \tag{43}$$

$$Qx_s = u_1(s_1 - s_3) + u_2(s_2 - s_3) + (Q - u_4)s_3 + u_4 s_4. \tag{44}$$

On inverse ce système de deux équations à deux inconnues

$$\begin{aligned} u_1((tr_1 - tr_3)(s_2 - s_3) - (s_1 - s_3)(tr_2 - tr_3)) = \\ Qx_{tr}(s_2 - s_3) - Qx_s(tr_2 - tr_3) - (Q - u_4) tr_3 (s_2 - s_3) \\ - u_4 tr_4 (s_2 - s_3) + (Q - u_4) s_3 (tr_2 - tr_3) + u_4 s_4 (tr_2 - tr_3) \\ u_2((tr_2 - tr_3)(s_1 - s_3) - (s_2 - s_3)(tr_1 - tr_3)) = \\ Qx_{tr}(s_1 - s_3) - Qx_s(tr_1 - tr_3) - (Q - u_4) tr_3 (s_1 - s_3) \\ - u_4 tr_4 (s_1 - s_3) + (Q - u_4) s_3 (tr_1 - tr_3) + u_4 s_4 (tr_1 - tr_3). \end{aligned}$$

Il se réécrit sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = a x_{tr} + b x_s + \alpha \\ u_2 = c x_{tr} + d x_s + \beta \end{array} \right. \tag{45}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a &=& \frac{Q\ (s_2 - s_3)}{D} \qquad b \ = \ \frac{Q\ (tr_3 - tr_2)}{D} \\ \alpha &=& \frac{(Q-u_4)\ s_3\ (tr_2 - tr_3) + u_4\ s_4\ (tr_2 - tr_3)}{D} \\ && + \frac{-(Q-u_4)\ tr_3\ (s_2 - s_3) - u_4\ tr_4\ (s_2 - s_3)}{D} \\ c &=& \frac{Q\ (s_3 - s_1)}{D} \qquad d \ = \ \frac{Q\ (tr_1 - tr_3)}{D} \\ \beta &=& \frac{(Q-u_4)\ tr_3\ (s_1 - s_3) + u_4\ tr_4\ (s_1 - s_3)}{D} \\ && + \frac{-(Q-u_4)\ s_3\ (tr_1 - tr_3) - u_4\ s_4\ (tr_1 - tr_3)}{D} \\ \text{où } D &=& (tr_1 - tr_3)\ (s_2 - s_3) - (s_1 - s_3)\ (tr_2 - tr_3). \end{array} \right. \tag{46}$$

Sorties plates. — Montrons que Tr et S les propriétés intégrales du mélange final sont sorties plates du système. Pour cela montrons que la connaissance de Tr, S et d'un nombre fini de leurs dérivées permettent de reconstituer les grandeurs physiques du système. Par définition

$$Tr(t) = \frac{1}{t}\int_0^t x_{tr}(s)ds \tag{47}$$
$$tTr(t) = \int_0^t x_{tr}(s)ds.$$

D'où par dérivation

$$x_{tr}(t) = Tr(t) + t\dot{T}r(t). \tag{48}$$

Par un raisonnement analogue, on a également

$$x_s(t) = S(t) + t\dot{S}(t). \tag{49}$$

Donc par substitution dans (45)

$$\begin{cases} u_1 = a(Tr + t\dot{T}r) + b(S + t\dot{S}) + \alpha \\ u_2 = c(Tr + t\dot{T}r) + d(S + t\dot{S}) + \beta. \end{cases} \tag{50}$$

Enfin

$$\begin{aligned} u_3 &= Q - u_1 - u_2 - u_4 \\ &= Q - u_4 - \alpha - \beta - (a+c)(Tr + t\dot{T}r) - (b+d)(S + t\dot{S}). \end{aligned} \tag{51}$$

Formules de platitude. — *En conclusion, les égalités* (48, 49, 50, 51) *montrent que* Tr *et* S *sont sorties plates.*

5.2. Planification de trajectoires optimales en temps sous contraintes

On rappelle le problème de commande tel que nous l'avons énoncé dans l'introduction. À l'instant t_0 la cuve contient un mélange de volume V_0 et de propriétés $(S,Tr)(t_0)$. On cherche les commandes $u_1(t)$ et $u_2(t)$ permettant d'amener en temps $T < \frac{Q}{V-V_0}$ les grandeurs (S,Tr) du point $(S,Tr)(t_0)$ au point stationnaire $(S_{sp},Tr_{sp})(T+t_0)$ sous les contraintes (39).

Ici nous nous concentrons sur l'écriture, à l'aide des sorties plates, du problème de commande sous contraintes. Les résultats que nous donnons sont issus de la commande en temps minimum que nous décrivons au chapitre 2.

Traduction du problème au moyen des sorties plates. — Le problème de commande sous contraintes admet l'écriture équivalente suivante dans les nouvelles coordonnées

Problème 1. — *Trouver deux fonctions Tr et S définies sur $[0,T]$ telles que*

$$
(52) \qquad \begin{cases}
Tr(t_0) = Tr_{init}, \quad Tr(T+t_0) = Tr_{sp}, \quad \dot{T}r(T+t_0) = 0 \\
S(t_0) = S_{init}, \quad S(T+t_0) = S_{sp}, \quad \dot{S}(T+t_0) = 0 \\
u_1^{min} - \alpha \leq a(Tr + t\dot{T}r) + b(S + t\dot{S}) \leq u_1^{max} - \alpha \\
u_2^{min} - \beta \leq c(Tr + t\dot{T}r) + d(S + t\dot{S}) \leq u_2^{max} - \beta \\
Q - u_4 - \alpha - \beta - u_3^{max} \leq (a+c)(Tr + t\dot{T}r) + (b+d)(S + t\dot{S}) \\
\qquad \leq Q - u_2 - \alpha - \beta - u_3^{min} \\
u_1^{1min} \leq a(2\dot{T}r + t\ddot{T}r) + b(2\dot{S} + t\ddot{S}) \leq u_1^{1max} \\
u_2^{1min} \leq c(2\dot{T}r + t\ddot{T}r) + d(2\dot{S} + t\ddot{S}) \leq u_2^{1max} \\
-u_3^{1max} \leq (a+c)(2\dot{T}r + t\ddot{T}r) + (b+d)(2\dot{S} + t\ddot{S}) \leq -u_3^{1min}.
\end{cases}
$$

Résolution par discrétisation. — Plutôt que de chercher une solution (Tr, S) dans l'ensemble des fonctions deux fois dérivables, on restreint notre recherche à un ensemble plus petit.
Nous cherchons à obtenir des commandes $u_1(t), u_2(t)$ éléments de $KC[0,T]$, i.e. continues par morceaux sur $[0,T]$, et continues à droite. Pour ces fonctions, nous utilisons la notion (classique) de saut qui remplace alors la dérivation usuelle.

Définition 5.1. — Soit u une fonction de $KC[0,T]$. Quel que soit $t \in [0,T]$, on définit le *saut de u en t* qu'on note $u'(t)$ par

$$u'(t) = \lim_{h \to 0^+} u(t+h) - u(t-h).$$

Il est clair que pour $u \in KC[0,T]$, u' est nulle presque partout.

On vérifie aisément que pour obtenir des commandes u_1 et u_2 dans $KC[0,T]$ continues à droite, il faut utiliser des fonctions $KC^1[0,T]$ dérivables à droite pour Tr et S. Restreint à ces sous-espaces, le problème 1 prend la forme suivante, où on note $\dot{T}r^+$ et $\dot{S}^+$ les dérivées à droite de Tr et S.

Problème 2. — *Trouver Tr et S deux fonctions de $KC^1[0,T]$ telles que*

$$
(53) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&Tr(0) = Tr_{init}, \quad Tr(T) = Tr_{sp}, \quad \dot{Tr}(T) = 0 \\
&S(0) = S_{init}, \quad S(T) = S_{sp}, \quad \dot{S}(T) = 0 \\
&u_1^{min} - \alpha \leq a(Tr + t\dot{Tr}^{+}) + b(S + t\dot{S}^{+}) \leq u_1^{max} - \alpha \\
&u_2^{min} - \beta \leq c(Tr + t\dot{Tr}^{+}) + d(S + t\dot{S}^{+}) \leq u_2^{max} - \beta \\
&Q - u_4 - \alpha - \beta - u_3^{max} \leq (a+c)(Tr + t\dot{Tr}^{+}) + (b+d)(S + t\dot{S}^{+}) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \leq Q - u_2 - \alpha - \beta - u_3^{min} \\
&saut_1^{1min} \leq \Big(a(Tr + t\dot{Tr}^{+}) + b(S + t\dot{S}^{+})\Big)' \leq saut_1^{1max} \\
&saut_2^{1min} \leq \Big(c(Tr + t\dot{Tr}^{+}) + d(S + t\dot{S}^{+})\Big)' \leq saut_2^{1max} \\
&-saut_3^{1max} \leq \Big((a+c)(Tr + t\dot{Tr}^{+}) + (b+d)(S + t\dot{S}^{+})\Big)' \leq -saut_3^{1min}.
\end{aligned}
\right.
$$

Schéma de discrétisation des sorties plates . — Au lieu d'imposer une infinité d'inéquations sur (Tr, S) on en impose un nombre fini correspondant aux points du maillage. On utilise le schéma aux différences finies suivant

1. On divise l'intervalle $[t_0, t_0+T]$ en $N-1$ intervalles de longueur $\delta t = T/(N-1)$.
2. On approxime chaque fonction F
   - pour $t_0 \leq t \leq T + t_0$, $t = i\ \delta t + t_0$ où $i = E((t - t_0)/\delta t)$
   - $F(t) = F_{i+1}$
   - $\dot{F}(t) = \frac{F_{i+1} - F_i}{\delta t}$.

Expression des autres grandeurs du système. — Avec le schéma précédent

1. $Tr(t) = Tr_{i+1}$, $\dot{Tr}(t) = \frac{Tr_{i+1} - Tr_i}{\delta t}$
2. $S(t) = S_{i+1}$, $\dot{S}(t) = \frac{S_{i+1} - S_i}{\delta t}$
3. $u_1(t) = a(Tr_{i+1} + (i + t_0/\delta t)(Tr_{i+1} - Tr_i)) + b(S_{i+1} + (i + t_0/\delta t)(S_{i+1} - S_i)) + \alpha$
4. $u_2(t) = c(Tr_{i+1} + (i + t_0/\delta t)(Tr_{i+1} - Tr_i)) + d(S_{i+1} + (i + t_0/\delta t)(S_{i+1} - S_i)) + \beta$.

t	t_0	$t_0 + \delta t$	$\ldots$	$t_0 + (N-2)\ \delta t$	$t_0 + (N-1)\ \delta t$
i	0	1	$\ldots$	$(N-2)$	$(N-1)$
	$Tr(t_0)$	$Tr(t_0 + \delta t)$	$\ldots$	$Tr(t_0 + (N-2)\ \delta t)$	
	Tr_1	Tr_2	$\ldots$	Tr_{N-1}	
	$u(t_0)$	$u(t_0 + \delta t)$	$\ldots$	$u(t_0 + (N-2)\ \delta t)$	
	u_0	u_1	$\ldots$	u_{N-2}	

Expression matricielle de Tr. — Il vient

$$\begin{pmatrix} Tr(t_0) \\ Tr(t_0+\delta t) \\ \vdots \\ Tr(t_0+(N-2)\delta t) \end{pmatrix} = M_1 \begin{pmatrix} Tr_0 \\ Tr_1 \\ \vdots \\ Tr_{N-2} \end{pmatrix}$$

où

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Expression matricielle de u_1. — Pour $Tr + t\dot{Tr}$, il vient l'expression $Tr_{i+1} + i(Tr_{i+1} - Tr_i)$. D'où

$$\begin{pmatrix} Tr(t_0) + (t_0)\dot{Tr}(t_0) \\ Tr(t_0+\delta t) + (t_0+\delta t)\dot{Tr}(t_0+\delta t) \\ \vdots \\ Tr(t_0+(N-2)\delta t) + (t_0+(N-2)\delta t)\dot{Tr}(t_0+(N-2)\delta t) \end{pmatrix}$$
$$= M_2 \begin{pmatrix} Tr_0 \\ Tr_1 \\ \vdots \\ Tr_{N-1} \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} M2 =& M1 + \\ & \begin{pmatrix} t_0/\delta t & & & \\ & t_0/\delta t + 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_0/\delta t + (N-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & & \\ & -1 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ M2 =& \\ & \begin{pmatrix} -t_0/\delta t & t_0/\delta t + 1 & & & \\ & -t_0/\delta t - 1 & t_0/\delta t + 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -t_0/\delta t - (N-2) & t_0/\delta t + (N-1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{pmatrix} u_1(t_0) \\ \vdots \\ u_1(t_0+(N-2)\delta t) \end{pmatrix} = (aM2, M2).V + \begin{pmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{pmatrix}. \tag{54}$$

Expression des contraintes. — Les contraintes du problème 2 s'écrivent en fonction du vecteur d'inconnues

$$V = (Tr_0, \dots, Tr_{N-1}, S_0, \dots, S_{N-1})^T.$$

En premier lieu exprimons les contraintes de départ et d'arrivée au point stationnaire.

$$M_{eq}V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} V$$

$$= \begin{pmatrix} Tr(t_0) \\ Tr(T+t_0) \\ 0 \\ S(t_0) \\ S(T+t_0) \\ 0 \end{pmatrix} = b_{eq}.$$

Viennent ensuite les contraintes sur les débits. En utilisant (54) on obtient

$$b^{11}_{ineq} \leq M^1_{ineq}V \leq b^{12}_{ineq}$$

avec

$$M^1_{ineq}V = \begin{pmatrix} aM2 & bM2 \\ cM2 & dM2 \\ (a+c)M2 & (b+d)M2 \end{pmatrix},$$

$$b^{11}_{ineq} = \begin{pmatrix} u_1^{min} - \alpha \\ u_2^{min} - \beta \\ Q - u_2 - \alpha - \beta - u_3^{max} \end{pmatrix}, \quad b^{12}_{ineq} = \begin{pmatrix} u_1^{max} - \alpha \\ u_2^{max} - \beta \\ Q - u_2 - \alpha - \beta - u_3^{min} \end{pmatrix}.$$

Enfin les contraintes sur les sauts s'expriment facilement sous forme matricielle. Notons B_d le bloc $(i = 2, \dots, N-1, j = 1, \dots, N-1)$ de $M2$ et B_g le bloc $(i = 1, \dots, N-2, j = 1, \dots, N-1)$ de $M2$, et posons enfin

$$M3 = B_d - B_g$$

$M3 =$

$$\begin{pmatrix} t_0/\delta t & -2t_0/\delta t - 2 & t_0/\delta t + 2 & & & \\ & \ddots & & \ddots & & \ddots \\ & & t_0/\delta t + (N-3) & -2t_0/\delta t - 2(N-2) & t_0/\delta t + (N-1) \end{pmatrix}$$

$$M^2_{ineq} = \begin{pmatrix} aM3 & bM3 \\ cM3 & dM3 \\ (a+c)M3 & (b+d)M3 \end{pmatrix}$$

avec

$$b^{21}_{ineq} = \begin{pmatrix} saut^{min}_1 \\ saut^{min}_2 \\ -saut^{max}_3 \end{pmatrix} \leq M^2_{ineq} V \leq \begin{pmatrix} saut^{max}_1 \\ saut^{max}_2 \\ -saut^{min}_3 \end{pmatrix} = b^{22}_{ineq}.$$

Recherche d'une solution par l'algorithme du simplexe. — On se ramène donc à la recherche d'un vecteur V tel que

$$\begin{cases} M_{eq}V = b_{eq} \\ b^{11}_{ineq} \leq M^1_{ineq} V \leq b^{12}_{ineq} \\ b^{21}_{ineq} \leq M^2_{ineq} V \leq b^{22}_{ineq}. \end{cases} \tag{55}$$

Ce système d'équations et d'inéquations définit un polytope. Par l'algorithme du simplexe, on sait en trouver un point intérieur.

La question du temps minimum. — On considère maintenant le temps de transfert T comme une variable.

Il est clair que si pour un temps T donné il existe des commandes u_1 et u_2 dans $KC[0,T]$ qui permettent d'amener les grandeurs (S, Tr) au point stationnaire (S_{sp}, Tr_{sp}) alors, pour tout ΔT, en prolongeant u_1 et u_2 par leur valeur finale sur l'intervalle $[T, T+\Delta T]$, on peut faire la même chose en temps $T+\Delta T$.

En conséquence l'existence de commandes permettant de réaliser le transfert de (S_{init}, Tr_{init}) à (S_{sp}, Tr_{sp}) est une fonction monotone du temps T. Il existe donc un unique T minimum, noté T_{min}, qui permet de transférer (S, Tr) de (S_{init}, Tr_{init}) à (S_{sp}, Tr_{sp}).

En utilisant la discrétisation de notre problème, on construit pour chaque temps T le polytope correspondant. Par l'algorithme du simplexe on détermine si ce polytope est vide ou non.

En procédant par dichotomie on calcule T_{min}.

Dans la pratique, le pas de temps δt est imposé par le système informatique. On fera donc varier N le nombre de pas de discrétisation.

5.2.1. Propriétés de la discrétisation. —

Propriété 1. — *Par construction, les commandes calculées grâce au schéma de discrétisation précédent respectent les contraintes du problème 2.*

Propriété 2. — *Quel que soit δt la commande calculée par le schéma de discrétisation précédent n'induit pas de biais.*

Démonstration. — Considérons l'équation (47), à savoir

$$Tr(t) = \frac{1}{t}\int_0^t x_{tr}(s)ds.$$

En particulier en notant $Tr_{res}(T+t_0)$ la valeur effectivement atteinte sous l'effet des commandes, on a

$$(t_0+T)Tr_{res}(t_0+T) - t_0 Tr(t_0) = \int_{t_0}^{t_0+T} x_{tr}(s)ds. \tag{56}$$

On utilise l'équation (43)

$$Qx_{tr} = u_1(tr_1 - tr_3) + u_2(tr_2 - tr_3) + (Q - u_4)tr_3 + u_4 tr_4.$$

Calculons alors

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t_0+T} u_1(s)ds \\
=&a\sum_{i=0}^{N-2}\left(Tr_{i+1} + (t_0/\delta t + i)(Tr_{i+1} - Tr_i)\right)\delta t \\
&+ b\sum_{i=0}^{N-2}\left(S_{i+1} + (t_0/\delta t + i)(S_{i+1} - S_i)\right)\delta t + \alpha t_0 \\
=&a\sum_{i=0}^{N-2}(\delta t + t_0 + i\delta t)Tr_{i+1} - \sum_{i=0}^{N-2}(t_0 + i\delta t)Tr_i \\
&+ b\sum_{i=0}^{N-2}(t_0 + i\delta t)S_{i+1} - \sum_{i=0}^{N-2}(t_0 + i\delta t)S_i + \alpha t_0
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
=&a\left(-t_0 Tr_0 + (t_0 + (N-1)\delta t)Tr_{N-1} + \sum_{i=1}^{N-2}((i+1)\delta t - i\delta t - t_0)Tr_i\right) \\
&+ b\left(-t_0 Tr_0 + (t_0 + (N-1)\delta t)S_{N-1} + \sum_{i=1}^{N-2}((i+1)\delta t - i\delta t - t_0)S_i\right) \\
&+ \alpha t_0 \\
=&a\left(-t_0 Tr_0 + (t_0+T)Tr_{N-1}\right) + b\left(-t_0 S_0 + (t_0+T)S_{N-1}\right) + \alpha t_0.
\end{aligned}$$

De même

$$\int_{t_0}^{T+t_0} u_2(s)ds$$
$$= c\,(-t_0 Tr_0 + (t_0+T)Tr_{N-1}) + d\,(-t_0 S_0 + (t_0+T)S_{N-1}) + \beta t_0.$$

D'où

$$\begin{aligned}(T{+}t_0)&Tr_{res}(T+t_0)Q - t_0 Tr(t_0)Q = \\ &(tr_1 - tr_3) \\ &\times (a(-t_0 Tr_0 + (t_0+T)Tr_{N-1}) + b(-t_0 S_0 + (t_0+T)S_{N-1}) + \alpha t_0) \\ &+ (tr_2 - tr_3) \\ &\times (c(-t_0 Tr_0 + (t_0+T)Tr_{N-1}) + d(-t_0 S_0 + (t_0+T)S_{N-1}) + \beta t_0) \\ &+ t_0(Q-u_4)tr_3 + t_0 u_4 tr_4.\end{aligned}$$

Or d'après (46)

$$\begin{aligned}(tr_1 - tr_3)a + (tr_2 - tr_3)c &= Q \\ (tr_1 - tr_3)b + (tr_2 - tr_3)d &= 0 \\ (tr_1 - tr_3)\alpha + (tr_2 - tr_3)\beta &= -(Q-u_4)tr_3 - u_4 tr_4.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}(T+t_0)Tr_{res}(T+t_0)Q - t_0 Tr(t_0)Q &= (t_0+T)Tr_{N-1}Q - t_0 Tr_0 Q \\ &= (t_0+T)Tr(T+t_0)Q - t_0 Tr(t_0)Q.\end{aligned}$$

Finalement

$$Tr_{res}(T+t_0) = Tr_{final}.$$

□

5.3. Simulations boucle ouverte

Nous appliquons la méthode que nous venons d'exposer à un exemple numérique. Certaines grandeurs sont normalisées pour des raisons de confidentialité. Pour les mêmes raisons on ne peut pas donner les valeurs numériques des propriétés des bacs de base.

Sachant que la cuve contient déjà un mélange V_0 de spécifications (S_{init}, Tr_{init}), on veut atteindre dans la cuve les spécifications (S_{sp}, Tr_{sp}) en temps minimum T et assurer que le mélange final aura bien ces spécifications.

Avec les valeurs numériques

- $Tr_{sp} = 1.24$,
- $S_{sp} = .047$,
- $Tr_{init} = 1.3640$,

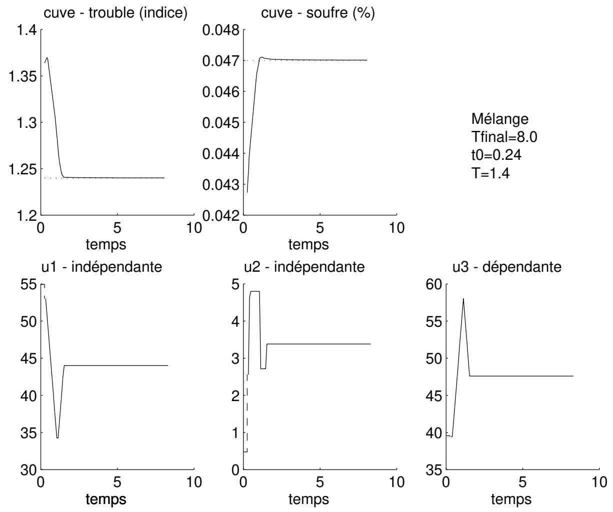

Figure 2 – Cas du modèle idéal. Convergence vers les bonnes spécifications en temps 1.4.

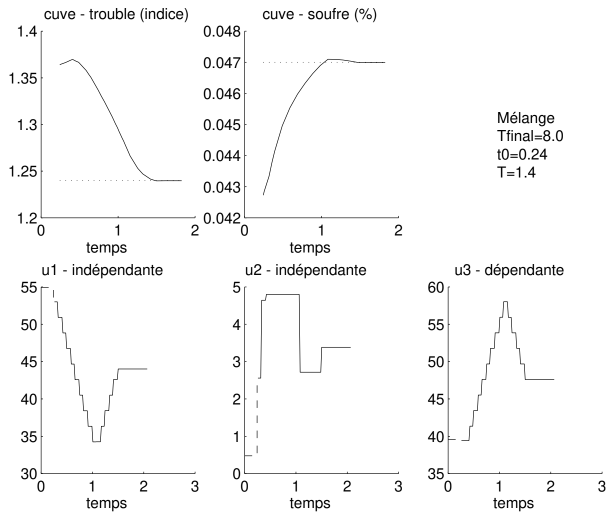

Figure 3 – Cas du modèle idéal. Agrandissement de la figure 2.

- $S_{init} = .0427$,
- $Q = 1$,

– $u_{1init} = 54.9$,
– $u_{2init} = .48$,
– $t_0 = 0.24$,
– $saut_1 = saut_2 = saut_3 = \pm 2$,
– T_{final}=8, temps total du mélange,

il vient alors par la méthode de résolution présentée $T = 1.4$.

Modèle idéal. — On suppose ici les spécifications des bacs parfaitement connues, les lois de mélange exactes, les mesures initiales parfaites. Les résultats obtenus sont reportés figure 2. Voir la figure 3, pour un agrandissement autour de la zone de départ.

Nécessité d'une boucle fermée. — À titre indicatif on montre figure 4 l'influence sur le contrôleur en boucle ouverte d'une erreur de 5% sur la spécification tr_1 (trouble du bac 1). On voit clairement un important biais sur la spécification du mélange. Il apparaît qu'il nous faut maintenant construire un observateur des spécifications associé à un contrôleur en boucle fermée.

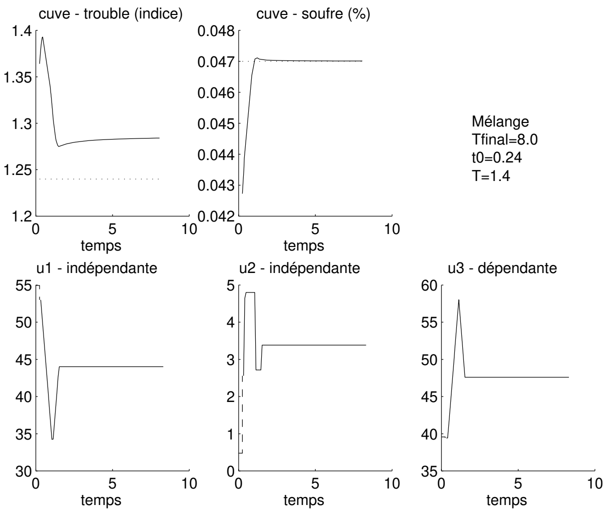

Figure 4 – Influence d'une erreur de 5% sur tr_1 : biais sur les propriétés du mélange obtenu.

5.4. Observateur

On suppose que les seules inconnues du système sont les propriétés des bases. On décide de construire un observateur des quantités $a, b, \alpha, c, d, \beta$ définies en (45) et (46). On va utiliser des mesures de Tr et S effectuées à chaque pas de temps.

Construction de l'observateur. — À partir de (56) on a

$$(t_0+t)Tr_{res}(t_0+t) - t_0 Tr(t_0) = \int_{t_0}^{t_0+t} x_{tr}(s)ds.$$

Or d'après (44)

$$Qx_s = u_1(s_1 - s_3) + u_2(s_2 - s_3) + (Q - u_4)s_3 + u_4 s_4.$$

D'où

$$(t_0+t)Tr_{res}(t_0+t) - t_0 Tr(t_0) =$$
$$\frac{tr_1 - tr_3}{Q}\int_{t_0}^{t_0+t} u_1(s)ds + \frac{tr_2 - tr_3}{Q}\int_{t_0}^{t_0+t} u_2(s)ds + \frac{(Q-u_4)s_3 + u_4 s_4}{Q} t.$$

Posons maintenant

$$\left\{\begin{array}{lcl} c_1 & = & tr_1 - tr_3 \\ c_2 & = & tr_2 - tr_3 \\ c_3 & = & \frac{(Q-u_4)tr_3 + u_4 tr_4}{Q}. \end{array}\right. \tag{57}$$

Il vient

$$(t_0{+}t)Tr_{res}(t_0+t) - t_0 Tr(t_0) =$$
$$\left(\frac{1}{Q}\int_{t_0}^{t_0+t} u_1(s)ds \quad , \quad \frac{1}{Q}\int_{t_0}^{t_0+t} u_2(s)ds \quad , \quad t \right) . \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Au temps $t_0 + j\delta t$, en utilisant les j mesures

$$(Tr(t_0+\delta t), Tr(t_0+2\delta t), \dots, Tr(t_0+j\delta t)).$$

on peut écrire que

$$R^j \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = Mes^j_{Tr} = \begin{pmatrix} (t_0+\delta t)Tr(t_0+\delta t) - t_0 Tr(t_0) \\ (t_0+2\delta t)Tr(t_0+2\delta t) - t_0 Tr(t_0) \\ \vdots \\ (t_0+j\delta t)Tr(t_0+j\delta t) - t_0 Tr(t_0) \end{pmatrix}.$$

En posant

$$
\begin{aligned}
R^j &= \begin{pmatrix}
\frac{\int_{t_0}^{t_0+\delta t} u_1(s)ds}{Q} & \frac{\int_{t_0}^{t_0+\delta t} u_2(s)ds}{Q} & \delta t \\
\frac{\int_{t_0}^{t_0+2\delta t} u_1(s)ds}{Q} & \frac{\int_{t_0}^{t_0+2\delta t} u_2(s)ds}{Q} & 2\delta t \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{\int_{t_0}^{t_0+j\delta t} u_1(s)ds}{Q} & \frac{\int_{t_0}^{t_0+j\delta t} u_2(s)ds}{Q} & j\delta t
\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
\frac{u_1(t_0)}{Q}\delta t & \frac{u_2(t_0)}{Q}\delta t & \delta t \\
\frac{u_1(t_0)+u_1(t_0+\delta t)}{Q}\delta t & \frac{u_2(t_0)+u_2(t_0+\delta t)}{Q}\delta t & 2\delta t \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{\sum_{i=0}^{j-1} u_1(t_0+i\delta t)}{Q}\delta t & \frac{\sum_{i=0}^{j-1} u_2(t_0+i\delta t)}{Q}\delta t & j\delta t
\end{pmatrix}. \qquad (58)
\end{aligned}
$$

L'estimation au sens des moindres carrés de $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ est

$$
\begin{pmatrix} \hat{c}_1^j \\ \hat{c}_2^j \\ \hat{c}_3^j \end{pmatrix} = \left((R^j)^t R^j\right)^{-1} (R^j)^t Mes_{Tr}^j.
$$

De même en exploitant les mesures du soufre

$$
(S(t_0+\delta t), S(t_0+2\delta t), \dots, S(t_0+j\delta t)).
$$

on peut obtenir une estimation au sens des moindres carrés des quantités

$$
\left\{ \begin{array}{lcl} d_1 & = & s_1 - s_3 \\ d_2 & = & s_2 - s_3 \\ d_3 & = & \frac{(Q-u_4)s_3+u_4 s_4}{Q}. \end{array} \right. \qquad (59)
$$

On utilise

$$
Mes_S^j = \begin{pmatrix}
(t_0+\delta t)S(t_0+\delta t) - t_0 S(t_0) \\
(t_0+2\delta t)S(t_0+2\delta t) - t_0 S(t_0) \\
\vdots \\
(t_0+j\delta t)S(t_0+j\delta t) - t_0 S(t_0)
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} \hat{d}_1^j \\ \hat{d}_2^j \\ \hat{d}_3^j \end{pmatrix} = \left((R^j)^t R^j\right)^{-1} (R^j)^t Mes_S^j.
$$

Enfin ces estimations nous permettent de reconstituer des estimateurs $\hat{a}, \hat{b}, \hat{\alpha}, \hat{c}, \hat{d}, \hat{\beta}$. Sachant

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
D & = & c_1 d_2 - d_1 c_2 \\
a & = & d_2 \frac{Q}{D} \\
b & = & -c_2 \frac{Q}{D} \\
\alpha & = & d_3 c_2 \frac{Q}{D} - c_3 d_2 \frac{Q}{D} \\
c & = & -d_1 \frac{Q}{D} \\
d & = & c_1 \frac{Q}{D} \\
\beta & = & c_3 d_1 \frac{Q}{D} - d_3 c_1 \frac{Q}{D}.
\end{array}
\right. \tag{60}
$$

Résultats en boucle fermée avec observateur. — Avec les mêmes valeurs numériques que précédemment, on introduit une incertitude initiale sur les spécifications des bacs

$$(a, b, \alpha, c, d, \beta)_{estimés} = (a, b, \alpha, c, d, \beta)_{réels}/1.1$$

et on obtient alors les résultats de la figure 5.

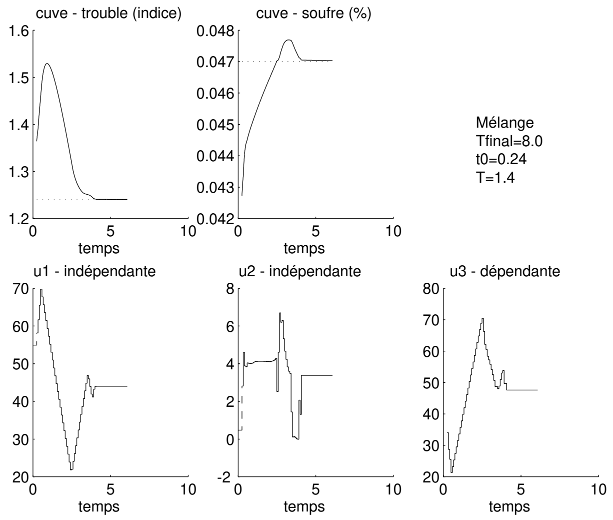

Figure 5 – Simulations en boucle fermée avec observateur.

5.5. Conclusion

Au delà des systèmes de mélanges, qui ont des dynamiques linéaires dépendant du temps, nous avons confirmé l'utilité de la platitude pour le contrôle sous contraintes des systèmes linéaires, déjà présentée au chapitre 2.

Cette technique de contrôle s'avère compatible avec les techniques classiques d'estimation de paramètres et est ainsi performante en pratique.

CHAPITRE 6

MÉLANGES LINÉAIRES AVEC RETARDS DÉPENDANT DES ENTRÉES

Nous nous intéressons ici à la platitude de modèle de mélanges dans un réseau constitué de canalisations dont les volumes sont non négligeables. On montre que ces systèmes admettent une modélisation par des équations différentielles à retards, où les retards dépendent des entrées. On montre ensuite qu'on peut paramétrer les trajectoires de ces systèmes en faisant intervenir en plus des opérations algébriques et de dérivations usuelles dans le cadre de la platitude, la composition et l'inversion des fonctions. Ceci résout le problème de la planification de trajectoires. Ce chapitre reprend à la section 6.1 les travaux publiés dans [**PCR98**] et les complète par la résolution du cas général à la section 6.2.

Introduction

En raffinage, la dernière étape de la fabrication des carburants est une étape de mélange de produits (appelés produits de base) ayant des propriétés différentes (teneur en soufre, indice d'octane, point de trouble, *etc*). Les bacs contenant ces produits de base sont reliés au dispositif de mélangeage par des canalisations qui peuvent être très longues suivant la topographie de la raffinerie. Ces longueurs de canalisations entrainent en général des retards, inversement proportionnels aux débits. Nous montrons ici comment prendre en compte explicitement ces retards dans le calcul des débits nécessaires à la réalisation des mélanges. Pour celà nous indiquons qu'il faut ajouter la composition et l'inversion des fonctions aux règles algébriques et de dérivation habituelles.

Dans l'exemple de la section 6.1, nous avons remplacé les produits de base par des couleurs fondamentales, et le mélange final par un volume d'une couleur librement choisie. Nous montrons comment ordonnancer des batchs successifs.

La section 6.2 est consacrée à l'étude du cas général d'un réseau en forme d'arbre binaire.

6.1. Mélange des couleurs - ordonnancement des batchs

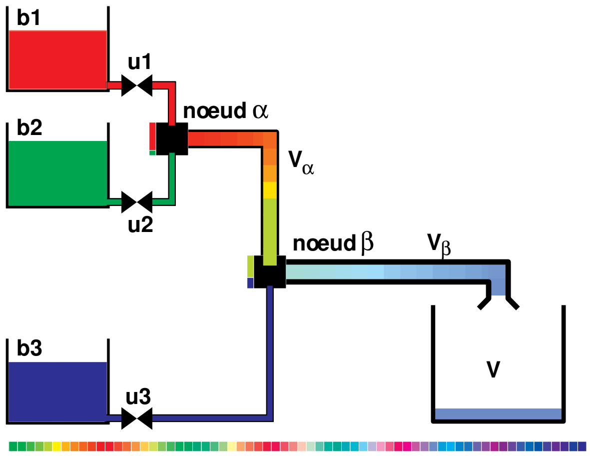

Figure 1 – Le procédé batch de mélange des couleurs. Écoulement piston : retards dépendant des commandes à cause des volumes morts V_α et V_β.

On a représenté sur la figure 1, un exemple simple d'un tel système à retards variables. À partir de trois bacs de base contenant les couleurs fondamentales, on réalise un mélange d'un volume donné et d'une couleur librement choisie dans le bac de sortie. À cause des volumes des canalisations, on doit prendre en compte dans le modèle des retards qui dépendent des vitesses d'écoulements, i.e. des entrées. On suppose les écoulements de type piston dans les canalisations α et β. On montre que les trajectoires du système peuvent être explicitement paramétrées par les volumes de produits de bases coulés dans le bac de sortie $t \mapsto \boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)$: les trois commandes $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et les profils de couleur contenus dans les canalisations α et β s'expriment via $\boldsymbol{Y}$ et ses dérivées temporelles $\dot{\boldsymbol{Y}}$.

Notations. — Les notations sont en partie expliquées sur la figure 1.
- une couleur (i.e. une composition) est un triplet (c_1, c_2, c_3) où $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, $0 \leq c_i \leq 1$ et $c_1 + c_2 + c_3 = 1$.
- $\boldsymbol{b_i} = (\delta_{ij})^T_{j=1,2,3}$ correspond à la couleur fondamentale contenue dans le bac i, pour $i = 1, 2, 3$. Les vecteurs $\boldsymbol{b_i}$ sont orthogonaux.
- $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ sont les débits sortants des bacs de base (commandes).
- $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, 0)^T$ est à tout instant la couleur présente au nœud α.
- $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$ est à tout instant la couleur présente au nœud β.
- V est le volume contenu dans le bac de sortie (niveau), c'est une fonction du temps.

- $\boldsymbol{X}$ est la couleur du contenu du bac de sortie.
- $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)^T = (V.X_1, V.X_2, V.X_3)^T$ sont les volumes de couleurs fondamentales coulés dans le bac de sorties. Y_1, Y_2, Y_3 sont des fonctions strictement croissantes du temps.
- V_α est le volume du tuyau α.
- V_β est le volume du tuyau β.

Remarquons que

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \;\; \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1, \;\; X_1 + X_2 + X_3 = 1.$$

Équations bilan. — Sous l'hypothèse que l'écoulement est piston dans le tuyau α, à tout instant t la couleur de la quantité infinitésimale qui atteint le nœud β est $\boldsymbol{\alpha}(\Gamma_\alpha(t))$ où la date $\Gamma_\alpha(t) < t$ dépend de t via l'équation

$$V_\alpha = \int_{\Gamma_\alpha(t)}^{t} (u_1(s) + u_2(s)) \; ds. \tag{61}$$

De la même manière, à tout instant t, la couleur de la quantité infinitésimale qui atteint le bac de sortie est $\boldsymbol{\beta}(\Gamma_\beta(t))$, où la date $\Gamma_\beta(t) < t$ est définie par

$$V_\beta = \int_{\Gamma_\beta(t)}^{t} (u_1 + u_2 + u_3)(s) \; ds. \tag{62}$$

Mélanges instantanés aux nœuds α et β. — On suppose la loi de mélange linéaire au nœuds α et β

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \frac{u_1(t) \; \boldsymbol{b_1} + u_2(t) \; \boldsymbol{b_2}}{u_1(t) + u_2(t)}, \tag{63}$$

$$\boldsymbol{\beta}(t) = \frac{(u_1(t) + u_2(t)) \;\; \boldsymbol{\alpha}(\Gamma_\alpha(t)) + u_3(t) \; \boldsymbol{b_3}}{u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)}. \tag{64}$$

L'équation dynamique de dilution dans le bac de sortie donne

$$\frac{d\boldsymbol{Y}}{dt} = \frac{d}{dt}(V\boldsymbol{X}) = (u_1 + u_2 + u_3)(t) \; \boldsymbol{\beta}(\Gamma_\beta(t)). \tag{65}$$

Or $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1$, et on déduit de (65)

$$u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) = \dot{V}(t).$$

Modèle. — *Les équations* $(61, 62, 63, 64, 65)$ *décrivent la dynamique du système : les relations entre* $\boldsymbol{u}$ *et* $\boldsymbol{Y}$ *font intervenir des retards dépendants non-linéairement de* $\boldsymbol{u}$ *via les équations implicites définissant* Γ_α *et* Γ_β*. Le modèle fait également intervenir une équation différentielle* (65).

Paramétrisation des trajectoires. — Nous montrons ici que toutes les grandeurs du système s'écrivent au moyen de $\boldsymbol{Y}$ et d'un nombre fini de ses dérivées. Plus précisément, il y a une correspondance biunivoque entre $\boldsymbol{Y} = V\boldsymbol{X}$ et l'ensemble $(V, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, u_1, u_2, u_3)$ solution du système d'équations $(61, 62, 63, 64, 65)$. Chaque composante de $\boldsymbol{Y}$ étant une fonction croissante et dérivable connue, calculons en utilisant l'inversion des fonctions les quantités $(V, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, u_1, u_2, u_3)$.

Calcul de V et de X. — Tout d'abord, on a

$$V = Y_1 + Y_2 + Y_3, \quad X = \frac{\boldsymbol{Y}}{Y_1 + Y_2 + Y_3} \tag{66}$$

Calcul du retard Γ_β. — Or $u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) = \dot{V}(t)$, donc l'équation (62) s'écrit

$$V_\beta = V(t) - V(\Gamma_\beta(t)).$$

Puisque V est une fonction strictement croissante du temps, on peut l'inverser pour obtenir

$$\Gamma_\beta = V^{-1} \circ (V - V_\beta). \tag{67}$$

Ainsi Γ_β est également une fonction strictement croissante du temps, son inverse est donnée par

$$\Gamma_\beta^{-1} = V^{-1} \circ (V + V_\beta). \tag{68}$$

Calcul de $\boldsymbol{\beta}$. — L'équation (65) s'écrit

$$\dot{\boldsymbol{Y}}(t) = \boldsymbol{\beta}(\Gamma_\beta(t))\ \dot{V}(t)$$

ce qui donne $\boldsymbol{\beta}$ via

$$\boldsymbol{\beta} = \left[\frac{\dot{\boldsymbol{Y}}}{\dot{V}}\right] \circ \Gamma_\beta^{-1}. \tag{69}$$

Calcul de u_3. — Puisque $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{b_3}$ sont des vecteurs orthogonaux, l'équation (64) implique

$$\beta_3 = \frac{u_3(t)}{u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)} = \frac{u_3}{\dot{V}}.$$

On en tire la valeur de u_3

$$u_3 = \dot{V}\ \beta_3, \tag{70}$$

et

$$u_1 + u_2 = \dot{V}\ (1 - \beta_3) = \dot{V}\ (\beta_1 + \beta_2).$$

Calcul du retard Γ_α. — L'équation (61) qui définit implicitement Γ_α fait intervenir une intégrale qui peut être calculée explicitement. Puisque

$$(u_1 + u_2)(t) = \dot{V}(t)\ (\beta_1 + \beta_2)(t)$$

avec

$$\boldsymbol{\beta}(t) = \left[\frac{\dot{\boldsymbol{Y}}}{\dot{V}}\right] \circ \Gamma_\beta^{-1}(t) \tag{71}$$
$$= \left[\frac{\dot{\boldsymbol{Y}}}{\dot{V}}\right] \circ V^{-1} \circ (V + V_\beta)(t).$$

On a

$$(u_1 + u_2)(t) = \dot{V}(t)\left(\left[\frac{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2}{\dot{V}}\right] \circ V^{-1} \circ (V + V_\beta)(t)\right).$$

L'intégrand de (61) s'exprime comme (où d est l'opérateur de différenciation totale)

$$(u_1(s) + u_2(s))\ ds = \left(\left[\frac{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2}{\dot{V}}\right] \circ V^{-1} \circ (V + V_\beta)\right)\ dV$$
$$= \left(\left[\frac{\dot{Y}_1 + \dot{Y}_2}{\dot{V}}\right] \circ V^{-1} \circ (V + V_\beta)\right)\ d(V + V_\beta).$$

Le membre de droite de l'équation est de la forme

$$\left(\left[\frac{df}{dg}\right] \circ g^{-1} \circ h\right) dh$$

or $df = \dot{f}dt$ et $dg = \dot{g}dt$. Mais

$$\left(\left[\frac{df}{dg}\right] \circ g^{-1} \circ h\right) dh = d(f \circ g^{-1} \circ h).$$

On obtient finalement

$$(u_1 + u_2)ds = d\left((Y_1 + Y_2) \circ V^{-1} \circ (V + V_\beta)\right).$$

Ce qui permet de réécrire (61) sous la forme

$$\left[(Y_1 + Y_2) \circ V^{-1} \circ (V + V_\beta)\right]_{\Gamma_\alpha(t)}^{t} = V_\alpha$$
$$(Y_1 + Y_2) \circ \Gamma_\beta^{-1} = (Y_1 + Y_2) \circ \Gamma_\beta^{-1} \circ \Gamma_\alpha + V_\alpha,$$

et d'en déduire

$$\Gamma_\alpha = \Gamma_\beta \circ (Y_1 + Y_2)^{-1} \circ \Big((Y_1 + Y_2) \circ \Gamma_\beta^{-1} - V_\alpha\Big), \tag{72}$$

$$\Gamma_\alpha^{-1} = \Gamma_\beta \circ (Y_1 + Y_2)^{-1} \circ \Big((Y_1 + Y_2) \circ \Gamma_\beta^{-1} + V_\alpha\Big). \tag{73}$$

Calcul de α. — La projection de (64) sur b_1 donne

$$\alpha_1 \circ \Gamma_\alpha = \frac{\dot{V}\beta_1}{\dot{V}(1-\beta_3)} = \frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}.$$

En utilisant (69), on obtient

$$\alpha_1 \circ \Gamma_\alpha = \left[\frac{\dot{Y}_1}{\dot{Y}_1+\dot{Y}_2}\right] \circ \Gamma_\beta^{-1}.$$

Et donc

$$\alpha_1 = \left[\frac{\dot{Y}_1}{\dot{Y}_1+\dot{Y}_2}\right] \circ \Gamma_\beta^{-1} \circ \Gamma_\alpha^{-1} \tag{74}$$

et

$$\alpha_2 = 1 - \alpha_1. \tag{75}$$

Calcul de u_1 et de u_2. — On obtient les commandes u_1 et u_2 à partir de

$$\alpha_1 = \frac{u_1}{u_1+u_2}$$

et

$$u_1 = \alpha_1 \dot{V}(1-\beta_3). \tag{76}$$

Ensuite, la projection de (63) sur b_2 donne

$$u_2 = \alpha_2 \dot{V}(1-\beta_3). \tag{77}$$

Et d'autre part nous connaissons déjà u_3 par (70).

Formules de platitude. — *En regroupant les formules* (66, 67, 69, 70, 73, 74, 75, 76, 77) *on exprime toutes les grandeurs du système en fonction de* $\boldsymbol{Y}$.

Planification de trajectoires : ordonnancement des batchs. — Nous allons résumer, en utilisant une homothétie temporelle les relations entre $\boldsymbol{Y}$ et $\boldsymbol{u}$. La fonction $t \mapsto \sigma(t) \mapsto \boldsymbol{Y}(\sigma(t))$ est donnée par $t \mapsto \sigma(t)$ une fonction croissante dérivable du temps et $\sigma \mapsto Y_i(\sigma)$ une fonction positive croissante et quel que soit $i = 1, 2, 3$. Les calculs de la section précédente donnent un algorithme simple pour calculer $\boldsymbol{u}(t)$ à partir $\boldsymbol{Y}$ (où $'$ est la dérivation $d/d\sigma$) :

1. à tout instant résoudre (via, par exemple une méthode type Newton) l'équation scalaire

$$\sum_{i=1}^{3} Y_i(\sigma_\beta) = \sum_{i=1}^{3} Y_i(\sigma(t)) + V_\beta$$

avec σ_β, qui correspond à $\Gamma_\beta^{-1}(t)$ dans (68), comme inconnue.

2. résoudre une deuxième équation scalaire
$$Y_1(\sigma_\alpha) + Y_2(\sigma_\alpha) = Y_1(\sigma_\beta) + Y_2(\sigma_\beta) + V_\alpha$$
avec σ_α, qui correspond à $\Gamma_\beta^{-1} \circ \Gamma_\alpha^{-1}(t)$ dans (73), comme inconnue.
3. Poser, en accord avec (74) et (75)
$$\alpha_1(t) = \frac{Y_1'(\sigma_\alpha)}{Y_1'(\sigma_\alpha) + Y_2'(\sigma_\alpha)}, \quad \alpha_2(t) = 1 - \alpha_1(t)$$
et, en accord avec (71)
$$\boldsymbol{\beta}(t) = \left[\frac{\boldsymbol{Y}'}{V'}\right](\sigma_\beta)$$
avec $V = Y_1 + Y_2 + Y_3$.
4. En déduire les ouvertures de vannes
$$u_1(t) = \frac{Y_1'(\sigma_\alpha)}{Y_1'(\sigma_\alpha) + Y_2'(\sigma_\alpha)} \frac{Y_1'(\sigma_\beta) + Y_2'(\sigma_\beta)}{Y_1'(\sigma_\beta) + Y_2'(\sigma_\beta) + Y_3'(\sigma_\beta)} (Y_1'(\sigma) + Y_2'(\sigma) + Y_3'(\sigma))\dot{\sigma}(t)$$
$$u_2(t) = \frac{Y_2'(\sigma_\alpha)}{Y_1'(\sigma_\alpha) + Y_2'(\sigma_\alpha)} \frac{Y_1'(\sigma_\beta) + Y_2'(\sigma_\beta)}{Y_1'(\sigma_\beta) + Y_2'(\sigma_\beta) + Y_3'(\sigma_\beta)} (Y_1'(\sigma) + Y_2'(\sigma) + Y_3'(\sigma))\dot{\sigma}(t)$$
$$u_3(t) = (Y_1'(\sigma) + Y_2'(\sigma) + Y_3'(\sigma))\dot{\sigma}(t) - u_1(t) - u_2(t)$$
avec comme nous l'avons établi
$$\sigma_\beta = (Y_1 + Y_2 + Y_3)^{-1} \circ (Y_1 + Y_2 + Y_3 + V_\beta)$$
$$\sigma_\alpha = (Y_1 + Y_2)^{-1} \circ (Y_1 + Y_2 + V_\alpha) \circ \sigma_\beta.$$

Supposons qu'on ait à produire une série $(a, b, c \dots)$ de mélanges successifs dans le bac de sortie, cette série étant définie par les quantités $Q^a = (Q_1^a, Q_2^a, Q_3^a)$, Q^b, Q^c, *etc.* Après chaque mélange (batch) effectué de la série, on ne s'autorise pas à vider les canalisations α et β. If faut donc prendre en compte les contenus des canalisations dans la planification du batch suivant. Il suffit de définir une courbe croissante pour chaque composante de $\boldsymbol{Y}$, $t \mapsto \sigma \mapsto Y_i$ comme par exemple celle représentée sur la figure 2, où la partie de la courbe inférieure à Q_i^{init} est une conséquence du contenu initial des canalisations α et β. On pourra également imposer des tangentes horizontales aux temps t^a, t^b, t^c, *etc*pour assurer des ouvertures et fermetures de vannes en douceur à la fin et au début de chaque batch.

6.2. Résultat général pour les réseaux en forme d'arbres binaires

Nous considérons ici un réseau de canalisations organisé en forme d'arbre binaire et destiné à produire un mélange dans un bac de sortie. Ce réseau comporte 2^N entrées. Chaque entrée est définie par son débit q_i et sa composition b_i. À cause des longueurs de canalisations (volumes morts) on doit tenir compte de retards qui sont

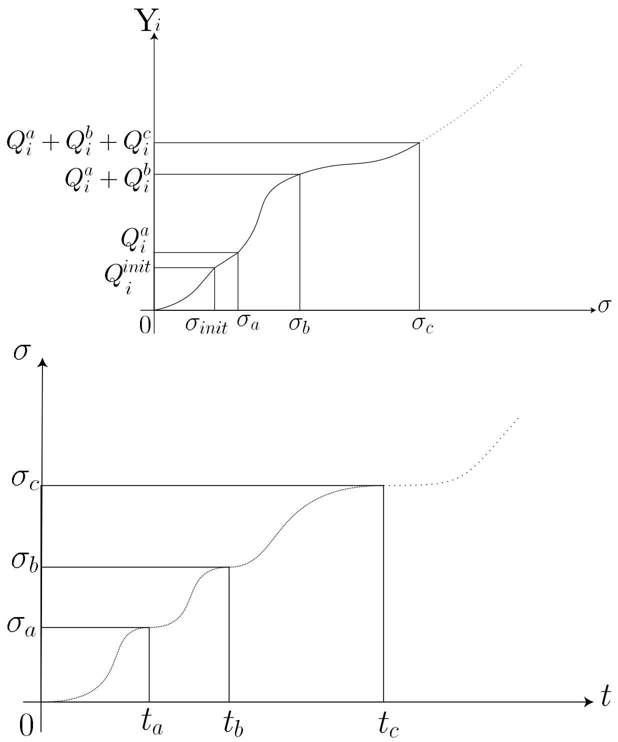

Figure 2 – Ordonnancement des batchs en utilisant une bonne trajectoire pour la sortie plate $t \mapsto Y(t)$.

fonctions des débits. On suppose ici, pour simplifier les notations, que la section des canalisations S est constante dans le réseau.

***Théorème 6.1* (Résultat principal).** — *Le système constitué par l'arbre binaire à retard représenté sur la figure 3, où on suppose les lois de mélange linéaires et l'écoulement incompressible (et irréversible) est plat. En d'autres termes on peut exprimer toutes ses variables, i.e. les 2^N entrées $(q_1, \ldots, q_{2^N})$ et la sortie Y grâce à une famille de variables $\mathcal{L}$ (avec card$\mathcal{L} = 2^N$). Les relations permettant d'exprimer la platitude du système font intervenir des calculs algébriques, la dérivation, la composition et l'inversion des fonctions.*

Dans chaque partie $L_{i,j}$ du réseau, voir figure 4, notons

$$V_{i,j} = \int_0^t q_{i,j}(s)ds, \qquad \dot{V}_{i,j}(t) = q_{i,j}(t). \tag{78}$$

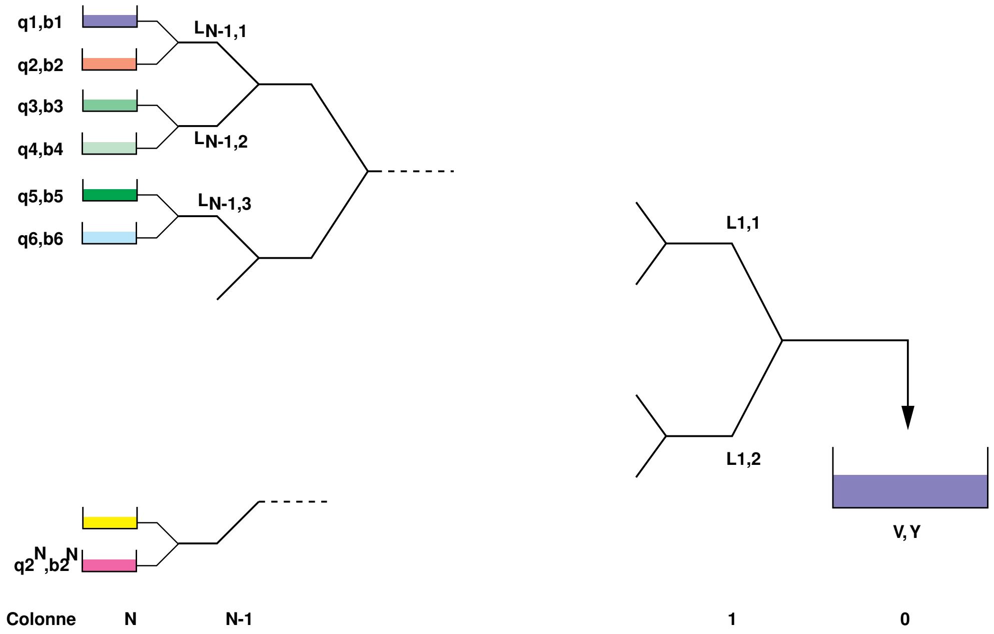

Figure 3 – Réseau en forme d'arbre binaire.

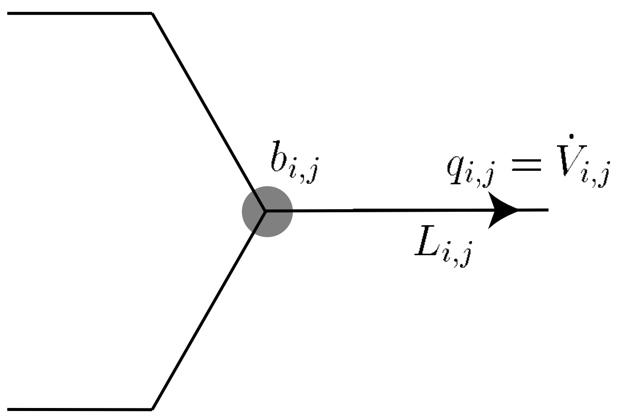

Figure 4 – Une partie du réseau ($noeud_{i,j}$).

Notations. — On note dans la suite

– $b_1, \dots, b_{2^N}$ sont les compositions des bacs d'entrée du réseau,

- $q_{i,j} = \dot{V}_{i,j}$ est le débit dans la portion (i,j) du réseau,
- $q_1 = q_{N,1}, \ldots, q_{2^N} = q_{N,2^N}$ sont les débits sortant des bacs d'entrée,
- $\delta_{i,j}$ est le retard se rapportant à l'écoulement dans la partie (i,j) du réseau,
- $b_{i,j}$ est la composition au nœud (i,j),
- Y est la composition dans le bac de sortie,
- $V = V_{0,1}$ est le volume du fluide contenu dans le bac de sortie,
- $b = b_{0,1}$, $q = q_{0,1}$ avec la relation

$$Y(t) = \frac{\int_0^t b(s)q(s)ds}{\int_0^t q(s)ds}.$$

***Hypothèse* $(\mathcal{H})$.** — *On suppose qu'il existe un couple* $\{2i-1, 2i\}$ *tel que* $b_{2i-1} \neq b_{2i}$.

À une renumérotation près, nous supposons désormais que $b_1 \neq b_2$.

Proposition 6.2. — *Soit* $\mathcal{S} = \{(q_{i,j}), (b_{i,j}), \{(V_{i,j}) - \{V_{N,1}, V_{N,2}\}, \dot{V}_{N,1}, \dot{V}_{N,2}, V, Y, \delta_{i,j}\}$. *Toutes les grandeurs de* $\mathcal{S}$ *s'expriment au moyen d'éléments d'une famille* $\mathcal{L}$.

Dans ce qui suit nous notons $\chi = fonction(\mathcal{L})$ pour signifier que χ s'expriment au moyen d'éléments de $\mathcal{L}$.

Théorème 6.3. — *Le système ayant les* 2^N *quantités* $(q_1, \ldots, q_{2^N})$ *comme entrées et* Y *comme sortie est* plat, $\mathcal{L}$ *est une famille de sorties plates.*

Le théorème 6.3 est une conséquence directe de la proposition 6.2 où on considère les $V_{i,j}$ comme des variables intermédiaires. Dans ce qui suit nous démontrons la propriété 6.2.

6.2.1. Preuve du résultat 6.2. —

Construction de la famille $\mathcal{L}$. — On parcourt l'arbre *de droite à gauche* pour construire la famille $\mathcal{L}^*$ en choisissant à chaque nœud rencontré une branche (par souci de simplicité, on choisira toujours celle du haut). À chaque nœud on conserve donc un $V_{i,j}$. On obtient finalement une famille à $1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{2^N}{2} = 2^N$ éléments

$$\mathcal{L}^* = \begin{pmatrix} V \\ V_{1,1} \\ V_{2,1}, V_{2,3} \\ V_{3,1}, V_{3,3}, V_{3,5}, V_{3,7} \\ \cdots \\ V_{N-1,1}, V_{N-1,3}, \ldots, \ldots, V_{N-1,2^{N-1}-1} \\ V_{N,1}, V_{N,3}, \ldots, \ldots, \ldots, V_{N,2^N-1} \end{pmatrix}.$$

Ôtons de cette famille l'élément $V_{N,1}$ et remplaçons le par Y.
Soit

$$\mathcal{L} = (\mathcal{L}^* - \{V_{N,1}\}) \cup \{Y\},$$

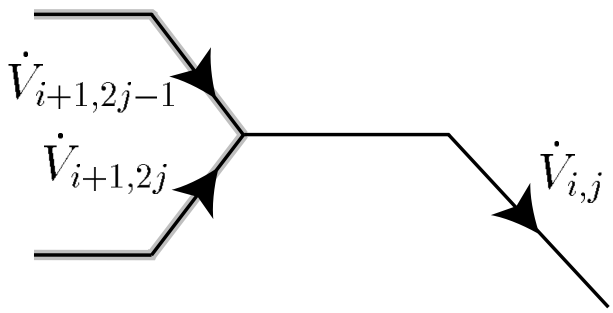

Figure 5 – Incompressibilité de l'écoulement.

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} V \\ V_{1,1} \\ V_{2,1}, V_{2,3} \\ V_{3,1}, V_{3,3}, V_{3,5}, V_{3,7} \\ \cdots \\ V_{N-1,1}, V_{N-1,3}, \ldots, \ldots, V_{N-1,2^{N-1}-1} \\ \qquad V_{N,3}, \ldots, \ldots, V_{N,2^N-1} \\ Y \end{pmatrix},$$

$$card(\mathcal{L}) = 2^N.$$

En utilisant la physique du système (l'incompressibilité et la nature piston de l'écoulement) nous pouvons écrire toutes les variables $(q_{i,j})$ avec $(i,j) \notin \{(N,1),(N,2)\}$, tous les $(\delta_{i,j})$ et certains $(b_{i,j})$. Ensuite nous montrons comment écrire un système linéaire de dimension 2×2 en les variables q_1 et q_2. Puis nous montrons que ce système possède une unique solution sous l'hypothèse $\mathcal{H}$. Ceci nous permet de reconstruire toutes les variables manquantes et donne la conclusion.

Incompressibilité. — En premier lieu, calculons les $V_{i,j}$ pour $(i,j) \notin \{(N,1),(N,2)\}$. L'incompressibilité de l'écoulement implique

$$\dot{V}_{i+1,2j-1} + \dot{V}_{i+1,2j} \quad = \quad \dot{V}_{i,j} \qquad \forall i \in \{0,\ldots,N-1\}, 1 \leq j \leq 2^i.$$

D'où en intégrant avec les même conditions initiales à zéro

$$V_{i+1,2j-1} + V_{i+1,2j} = V_{i,j} \qquad \forall i \in \{0,\ldots,N-1\}, 1 \leq j \leq 2^i. \tag{79}$$

En parcourant le réseau *de droite à gauche*, nous pouvons résoudre toutes ces équations.

Supposons avoir déjà établi que dans la colonne k : $V_{k,j} = f_{k,j}(\mathcal{L}),\ \forall j = 1, \dots, 2^k$ (ce qui est vrai au rang $k = 0$ puisque $V_{0,1} \in \mathcal{L}$). Alors

$$V_{k+1,2j} = f_{k,j}(\mathcal{L}) - V_{k+1,2j-1},$$

or $V_{k+1,2j-1} \in \mathcal{L}$ pour $k < N - 1$ donc

$$V_{k+1,2j} = f_{k+1,2j}(\mathcal{L}).$$

En procédant de la sorte on calcule les variables manquantes $V_{k+1,j}$ de la colonne. Ainsi de suite nous parvenons à la colonne N où on peut calculer tous les $(V_{N,j})$ à l'exception de $V_{N,1}$ et $V_{N,2}$ puisque $V_{N,1}$ a été ôté de $\mathcal{L}$. En résumé on peut écrire

$$V_{i,j} = f_{i,j}(\mathcal{L}) \text{ pour } (i,j) \notin \{(N,1),(N,2)\} \tag{80}$$

et

$$V_{N,1} + V_{N,2} = V_{N-1,1} = f(\mathcal{L}). \tag{81}$$

Retards. — Dans chaque partie $(i,j), i \in \{0, \dots, N\}, 1 \le j \le 2^i$ du réseau on peut écrire

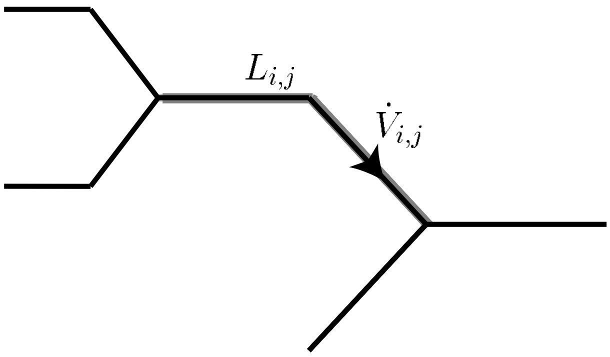

Figure 6 – Les retards $(\delta_{i,j})$ sont des conséquences des longueurs de canalisation.

$$V_{i,j}(t) - V_{i,j}(t - \delta_{i,j}(t)) = L_{i,j}S$$

ce qui donne

$$t - \delta_{i,j}(t) = V_{i,j}^{-1} \circ (V_{i,j} - L_{i,j}S)(t)$$

$$\delta_{i,j} = id - V_{i,j}^{-1} \circ (V_{i,j} - L_{i,j}S) \tag{82}$$

où id désigne la fonction identité. D'où

$$\delta_{i,j} = h_{i,j}(\mathcal{L}). \tag{83}$$

Mélanges. — À chaque nœud $(i,j), \forall i \in \{0,\ldots,N-1\}, 1 \leq j \leq 2^i$ la loi linéaire de mélange s'exprime comme

$$\begin{aligned} b_{i,j}(t)\dot{V}_{i,j}(t) =& b_{i+1,2j-1}(t-\delta_{i+1,2j-1}(t))\dot{V}_{i+1,2j-1}(t) \\ &+ b_{i+1,2j}(t-\delta_{i+1,2j}(t))\dot{V}_{i+1,2j}(t) \end{aligned} \tag{84}$$

où $b_{N,j}(t) = b_j$ est une constante. En utilisant (82) dans la dernière équation on

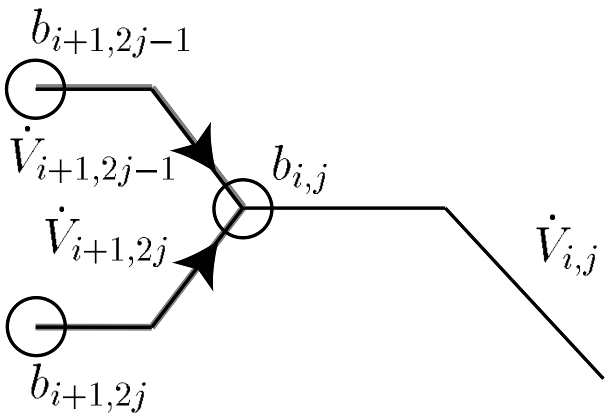

Figure 7 – Mélange à un nœud du réseau.

obtient

$$\begin{aligned} b_{i,j}\dot{V}_{i,j} =& b_{i+1,2j-1} \circ (V_{i+1,2j-1}^{-1} \circ (V_{i+1,2j-1} - l_{i+1,2j-1}S))\dot{V}_{i+1,2j-1} \\ &+ b_{i+1,2j} \circ (V_{i+1,2j}^{-1} \circ (V_{i+1,2j} - l_{i+1,2j}S))\dot{V}_{i+1,2j}. \end{aligned}$$

On résoud toutes ces équations *de gauche à droite.*

1. *Première étape.* (colonne $N-1^{ème}$)

$$\dot{V}_{N-1,1}b_{N-1,1}(t) = \dot{V}_{N,1}(t)b_1 + \dot{V}_{N,2}(t)b_2$$

   qui s'écrit

$$b_{N-1,1} = (\dot{V}_{N,1}.b_1 + \dot{V}_{N,2}.b_2)\frac{1}{\dot{V}_{N-1,1}}$$

   et pour les autres $b_{N-1,j}$ avec $j > 1$ on obtient

$$\dot{V}_{N-1,j}b_{N-1,j}(t) = \dot{V}_{N,2j-1}(t)b_{2j-1} + \dot{V}_{N,2j}(t)b_{2j}.$$

   En d'autres termes

$$b_{N-1,j} = F_{N,1,j}(\mathcal{L}) \text{ pour } j > 1.$$

2. *Récurrence.*

***Proposition* (au rang i).** —

(a) $b_{N-i,1} = (\dot{V}_{N,1}.b_1 + \dot{V}_{N,2}.b_2) \circ \Phi_i(\mathcal{L})F_i(\mathcal{L}) + G_i(\mathcal{L})$,

(b) $b_{N-i,j} = F_{N-i,j}(\mathcal{L})$ *pour* $j > 1$.

i. — La proposition est vérifiée au rang $i = 1$

$$\begin{aligned}
\Phi_1(\mathcal{L}) &= id \\
F_1(\mathcal{L}) &= \frac{1}{\dot{V}_{N-1,1}} \\
G_1(\mathcal{L}) &= 0.
\end{aligned}$$

ii. — Montrons que si la proposition est vérifiée au rang i alors elle l'est au rang $i+1$ (avec $i < N$).

Sur le nœud supérieur de la colonne, la loi de mélange donne

$$\begin{aligned}
&b_{N-(i+1),1}\dot{V}_{N-(i+1),1} = \\
&\qquad b_{N-i,1} \circ V_{N-i,1}^{-1} \circ (V_{N-i,1} - L_{N-i,1}S)\dot{V}_{N-i,1} \\
&\qquad + b_{N-i,2} \circ V_{N-i,2}^{-1} \circ (V_{N-i,2} - L_{N-i,2}S).\dot{V}_{N-i,2}.
\end{aligned} \tag{85}$$

Définissons l'application suivante

$$\begin{cases}
\Psi_{i+1}(\mathcal{L})(t) &= V_{N-i,1}^{-1} \circ (V_{N-i,1} - L_{N-i,1}S)(t) \\
\Psi_{i+1}(\mathcal{L})^{-1}(t) &= V_{N-i,1}^{-1} \circ (V_{N-i,1} + L_{N-i,1}S)(t).
\end{cases}$$

Avec ces notations l'équation (85) s'écrit

$$\begin{aligned}
&b_{N-(i+1),1}\dot{V}_{N-(i+1),1} = \\
&\qquad b_{N-i,1} \circ \Psi_{i+1}(\mathcal{L})\dot{V}_{N-i,1} \\
&\qquad + b_{N-i,2} \circ V_{N-i,2}^{-1} \circ (V_{N-i,2} - L_{N-i,2}S)\dot{V}_{N-i,2}.
\end{aligned}$$

D'après la proposition au rang i on a

$$b_{N-i,1} = (\dot{V}_{N,1}b_1 + \dot{V}_{N,2}b_2) \circ \Phi_i(\mathcal{L})F_i(\mathcal{L}) + G_i(\mathcal{L}),$$

et donc

$$\begin{aligned}
b_{N-(i+1),1} =& \frac{\Big((\dot{V}_{N,1}.b_1 + \dot{V}_{N,2}.b_2) \circ \Phi_i(\mathcal{L})F_i(\mathcal{L})\Big) \circ \Psi_{i+1}(\mathcal{L})\dot{V}_{N-i,1}}{\dot{V}_{N-(i+1),1}} \\
&+ \frac{G_i(\mathcal{L}) \circ \Psi_{i+1}\ \dot{V}_{N-i,1}}{\dot{V}_{N-(i+1),1}} \\
&+ \frac{b_{N-i,2} \circ V_{N-i,2}^{-1} \circ (V_{N-i,2} - L_{N-i,2}S)\dot{V}_{N-i,2}}{\dot{V}_{N-(i+1),1}}
\end{aligned} \tag{86}$$

En développant

$$\Big((\dot V_{N,1}b_1 + \dot V_{N,2}b_2) \circ \Phi_i(\mathcal{L})F_i(\mathcal{L})\Big) \circ \Psi_{i+1}(\mathcal{L}) = \\ \Big((\dot V_{N,1}b_1 + \dot V_{N,2}b_2) \circ \Phi_i(\mathcal{L})\Psi_{i+1}(\mathcal{L})\Big)\left(F_i(\mathcal{L})\Psi_{i+1}(\mathcal{L})\right).$$

Soit

$$\begin{aligned}
\Phi_{i+1}(\mathcal{L}) &= \Phi_i(\mathcal{L}) \circ \Psi_{i+1}(\mathcal{L}) \\
F_{i+1}(\mathcal{L}) &= \frac{F_i(\mathcal{L}) \circ \Phi_{i+1}(\mathcal{L})}{\dot V_{N-(i+1),1}} \dot V_{N-i,1} \\
G_{i+1}(\mathcal{L}) &= \frac{b_{N-i,2} \circ V_{N-i,2}^{-1} \circ (V_{N-i,2} - L_{N-i,2}S)\dot V_{N-i,2}}{\dot V_{N-(i+1),1}} \\
&\quad + \frac{G_i(\mathcal{L}) \circ \Psi_{i+1}\dot V_{N-i,1}}{\dot V_{N-(i+1),1}}.
\end{aligned}$$

L'équation (86) devient

$$b_{N-(i+1),1} = \\ (\dot V_{N,1}b_1 + \dot V_{N,2}b_2) \circ \Phi_{i+1}(\mathcal{L})F_{i+1}(\mathcal{L}) + G_{i+1}(\mathcal{L})$$

ce qui prouve la partie (a) de la propostion de récurrence au rang $i+1$.

Sur les autres nœuds ($j > 1$), on a

$$b_{N-(i+1),j} = \\ \frac{b_{N-i,2j-1} \circ \Big(V_{N-i,2j-1}^{-1} \circ (V_{N-i,2j-1} - L_{N-i,2j-1})\Big)}{\dot V_{N-(i+1),j}} \\ + \frac{b_{N-i,2j} \circ \Big(V_{N-i,2j}^{-1} \circ (V_{N-i,2j} - L_{N-i,2j})\Big)}{\dot V_{N-(i+1),j}}$$

ce qui prouve la partie (b) de la proposition de récurrence au rang $i+1$

$$b_{N-k-1,j} = F_{N-k-1,j}(\mathcal{L}), \text{ pour } j > 1.$$

iii. — En conséquence des points i et ii, la proposition de récurrence est vraie des rangs $i = 1$ à $i = N$.

3. *Dernière étape.* Nous obtenons finalement

$$b_{0,i} = b = (\dot V_{N,1} + \dot V_{N,2}) \circ \Phi_N(\mathcal{L})\ F_N(\mathcal{L}) + G_N(\mathcal{L}).$$

Et donc

$$\frac{b - G_N(\mathcal{L})}{F_N(\mathcal{L})} = (\dot V_{N,1} + \dot V_{N,2}) \circ \Phi_N(\mathcal{L}).$$

Or $\Phi_N(\mathcal{L})$ est inversible car

$$\begin{aligned}\Phi_N(\mathcal{L}) =&\Psi_N \circ \Psi_{N-1} \circ \ldots \circ \Psi_1 \\ \Phi_N(\mathcal{L})^{-1} =&\Psi_1^{-1} \circ \Psi_2^{-1} \circ \ldots \circ \Psi_N^{-1}.\end{aligned}$$

On peut donc conclure que

$$\dot{V}_{N,1}b_1 + \dot{V}_{N,2}b_2 = \frac{b - G_N(\mathcal{L})}{F_N(\mathcal{L})} \circ \Phi_N^{-1} = g(\mathcal{L}). \tag{87}$$

En regroupant les équations(87) et (81) on obtient le système d'équations suivant

$$\begin{cases} \dot{V}_{N,1} + \dot{V}_{N,2} = f(\mathcal{L}) \\ \dot{V}_{N,1}b_1 + \dot{V}_{N,2}b_2 = g(\mathcal{L}). \end{cases}$$

Sous l'hypothèse $\mathcal{H}$ ce système admet une unique solution

$$\dot{V}_{N,1} = f_{N,1}(\mathcal{L}) \tag{88}$$

$$\dot{V}_{N,2} = f_{N,2}(\mathcal{L}). \tag{89}$$

Enfin, en utilisant la partie (a) de la proposition de récurrence

$$b_{N-i,1} = (\dot{V}_{N,1}b_1 + \dot{V}_{N,2}b_2) \circ \Phi_i(\mathcal{L}) \cdot F_i(\mathcal{L}) + G_i(\mathcal{L}),$$

on obtient

$$b_{N-i,1} = F_{N-i,1}(\mathcal{L}),\ \forall i \tag{90}$$

Conclusion. — Nous avons calculé en utilisant des opérations algébriques, la dérivation temporelle, la composition et l'inversion des fonctions, les variables suivantes au moyen de $\mathcal{L}$

$$\forall i \in \{0, \ldots, N\}, 1 \leq j \leq 2^i$$

$$\begin{cases} \dot{V}_{N,1}, \dot{V}_{N,2} \text{ via (88) et (89)} \\ V_{i,j} \text{ pour } (i,j) \notin \{(N,1),(N,2)\} \text{ via (80)} \\ b_{i,j} \text{ pour } j \neq 1 \text{ via (90)} \\ b_{i,1} \text{ via la proposition de récurrence} \\ \delta_{i,j} \text{ via (82)} \\ q_{i,j}. \end{cases}$$

Ceci prouve donc la proposition 6.2 et les théorèmes 6.3 et 6.1.

6.3. Conclusion

Nous avons montré que lorsque dans les problèmes de mélange, les volumes morts, dus aux longueurs de canalisation, n'étaient pas négligeables, il était encore possible de résoudre le problème de la planification de trajectoires (dans le cas le plus simple comme dans le cas le plus général). Le point important est que les relations de platitude, i.e. les expressions des variables en fonction des sorties plates, font intervenir la composition et l'inversion des fonctions.

PARTIE III

CONTRÔLE DE CERTAINES ÉQUATIONS DES ONDES

Présentation de la troisième partie

Dans cette partie nous étudions certaines équations des ondes. De manière générale, ces équations possèdent des vitesses de propagation finies [**DL85**, page 36]. Cette propriété importante nous permet d'étudier, dans les exemples que nous traitons, les relations liant à chaque fois l'entrée et la sortie plate du système grâce à des opérateurs avance et retard. Nous retrouvons ainsi de manière constructive et pratique la commandabilité des systèmes considérés.

Dans le chapitre 6 nous avons été amenés, pour l'étude des mélanges dans les réseaux de canalisations, à utiliser la loi de composition et l'inversion des fonctions. Cette technique a en fait une portée plus générale. Dans l'exemple du "jongleur" du chapitre 7, on peut écrire des équations à retard le long des trajectoires reliant ses deux mains : ainsi la balle qu'il envoie par sa main gauche finira par arriver dans sa main droite, au bout d'un temps qui ne dépend que de sa vitesse initiale.

De telles équations à retard peuvent être écrites pour les équations aux dérivées partielles qu'on sait étudier par la méthode des caractéristiques. Les équations à retard s'écrivent alors justement le long de ces caractéristiques. Nous illustrons ces idées sur l'équation de Burgers.

Le chapitre 8 est consacré à un modèle de récipient rempli d'un liquide régi par les équations de Saint-Venant. L'étude des caractéristiques est ici précédée d'un changement de coordonnées faisant intervenir les invariants de Riemann et d'une linéarisation.

On aboutit alors, comme dans les cas précédents, à une méthode complète de planification de trajectoire. Nous avons pu tester quantitativement la pertinence de cette approche. Un schéma numérique adapté à la géométrie du récipient nous ayant été fourni par F. Dubois, nous avons pu vérifier la similitude entre nos prévisions du mouvement du fluide et les résultats de cette simulation. Ces travaux ont fait l'objet de la publication [**DPR99**].

Jusqu'à présent les systèmes que nous avons présentés (chapitres 7 et 8) ne font intervenir que des retards ponctuels, i.e. des opérateurs du type $\exp(-\delta s)$ où s est la variable de Laplace.

En nous plaçant justement dans le domaine du calcul opérationnel, ou des transformées de Laplace, nous pouvons ramener l'étude des équations aux dérivées partielles linéaires à une seule variable d'espace en l'étude d'équations différentielles ordinaires. En exploitant les conditions aux bords, y compris l'expression de la commande, nous allons voir sur deux exemples complètement différents comment apparaît la notion de platitude.

Au lieu de nous intéresser, comme on le fait souvent pourtant, à l'influence de la commande sur l'état, i.e. la fonction de transfert (état)/(entrée), nous écrivons la "fonction de transfert" (état)/(sortie plate). Dans ces deux cas on parvient à une écriture dans le domaine de Laplace de la forme

$$\hat{X}(x,s) = A_x(s)\hat{Y}(s)$$

où $\hat{X}$ est la transformée de Laplace de l'état, $\hat{Y}$ est la transformée de Laplace de la sortie plate et $A_x(\cdot)$ est une famille d'opérateurs indexée par la variable x. Naturellement on cherche à revenir dans le domaine temporel. La question est de savoir si $s \mapsto A_x(s)$ possède un original, i.e. une transformée de Laplace inverse.

Dans les deux cas que nous traitons on peut décomposer $A_x(s)$ ainsi

$$A_x(s) = \sum_{i\in\{1,2\}} \alpha_i(x)\exp(\delta_i(x)s) + B_x(s)$$

i.e. en une somme finie d'opérateurs d'avance et de retard ponctuels et un autre opérateur. On montre ensuite que $s \mapsto B_x(s)$ satisfait aux hypothèses du théorème de Paley-Wiener (voir par exemple [**Rud74**]), i.e. que $s \mapsto B_x(s)$ possède un original à support compact.

De retour dans le domaine temporel, on aboutit à une relation du type

$$X(x,t) = \sum_{i\in\{1,2\}} \alpha_i(x)Y(t+\delta_i(x)) + (b_x * Y)(t)$$

où $b_x(t) \supset B_x(s)$ (1).

Cette dernière relation indique que l'état dépend de la sortie plate via des opérateurs à retards ponctuels et distribués à supports compacts. Le caractère compact du support de l'opérateur permet de raccorder des trajectoires du système, prouvant ainsi que ces systèmes sont commandables [**Fli92, Wil91, RW97**].

Comme on le verra à la section 10.2, on peut être amené à faire également intervenir la dérivée temporelle de la sortie plate Y.

Le travail sur l'équation des télégraphistes du chapitre section 9 a fait l'objet de la publication [**FMPR99a**]. Les développements sur l'équation des câbles pesants de la section 10 sont l'objet de l'article [**PRed**].

Au chapitre 10 on étudie en détails les systèmes de câbles pesants homogènes ou inhomogènes portant ou non une masse. Ces travaux sont l'objet des publications [**PRed, PR00**].

(1) Notation de correspondance symbolique de Mac Lachlan [**MLH50**]

CHAPITRE 7

LE JONGLEUR ET L'ÉQUATION DE BURGERS SANS DIFFUSION

Ce chapitre commence par l'étude d'un exemple académique : un jongleur ayant un nombre fini de balles. Des équations à retards apparaissent naturellement en écrivant les équations du mouvement de chaque balle. Ce système est plat. Les calculs font intervenir la composition et l'inversion des fonctions. Nous prolongeons cette approche en faisant le lien avec un cas continu, l'équation de Burgers, pour laquelle nous faisons des calculs semblables.

Introduction

Considérons un jongleur qui fait voler des balles entre ses deux mains. En l'absence d'autre force que celle de gravité, les trajectoires des balles sont des paraboles. Pour éviter les chocs, les trajectoires qu'il choisit sont deux paraboles différentes, voir figure 1.

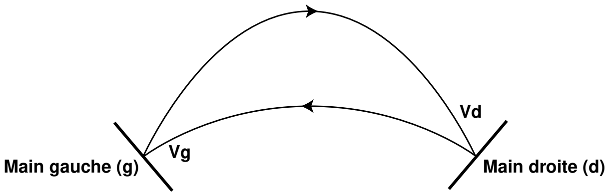

Figure 1 – Les paraboles du jongleur.

Notons $V_g(t)$ et $V_d(t)$ la vitesse d'une balle qui à l'instant t se trouve respectivement dans la main gauche ou droite du jongleur. À la relance, le jongleur lui communique une impulsion $U_d(t)$ ou $U_g(t)$. Cette balle décrit alors une parabole joignant les deux mains du jongleur, ce dernier choisissant correctement l'angle de renvoi, i.e. l'angle de ses mains.

7.1. Modèle du jongleur

Les mains étant à même hauteur, la conservation de l'énergie totale lors du mouvement parabolique implique qu'une balle lancée par exemple de la main droite avec une certaine vitesse V parvient dans l'autre main avec la même vitesse V, le temps de parcours $T = \frac{2V}{g}$ ne dépendant que de cette vitesse initiale. Ceci nous permet d'écrire les équations à retard suivantes constituant le modèle du “jongleur”

Modèle. —

$$\left\{\begin{array}{l} V_d(t + \dfrac{2}{g}(V_g(t) + U_g(t)) = V_g(t) + U_g(t) \\ V_g(t + \dfrac{2}{g}(V_d(t) + U_d(t)) = V_d(t) + U_d(t) \end{array}\right. \tag{91}$$

où V_d, V_g représentent l'état du système et U_d, U_g sont les commandes.

Platitude. — Posons alors

$$y_g = V_g + U_g \tag{92}$$

$$y_d = V_d + U_d, \tag{93}$$

il vient

$$V_d \circ (id + \frac{2}{g} y_g) = y_g \tag{94}$$

$$V_g \circ (id + \frac{2}{g} y_d) = y_d \tag{95}$$

où id est la fonction identité.

Les équations (94, 95) donnent immédiatement les expressions de V_g et V_d en fonction de y_d et y_g

$$V_g = y_d \circ (id + \frac{2}{g} y_d)^{-1} \tag{96}$$

$$V_d = y_g \circ (id + \frac{2}{g} y_g)^{-1} \tag{97}$$

puis on obtient les impulsions

$$U_g = y_g - y_d \circ (id + \frac{2}{g} y_d)^{-1} \tag{98}$$

$$U_d = y_d - y_g \circ (id + \frac{2}{g} y_g)^{-1}. \tag{99}$$

Formules de platitude. — *Les équations* (96, 97, 98, 99) *sont la paramétrisation du mouvement des balles et des impulsions du jongleur. Les sorties plates sont y_g et y_d définies par* (92) *et* (93).

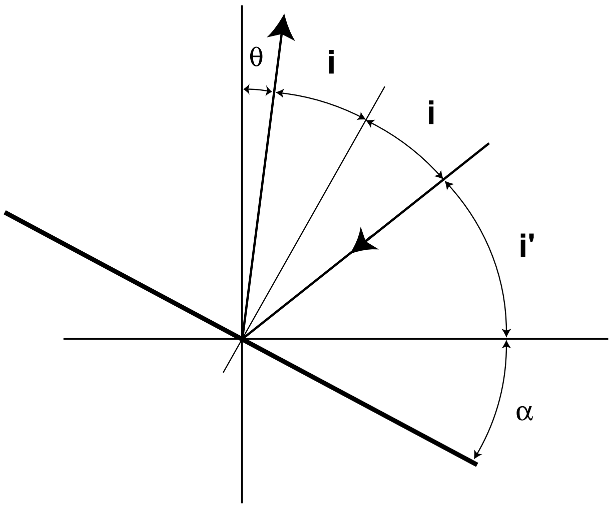

Figure 2 – Angles de rebond.

Équation de rebond. — Appelons $\alpha_g, i'_g, i_g, \theta_g$ les variables angulaires correspondant à la figure 2 de la main gauche, et respectivement $\alpha_d, i'_d, i_d, \theta_d$ pour la main droite. Les angles θ_g, θ_d sont repérés par rapport à la verticale du référentiel absolu. Les angles i'_g, i'_d sont repérés par rapport à l'horizontale du référentiel absolu.

Il est pratique de considérer α_g et α_d comme variables de positionnement angulaire des deux mains. La construction géométrique indique

$$\alpha_d = \frac{\theta_d - i'_d}{2} + \frac{\pi}{4}$$
$$\alpha_g = \frac{\theta_g - i'_g}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

De manière à ce qu'une balle lancée de la gauche atteigne la main droite (i.e. qu'elle ne tombe pas à côté), il faut que l'angle de la parabole satisfasse

$$\theta_g = \arctan(\frac{gL}{2y_g^2}).$$

La balle sera reçue suivant l'angle (équation à retard)

$$\theta_d = \theta_g \circ (id + \frac{2y_g}{g})^{-1}.$$

Le jongleur la renvoie ensuite suivant l'angle i'_d choisi pour que la balle atteigne la main gauche

$$i'_d = \arctan(\frac{gL}{2y_d^2}).$$

La balle atteint enfin la main droite avec l'incidence i'_g (équation à retard)

$$i'_g = i'_d \circ (id + \frac{2y_d}{g})^{-1}.$$

Configurations stationnaires. — Une configuration stationnaire du système est donnée par la position des deux mains, les choix des paraboles, les impulsions. Comme nous alors le voir, une telle configuration est définie par deux grandeurs $\bar{u}$ et $\bar{v}$.

Nécessairement on a

$$\begin{aligned} V_d &= V_g + U_g \\ V_d + U_d &= V_g \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} U_d &= -U_g = -\bar{u} \\ V_d &= V_g + \bar{u} = \bar{v} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} y_g &= \bar{v} - \bar{u} + \bar{u} = \bar{v} \\ y_d &= \bar{v} - \bar{u}. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} i'_g = i'_d &= \arctan \frac{gL}{2(\bar{v} - \bar{u})^2} \\ \theta_d = \theta_g &= \arctan \frac{gL}{2\bar{v}^2}. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} \alpha_d &= \frac{1}{2} \arctan \frac{gL}{2\bar{v}^2} - \frac{1}{2} \arctan \frac{gL}{2(\bar{v} - \bar{u})^2} + \frac{\pi}{4} \\ \alpha_g &= \alpha_d. \end{aligned}$$

Planification des transitions des configurations de jonglage. — On souhaite faire passer continûment le jongleur entre deux configurations. Au temps $t = 0$ notre jongleur entretient un mouvement (deux paraboles de son choix) pour ses balles. Il souhaite changer de configuration et choisit deux autres paraboles objectifs.

Nous sommes en mesure de lui expliquer comment faire cette transition, en lui disant comment modifier les angles de ses mains et les impulsions qu'il doit donner aux balles. La question est essentiellement une question de synchronisation des actions du jongleur. Ce n'est pas un problème simple car le temps de parcours d'une balle

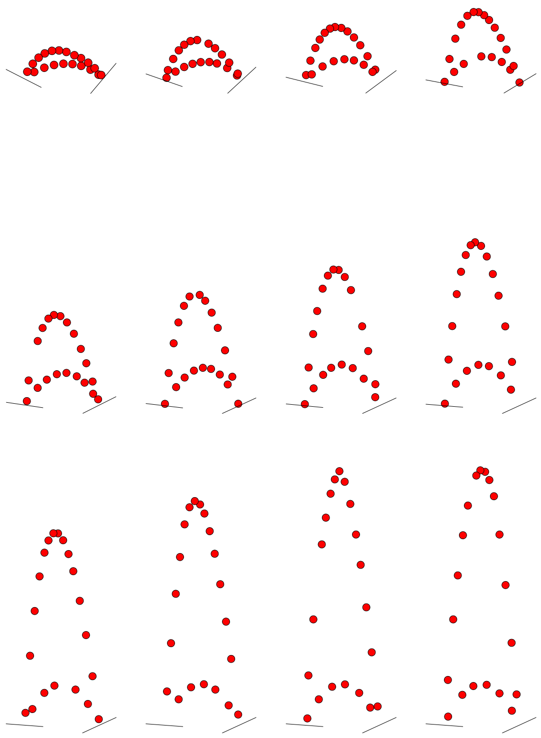

Figure 3 – Changement de configurations du jongleur. En haut à gauche : paraboles de départ. En bas à droite : paraboles d'arrivée. Noter le mouvement des mains qui s'inclinent progressivement. On voit clairement les sommets des trajectoires dévier vers la gauche et la droite : les vitesses d'émission des balles allant croissant. Finalement les sommets se recentrent lorsqu'on arrive au point stationnaire.

dépend de sa vitesse (d'où les lois de composition et les inversions de fonctions). Les équations suivantes fournissent les réponses nécessaires.

Pour passer d'une configuration définie par $(\bar{v}, \bar{u})$ à une autre définie par $(\bar{v}', \bar{u}')$ en un temps T, choisissons

$$\begin{aligned} y_g(t) &= \bar{v} + \frac{t}{T}(\bar{v}' - \bar{v}) \\ y_d(t) &= \bar{v} - \bar{u} + \frac{t}{T}(\bar{v}' - \bar{v} + \bar{u} - \bar{u}'). \end{aligned}$$

Les impulsions U_g, U_d à fournir sont alors

$$U_g = y_g - y_d \circ (id + \frac{2}{g} y_d)^{-1} \tag{100}$$

$$U_d = y_d - y_g \circ (id + \frac{2}{g} y_g)^{-1}. \tag{101}$$

Les angles des deux mains sont

$$\alpha_d = \frac{\arctan(\frac{gL}{2y_g^2}) \circ (id + \frac{2y_g}{g})^{-1} - \arctan(\frac{gL}{2y_d^2})}{2} + \frac{\pi}{4} \tag{102}$$

$$\alpha_g = \frac{\arctan(\frac{gL}{2y_g^2}) - \arctan(\frac{gL}{2y_d^2}) \circ (id + \frac{2y_d}{g})^{-1}}{2} + \frac{\pi}{4}. \tag{103}$$

En appliquant les formules $(100, 101, 102, 103)$, on obtient les simulations de la figure 3.

7.2. Équation de Burgers

Modèle. — *On considère ici l'équation de Burgers sans diffusion avec un contrôle* $u > 0$ *en* $x = 0$

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = v_t + v v_x = 0 \quad x \in [0, 1] \\ v(0, t) = u(t). \end{cases} \tag{104}$$

L'application $x \mapsto v(x, t)$ *décrit le champ de vitesse d'un gaz constitué de particules sans intéraction (mouvement inertiel) dans un tuyau monodimensionnel* $0 \leq x \leq 1$. *La vitesse des particules à l'entrée* u *est une commande.*

Équations à retard. — Nous nous intéressons à la vitesse des particules à la sortie du tuyau $y(t) = v(1, t)$ et à la relation qui la lie à u. L'équation de Burgers nous dit que l'accélération de chaque particule est nulle : sa vitesse est constante. Ainsi la particule se trouvant en $x = 1$ au temps t et qui admet $y(t)$ comme vitesse, se trouvait au temps $t - 1/y(t)$ en $x = 0$ avec la même vitesse $u(t - 1/y(t))$. D'où l'équation à retard non linéaire liant u et y

$$y(t) = u(t - 1/y(t)).$$

Qui est équivalente à

$$u(t) = y(t + 1/u(t)).$$

De manière générale, le champ de vitesse est lié à la vitesse de sortie des particules via

$$y(t) = v(t - (1-x)/y(t), x) \quad x \in [0, 1] \tag{105}$$

et à leur vitesse d'entrée via

$$u(t) = v(t + x/u(t), x) \quad x \in [0, 1].$$

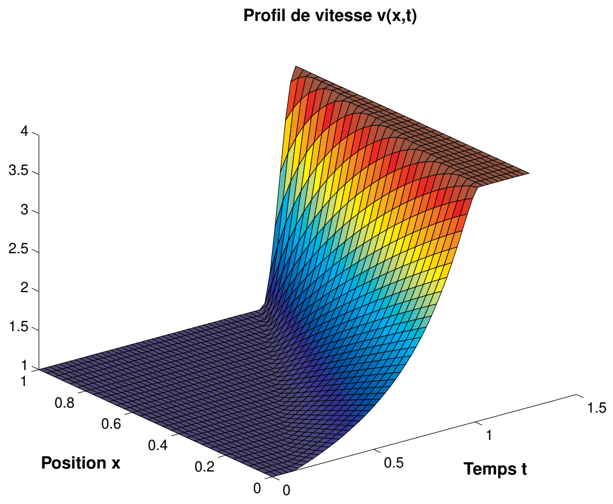

Figure 4 – Équation de Burgers. Transition entre deux profils de vitesse ($v \equiv 1$ vers $v \equiv 4$) sans onde de choc de compression.

Platitude. —

Formules de platitude. — *La formule* (105)*, donne*

$$v = y \circ (id - \frac{1-x}{y})^{-1} \tag{106}$$

où id est la fonction identité et $\circ$ *est la loi de composition par rapport à la première variable* (t)*.*

Correspondance des trajectoires sans chocs. — Formellement, il existe une relation biunivoque entre le champ de vitesse $t \mapsto v(\blacksquare, t)$, solution de (104), et $t \mapsto y(t)$. Cette correspondance a un sens pour $y > 0$ continûment dérivable et telle que $t \mapsto t - (1 - x)/y(t)$ est une fonction croissante pour chaque x, i.e. quel que soit t, $\dot{y}(t) > -y^2(t)$. Cette condition correspond aux solutions régulières de l'équation de Burgers et évite ainsi les ondes de choc.

Transition entre deux profils de vitesse. — On sait, voir par exemple [**CM90**], que la transition d'un profil de vitesse rapide à un profil lent est aisée et n'engendre pas de choc si on utilise n'importe quelle fonction décroissante comme entrée du système. En utilisant cette paramétrisation par la platitude, on peut effectuer des transitions d'un profil de vitesse lent vers un profil rapide sans engendrer de choc.

Ainsi on peut générer une commande $t \mapsto u(t)$ effectuant la transition d'un profil de vitesse lent $v(\blacksquare, 0) \equiv v_1 > 0$ vers un profil rapide $v(\blacksquare, T) \equiv v_2 > v_1$ en évitant les discontinuités dans le profil qui seraient dues à des ondes de choc [**CM90**].

On a représenté sur la figure 4 un tel profil pour $v_1 = 1$, $v_2 = 4$, $y(t) = v_1 + (v_2 - v_1)s^2(2 - 3s)$ avec $s = (t - 1.25)/0.25$ sur $t \in [1.25, 1.5]$, $y(t) \equiv v_1$ sur $t < 1.25$ et $y(t) \equiv v_2$ sur $t > 1.5$.

Généralisation. — Notons qu'une telle correspondance des trajectoires peut aussi être établie pour les équations hyperboliques du type

$$\begin{cases} v_t + \lambda(v) v_x = 0 & x \in [0, 1] \\ v(0, t) = u(t) \end{cases}$$

puisqu'on a la relation entre $y(t) = v(1, t)$ et u et v (voir par exemple [**CH62**, page 41]) :

$$y(t) = u[t - 1/\lambda(y(t))], \quad y(t) = v[t - (1 - x)/\lambda(y(t)), x]. \tag{107}$$

Formules de platitude. — *La formule* (107)*, donne*

$$v = y \circ (id - \frac{1 - x}{\lambda(y)})^{-1} \tag{108}$$

où comme précédemment id est la fonction identité et $\circ$ *est la loi de composition par rapport à la première variable.*

7.3. Conclusion

Comme au chapitre 6 les équations de platitude font intervenir les opérations de composition et d'inversion des fonctions.

Par la platitude nous avons résolu les problèmes de trajectographie : le problème de la planification des actions du jongleur entre deux configurations de jonglage et le problème de transtition entre deux profils de vitesses.

Ces exemples sont en fait assez similaires. Dans les deux cas nous suivons une "particule" (ici une balle) le long de sa trajectoire pour aboutir à des équations à retards.

L'extension de ces calculs aux équations aux dérivées partielles hyperboliques qu'on sait résoudre par la méthode des caractéristiques est assez directe. Par contre, les équations aux dérivées partielles avec plusieurs variables, comme la dynamique des gaz polytropiques compressibles (voir [**CM90**]) semblent bien plus délicates.

Dans ce qui suit nous nous intéressons à certains systèmes régis par des équations aux dérivées partielles.

CHAPITRE 8

RÉCIPIENT D'EAU ET ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT

Nous considérons un récipient contenant un liquide. On peut déplacer le récipient suivant une direction horizontale. Le liquide est gouverné par les équations de Saint-Venant. Nous montrons comment paramétrer les trajectoires de ce système une fois linéarisé. La paramétrisation fait intervenir la coordonnée horizontale d'un point particulier du système que nous précisons (la sortie plate), et une fonction périodique. Dans le cas d'un mouvement entre deux points stationnaires, cette fonction périodique est nulle et nous montrons comment résoudre le problème de planification de trajectoires. Enfin nous utilisons un algorithme de simulation numérique type Godunov, adapté aux conditions limites de notre problème, pour montrer la validité de notre approche qui est fondée sur une linéarisation. Ces travaux ont fait l'objet de la publication [**DPR99**].

Introduction

Intérêt et difficulté pratique. — Le problème traité ici est celui du déplacement sur une chaîne de fabrication de récipients ouverts remplis de liquide (voir figure 1) qu'on déplace à l'aide d'un tapis roulant entre différents ateliers [(1)] (voir figure 2). Afin de prévenir tout débordement qui pourrait survenir, il convient de prendre en compte le mouvement du liquide qui est entraîné par les parois du récipient en mouvement.

Paramétrisation approchée du mouvement. — Nous montrons que le modèle non linéaire correspondant à ce système admet, de manière approchée en raisonnant sur le modèle linéarisé, une paramétrisation explicite de ses trajectoires. Ceci nous permet de décrire complètement le mouvement du récipient et du liquide et en particulier de planifier des mouvements évitant les débordements.

[(1)] Ce travail a été inspiré par une discussion avec K.J. Åström du Department of Automatic Control of the Lund University à l'occasion d'une visite organisée par la Conférence des Grandes Écoles.

Comparaison numérique. — Nous concluons sur la pertinence de notre approche grâce à des simulations non linéaires utilisant un schéma de type Godunov.

8.1. Modèle physique non linéaire

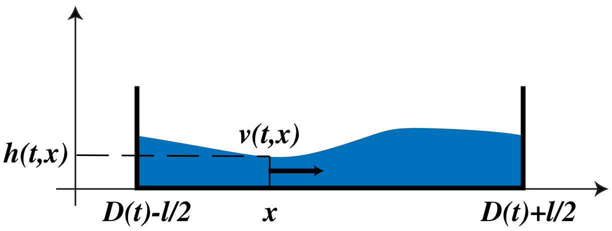

Figure 1 – Récipient de longueur l contenant un fluide parfait.

Lois de conservation et conditions limites. — En négligeant la tension superficielle et la viscosité du fluide, on obtient le système de loi de conservation suivant (voir [**LL86**] par exemple ou [**BF86**] pour une référence historique) où les conditions limites expriment que la vitesse relative du milieu par rapport à la paroi est nulle (voir [**Ger62**])

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hv) = 0\\
&\frac{\partial}{\partial t}(hv) + \frac{\partial}{\partial x}\left(hv^2 + \frac{g}{2}h^2\right) = 0\\
&h(0,x) = h_0(x)\\
&v(0,x) = v_0(x)\\
&v(t, D(t) - \frac{l}{2}) = \dot{D}(t)\\
&v(t, D(t) + \frac{l}{2}) = \dot{D}(t)
\end{aligned}
\right.
\tag{109}
$$

où $h(t,x)$ représente la hauteur du liquide et $v(t,x)$ la vitesse horizontale du fluide dans le référentiel absolu.

L'état du système est constitué des variables h, v, la commande est D la position du récipient.

Invariants de Riemann [**LL86**]. — Les équations aux dérivées partielles précédentes peuvent s'écrire

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f(U)}{\partial x} = 0$$

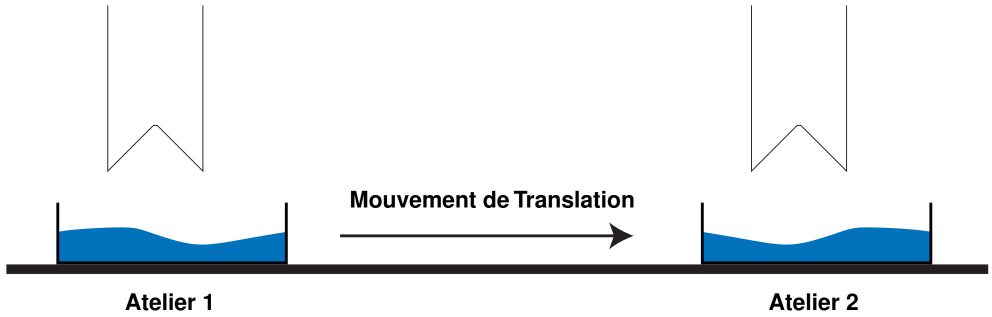

Figure 2 – Transport d'un récipient rempli d'un fluide entre différents ateliers.

où $U = \begin{pmatrix} h \\ hv \end{pmatrix}$ et $f(U) = \begin{pmatrix} hv \\ \frac{(hv)^2}{h} + \frac{g}{2}h^2 \end{pmatrix}$. Le Jacobien de f est

$$\mathcal{J}_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ gh - v^2 & 2v \end{pmatrix}.$$

Ses valeurs propres sont $\lambda_1 = v - \sqrt{gh}$, $\lambda_2 = v + \sqrt{gh}$ et ses vecteurs propres sont

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ v - \sqrt{gh} \end{pmatrix} \text{ et } r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ v + \sqrt{gh} \end{pmatrix}.$$

Soit $J_1 = v + 2\sqrt{gh}$, $J_2 = v - 2\sqrt{gh}$. On dit que J_1 est un 1-invariant de Riemann car $\nabla J_1.r_1 = 0$ et que J_2 est un 2-invariant de Riemann car $\nabla J_2.r_2 = 0$. D'où

$$\frac{\partial J_1}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial J_1}{\partial x} = 0 \ , \ \frac{\partial J_2}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial J_2}{\partial x} = 0.$$

Référentiel lié au récipient. — Utilisons maintenant le changement de coordonnées suivant

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t \\ z = x - D(t) \end{pmatrix}.$$

Posons alors

$$J_+(t,z) = J_2(t, z + D(t)) \ , \ J_-(t,z) = J_1(t, z + D(t)),$$

et

$$J_2(t,x) = J_+(t, x - D(t)) \ , \ J_1(t,x) = J_-(t, x - D(t)).$$

On obtient $\frac{\partial J_-}{\partial z} = \frac{\partial J_1}{\partial x}$, $\frac{\partial J_-}{\partial t} = \frac{\partial J_1}{\partial t} + \dot{D}\,\frac{\partial J_1}{\partial x}$. Ce qui signifie

$$\frac{\partial J_+}{\partial t} + (\lambda_1 - \dot{D})\frac{\partial J_+}{\partial z} = 0. \tag{110}$$

De la même manière

$$\frac{\partial J_-}{\partial t} + (\lambda_2 - \dot{D})\frac{\partial J_-}{\partial z} = 0. \tag{111}$$

Les conditions limites sont

$$\frac{J_+ + J_-}{2}(t, -\frac{l}{2}) = \frac{J_+ + J_-}{2}(t, \frac{l}{2}) = \dot{D}(t), \forall t \in \mathbb{R}. \tag{112}$$

8.2. Étude du modèle linéarisé

Linéarisation. — Dans ce qui suit nous linéarisons (110) et (111) afin d'utiliser la méthode des caractéristiques.

Autour de $(h, hv) = (\overline{h}, 0)$, étudions $\delta J_+ = J_+ - \overline{J_+}$ avec $\overline{J_+} = -2\sqrt{g\overline{h}}$ et $\delta J_- = J_- - \overline{J_-}$ avec $\overline{J_-} = 2\sqrt{g\overline{h}}$. Sous l'hypothèse que $\left\|\dot{D} - v\right\| << \sqrt{g\overline{h}}$, on obtient deux équations du premier ordre

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\delta J_+\right)}{\partial t} - \sqrt{g\overline{h}}\,\frac{\partial\left(\delta J_+\right)}{\partial x} = 0\\ \frac{\partial\left(\delta J_-\right)}{\partial t} + \sqrt{g\overline{h}}\,\frac{\partial\left(\delta J_-\right)}{\partial x} = 0.\end{aligned}$$

Écriture sous la forme d'un système à retard. — Posons $c = \sqrt{g\overline{h}}$, la méthode des caractéristiques donne

$$\delta J_+(t, x) = \varphi_+(t + \frac{x}{c}) \ , \ \delta J_-(t, x) = \varphi_-(t - \frac{x}{c}).$$

On peut écrire les deux conditions limites (112) sous la forme équivalente

$$\varphi_+(t - \frac{\Delta}{2}) + \varphi_-(t + \frac{\Delta}{2}) = 2\dot{D}(t) \tag{113}$$

$$\varphi_+(t + \frac{\Delta}{2}) + \varphi_-(t - \frac{\Delta}{2}) = 2\dot{D}(t) \tag{114}$$

avec $\Delta = \frac{l}{c}$.

Non-commandabilité - existence d'un élément de torsion. — Dans le cadre de la théorie des modules, on considère les équations à retards (113,114) comme un module finiment engendré sur l'anneau $\mathbb{R}[s, \delta = e^{-s\frac{\Delta}{2}}]$ (voir [**Mou95**] et [**FM98**]). Ce module possède un élément de torsion $\varphi_+ - \varphi_-$ car

$$(\delta^2 - 1)(\varphi_+ - \varphi_-) = 0. \tag{115}$$

Ceci prouve que le système n'est pas commandable (voir [**Mou95**] et [**FM98**])

Pourtant, il est possible de raccorder des trajectoires du système, pourvu que ces trajectoires, i.e. leurs éléments de torsion, soient compatibles. C'est le cas entre deux points stationnaires, c'est ce que nous allons exploiter maintenant.

8.3. Paramétrisation explicite

Restriction à certains mouvements. — Nous restreignons notre étude aux mouvements tels que $\dot{D}$ est à support compact. Il existe dans ce cas une fonction $\mathcal{V}$ telle que

$$2D(t) = \mathcal{V}(t + \frac{\Delta}{2}) + \mathcal{V}(t - \frac{\Delta}{2}). \tag{116}$$

Donc

$$\varphi_+(t+\Delta) - \varphi_+(t-\Delta) = \dot{\mathcal{V}}(t+\Delta) - \dot{\mathcal{V}}(t-\Delta).$$

On déduit d'après cette équation fonctionnelle

$$\varphi_+(t) = \dot{\mathcal{V}}(t) + \pi(t) \tag{117}$$

où π est une fonction 2Δ-périodique. De manière similaire

$$\varphi_-(t) = \dot{\mathcal{V}}(t) - \pi(t+\Delta). \tag{118}$$

Paramétrisation du système à retard. — (2) Ces deux dernières équations nous permettent de reconstruire $h(t,x)$ et $v(t,x)$. D'une part

$$v(t,x) = \frac{J_+(t, x - D(t)) + J_-(t, x - D(t))}{2}$$

---

(2)

Remarque. — On peut également interpréter la paramétrisation précédente en terme d'algèbre linéaire. Les équations (113, 114) peut s'écrire formellement

$$\begin{pmatrix} e^{-s\frac{\Delta}{2}} & e^{s\frac{\Delta}{2}} \\ e^{s\frac{\Delta}{2}} & e^{-s\frac{\Delta}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \dot{D}. \tag{119}$$

Notons M la matrice précédente. Cette matrice possède un noyau, les éléments $\bar{\pi}$ de ce noyau, caractérisés par $M\bar{\pi} = 0$ sont de la forme $\begin{pmatrix} \pi(t) \\ -\pi(t+\Delta) \end{pmatrix}$ où π est une fonction 2Δ-périodique. La solution générale du système (119) est donc, en utilisant la transposée de la comatrice de M

$$\begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi(t) \\ -\pi(t+\Delta) \end{pmatrix} + \frac{1}{e^{-s\Delta} - e^{s\Delta}} \begin{pmatrix} e^{-s\frac{\Delta}{2}} & -e^{s\frac{\Delta}{2}} \\ -e^{s\frac{\Delta}{2}} & e^{-s\frac{\Delta}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \dot{D}.$$

Posons alors $2\dot{D} = \left(e^{s\frac{\Delta}{2}} + e^{-s\frac{\Delta}{2}}\right) \dot{\mathcal{V}}$, on obtient alors

$$\begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi(t) \\ -\pi(t+\Delta) \end{pmatrix} + \frac{1}{e^{s\Delta} - e^{-s\Delta}} \begin{pmatrix} e^{s\Delta} - e^{-s\Delta} \\ e^{s\Delta} - e^{-s\Delta} \end{pmatrix} \dot{\mathcal{V}}.$$

D'où

$$\varphi_+(t) = \pi(t) + \dot{\mathcal{V}}(t)$$
$$\varphi_-(t) = -\pi(t+\Delta) + \dot{\mathcal{V}}(t)$$

ce qui redonne bien les équations (117) et (118).

$$
\begin{aligned}
v(t,x) = \frac{1}{2}\Big[&\dot{\mathcal{V}}(t+\frac{x-D(t)}{c}) + \pi(t+\frac{x-D(t)}{c})\dots \\
&+\dot{\mathcal{V}}(t-\frac{x-D(t)}{c}) - \pi(t+\Delta-\frac{x-D(t)}{c})\Big].
\end{aligned} \tag{120}
$$

D'autre part

$$
h(t,x) = \frac{1}{16g}\left[J_-(t,x-D(t)) - J_+(t,x-D(t))\right]^2
$$

$$
\begin{aligned}
h(t,x) = \Big[\sqrt{\overline{h}} + \frac{1}{\sqrt{4g}}\Big(&\dot{\mathcal{V}}(t-\frac{x-D(t)}{c}) - \pi(t+\Delta-\frac{x-D(t)}{c})\dots \\
&-\dot{\mathcal{V}}(t+\frac{x-D(t)}{c}) - \pi(t+\frac{x-D(t)}{c})\Big)\Big]^2.
\end{aligned} \tag{121}
$$

Formules de platitude. — *Les équations* $(116, 120, 121)$ *montrent que toutes les variables du système, i.e. h, v et D s'expriment au moyen de $\mathcal{V}$ et de π une fonction 2Δ-périodique. Nous allons montrer comment, dans certains cas particuliers, on se débarrasse de π.*

8.4. Planification de trajectoires entre deux points stationnaires

Trajectoire pour la sortie plate. — Définissons

$$
\mathcal{V}(t) = \begin{cases} 0 & t < \frac{\Delta}{2} \\ \sigma(t) & \frac{\Delta}{2} \leq t \leq T + \frac{\Delta}{2} \\ 1 & t > T + \frac{\Delta}{2}. \end{cases}
$$

Imposons les conditions initiales suivantes

$$
\forall x \in [-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}] \begin{cases} h(0,x) = \overline{h} \\ v(0,x) = 0. \end{cases}
$$

Nullité de l'élément de torsion. — D'après (120) et (121), les conditions initiales précédentes imposent

$$
\forall s \in [-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}] \begin{cases} \dot{\mathcal{V}}(-s) + \pi(-s) - \dot{\mathcal{V}}(s) + \pi(\Delta+s) = 0 \\ \dot{\mathcal{V}}(-s) + \pi(-s) + \dot{\mathcal{V}}(s) - \pi(\Delta+s) = 0. \end{cases}
$$

Donc

$$
\forall x \in [-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}] \begin{cases} \dot{\mathcal{V}}(s) = -\pi(s) \\ \dot{\mathcal{V}}(s) = \pi(\Delta+s). \end{cases}
$$

Par construction $\mathcal{V}(s) = 0$ pour $s < \frac{\Delta}{2}$. Donc

$$
\forall x \in [-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}] \begin{cases} \pi(s) = 0 \\ \pi(\Delta+s) = 0. \end{cases}
$$

Ce qui signifie $\pi(s) = 0$ pour $s \in [-\frac{\Delta}{2}, \frac{3\Delta}{2}]$. Or π est une fonction 2Δ-périodique, donc

$$\pi = 0.$$

Formules de platitude **(Paramétrisation du mouvement)**

Toutes les variables du système s'écrivent au moyen de $\mathcal{V}$ et de $\dot{\mathcal{V}}$. Ainsi $\mathcal{V}$ est une sortie plate. Au premier ordre on a

$$D(t) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{V}(t+\frac{\Delta}{2}) + \mathcal{V}(t-\frac{\Delta}{2})\right] \tag{122}$$

$$v(t,x) = \frac{1}{2}\left[\dot{\mathcal{V}}(t+\frac{x-D(t)}{c}) + \dot{\mathcal{V}}(t-\frac{x-D(t)}{c})\right] \tag{123}$$

$$h(t,x) = \overline{h} + \frac{\sqrt{\overline{h}}}{2\sqrt{g}}\left(\dot{\mathcal{V}}(t-\frac{x-D(t)}{c}) - \dot{\mathcal{V}}(t+\frac{x-D(t)}{c})\right). \tag{124}$$

Ces équations sont la paramétrisation des solutions du modèle linéarisé. Ce sont des approximations au premier ordre de solutions du système non linéaire .

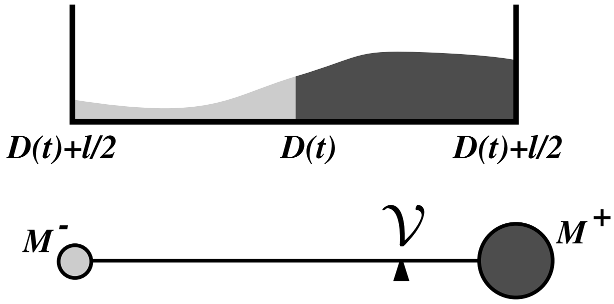

Figure 3 – Lieu géométrique de la sortie plate $\mathcal{V}$.

8.5. Signification physique de la sortie plate

Après un calcul relativement simple on obtient

$$\mathcal{V}(t) = D(t) + \frac{l}{2}\,\frac{M^+ - M^-}{M^+ + M^-} \tag{125}$$

où

$$M^+ = \int_{D(t)}^{D(t)+\frac{l}{2}} h(t,s)ds\ ,\ M^- = \int_{D(t)-\frac{l}{2}}^{D(t)} h(t,s)ds.$$

Ainsi on peut interpréter $\mathcal{V}(t)$ comme la coordonnée horizontale d'un point géométrique proche mais légèrement différent du centre de gravité du liquide. Comme on l'a représenté sur la figure 3, ce point est le centre de gravité de deux masses ponctuelles M^- et M^+, placées sur les bords du récipient en $-l/2$ et $+l/2$. En particulier $\mathcal{V}$ coïncide avec le milieu du récipient au début et à la fin du mouvement.

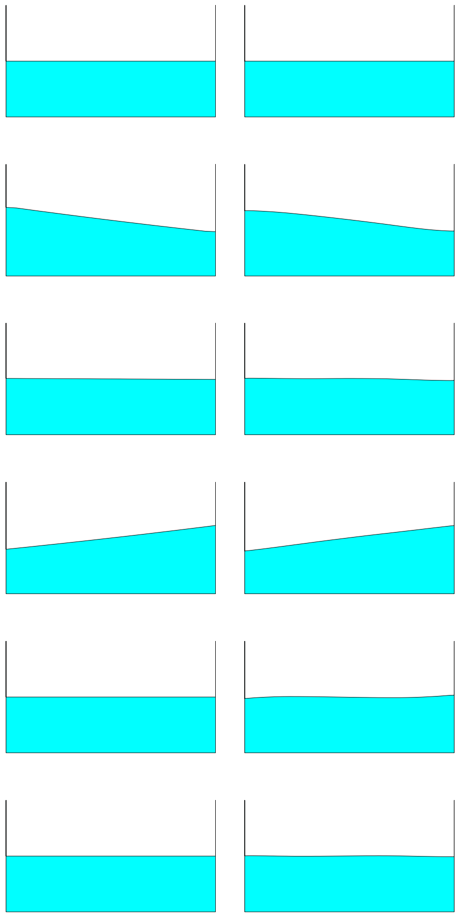

Figure 4 – Temps de transition $T = 4.0$. Instantanés aux temps $t = 0$, $t = T/4$, $t = T/2$, $t = 3T/4$, $t = T$ et $t = 5T/4$. À gauche : prédiction linéaire. À droite : simulation non linéaire .

8.6. Comparaisons entre la prédiction linéaire et la simulation non linéaire

Nous vérifions ici la pertinence de notre approche en comparant les mouvements planifiés d'après notre approximation linéaire et une simulation non linéaire à base de schéma de Godunov ou on a utilisé la commande calculée précédemment via (122, 123) et (124).

Dans ce qui suit Δ, qui est le temps nécessaire à une onde pour rejoindre une extrémité du récipient à une autre, vaut 1. On a dilaté l'échelle verticale par un facteur 3 afin de mieux voir les détails.

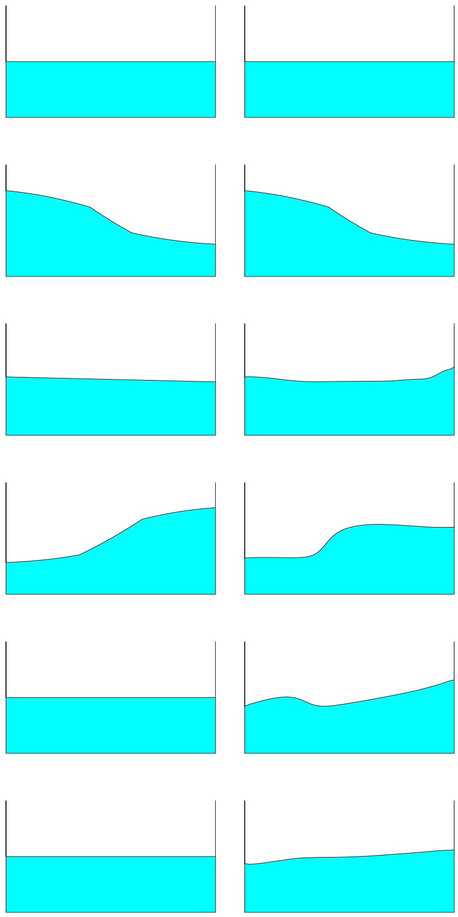

Figure 5 – Temps de transition $T = 2.5$. Instantanés aux temps $t = 0$, $t = T/4$, $t = T/2$, $t = 3T/4$, $t = T$ et $t = 5T/4$. À gauche : prédiction linéaire. À droite : simulation non linéaire .

Temps de transition $T = 4.0$. — La prédiction linéaire d'un mouvement relativement lent est très proche des résultats simulés non-linéairement, voir figure 4.

Temps de transition $T = 2.5$. — Au fur et à mesure que le temps de transfert diminue, l'approximation linéaire se révèle moins précise. On représente sur la figure 5, une comparaison pour mouvement assez rapide.

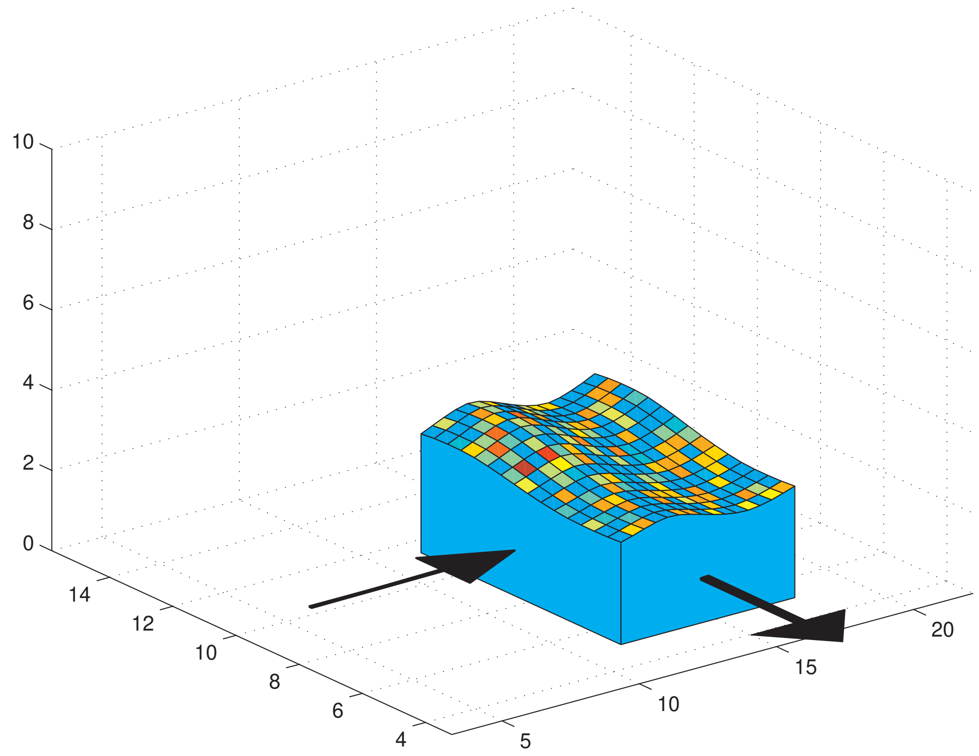

Figure 6 – Récipient rectangulaire contenant un fluide. Instantané du mouvement calculé en temps réel par platitude. (Surface colorée aléatoirement pour aider à la visualisation du relief.) Les deux flèches représentent les forces exercées sur le récipient.

8.7. Conclusion

Nous avons montré que l'approximation tangente de (109) n'était commandable autour d'aucun point stationnaire. Pourtant on peut amener le système de n'importe quelle trajectoire passant par un point stationnaire à n'importe quelle autre trajectoire passant par un autre point stationnaire (ce sont des configurations du système dont les éléments de torsion sont compatibles). La question de la commandabilité du système non linéaire reste ouverte.

Généralisation. — Ce travail peut s'étendre au cas bi-dimensionnel par superposition des mouvements et décomposition de la condition aux bords du récipient suivant les deux normales aux bords d'un récipient rectangulaire de dimension $L_x \times L_y$, voir figure 6.

Notons en effet le modèle simplifié dans le référentiel lié au récipient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = g h_0 \Delta h \\ \frac{\partial h}{\partial \vec{n}} = -\ddot{\vec{D}}.\frac{\vec{n}}{g} \text{ sur le bord} \end{array} \right. \tag{126}$$

où $\vec{n}$ est le vecteur normal défini partout où c'est possible sur le bord du récipient.

On peut construire une solution du système précédent en superposant les solutions des deux systèmes suivants (qui sont du type traité dans ce chapitre)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 h_1}{\partial t^2} = g h_0 \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial h_1}{\partial x} = -\ddot{D}_x / g \text{ en } x = 0 \\ \frac{\partial h_1}{\partial x} = \ddot{D}_x / g \text{ en } x = L_x \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 h_2}{\partial t^2} = g h_0 \frac{\partial^2 h_2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} = -\ddot{D}_y / g \text{ en } y = 0 \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} = \ddot{D}_y / g \text{ en } y = L_y. \end{array} \right.$$

En posant

$$h(t,x,y) = h_1(t,x) + h_2(t,y)$$

$$\vec{D}(t) = D_x \vec{e}_x + D_y \vec{e}_y$$

on obtient bien une solution de (126).

CHAPITRE 9

ÉQUATION DES TÉLÉGRAPHISTES

On montre ici comment compenser par un filtre les distorsions induites par la propagation d'un signal électrique le long d'une ligne coaxiale. Le filtre est calculé grâce à la platitude du système qui est gouverné par l'équation des télégraphistes. Nous donnons l'expression exacte du filtre et donnons des résultats de simulation prouvant la pertinence de la méthode. Ces travaux ont été l'objet des publications [**FMPR99b, FMPR99a**].

Introduction

Considérons la propagation d'un signal dans une ligne électrique. La reconstruction d'un signal d'entrée $u(t)$ à partir de la mesure du signal de sortie est un problème classique. Nous montrons ici que dans le cas d'une ligne gouvernée par l'équation des télégraphistes, il est possible de construire un filtre de précompensation des distorsions induites par la transmission.

Plus précisément, l'inverse de la fonction de transfert du système est un filtre non causal $\mathcal{F}$

$$u = \mathcal{F} \star y.$$

Cependant, une propriété remarquable est que $\mathcal{F}$ est à support compact : on peut le décomposer comme un opérateur d'avance, un opérateur de retard et un ensemble de retards distribués pondérés par des fonctions de Bessel.

Ce filtre de précompensation peut être considéré comme un *planificateur de trajectoire* dans le sens où il répond à la question : *que doit valoir la commande pour obtenir une sortie désirée ?*

Cet exemple montre comment la platitude peut-être utile en traitement du signal.

À la section 9.1 nous décrivons le modèle et les équations du système sur lequel nous travaillons. À la section 9.2 nous calculons en utilisant le calcul opérationnel les équations du filtre de précompensation. À la section 9.3, nous montrons à l'aide de simulations la pertinence de notre approche, en testant notamment la robustesse vis à vis des incertitudes sur les paramètres du système.

Notons que notre point de vue est différent de celui habituellement utilisé pour les équations aux dérivées partielles [**BPDM93, CZ95, Lio68**]. La technique que nous proposons est également différente des techniques classiques permettant de limiter les distorsions en utilisant des répéteurs ou en intercalant des inductances adaptées à certaines fréquences (voir par exemple la pupinisation des lignes [**Dre31**, page 80–93] pour une référence historique).

Enfin, notons qu'on pourra consulter [**Jan54**, pages 181–184] pour des calculs comparables, avec une finalité différente, au sujet de l'équation des télégraphistes pour un câble de longueur infinie.

9.1. Modèle physique

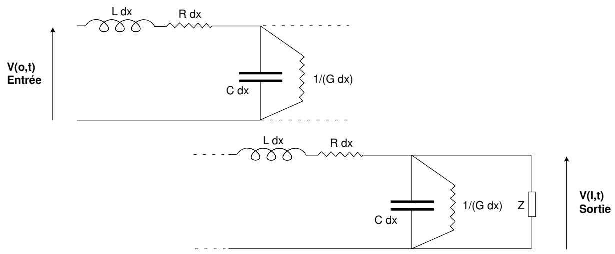

Figure 1 – Une ligne électrique.

Nous nous intéressons à la propagation d'un signal électrique dans une ligne électrique. On note ℓ la longueur de la ligne et, par unité de longueur, R la résistance, L l'inductance, C la capacité et G la perditance. Les lois de Kirschoff donnent [**Roc71**]

$$\begin{cases} L\dfrac{\partial i}{\partial t} = -Ri - \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ C\dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{\partial i}{\partial x} - Gv \end{cases}$$

pour $0 \leq x \leq \ell$, $t \geq 0$.

Modèle. — *En éliminant le courant i nous obtenons l'*équation des télégraphistes [**Oll28**]

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = (R + L\frac{\partial}{\partial t})(G + C\frac{\partial}{\partial t})v(x,t). \tag{127}$$

Les conditions limites sont

$$v(0,t) = u(t) \tag{128}$$

$$v(\ell,t) = Zi(\ell,t). \tag{129}$$

L'entrée et la sortie du système du système sont respectivement $u(t) = v(0,t)$ *et* $y(t) = v(\ell,t)$.

Remarque. — On retrouve pour $R = G = 0$ (cas de la ligne sans perte) l'équation des cordes vibrantes [**Col76**].

9.2. Calcul du filtre de précompensation

Calcul opérationnel. — En supposant les conditions initiales nulles, i.e. $v(x,0) = \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = 0$, on transforme l'équation (127) en l'équation différentielle ordinaire suivante

$$\hat{v}''(x,s) = \varpi(s)\hat{v}(x,s), \tag{130}$$

avec $\varpi(s) = (R + Ls)(G + Cs)$ et où s correspond à $\frac{d}{dt}$. Les conditions limites deviennent

$$\hat{v}(0,s) = \hat{u}(s), \quad (R + Ls)\hat{v}(\ell,s) = Z\hat{v}'(\ell,s). \tag{131}$$

$\hat{u}$ et $\hat{v}$ sont les images opérationnelles [(1)] de u et v. La solution générale de (130) est

$$\hat{v}(x,s) = A(s)\,\mathrm{ch}((\ell - x)\sqrt{\varpi(s)}) + B(s)\,\mathrm{sh}((\ell - x)\sqrt{\varpi(s)}),$$

où $A(s)$ et $B(s)$ sont indépendantes de x et sont déterminées par les conditions limites (131).

Au lieu d'écrire la relation (fonction de transfert) entre $\hat{v}$ et $\hat{u}$, nous écrivons la relation entre $\hat{v}$ et $\hat{y}(s) = \hat{v}(\ell,s)$. En utilisant les relations (131) dans la relation précédente on obtient

$$\hat{v}(x,s) = \Big(\mathrm{ch}((\ell - x)\sqrt{\varpi(s)}) + \frac{R + Ls}{Z}\frac{\mathrm{sh}((\ell - x)\sqrt{\varpi(s)})}{\sqrt{\varpi(s)}}\Big)\hat{y}(s). \tag{132}$$

Formules de platitude. — *La fonction de transfert de* $\hat{y}$ *à* $\hat{v}$ *donnée par l'équation* (132)*, n'a que des zéros et ne possède pas de pôles, i.e. c'est une fonction analytique (c'est même une fonction entière). Les trajectoires de toutes les grandeurs* $\hat{v}$ *sont définies par la donnée d'une fonction* $\hat{y}$ *: en d'autres termes* $\hat{y}$ *est une sortie plate du système.*

---

(1)Dans la présentation traditionnelle du calcul opérationnel $\hat{u}$ et $\hat{v}$ sont les transformées de Laplace de u et v, voir [**HC47**]. Il est possible de présenter différemment le calcul opérationnel en le construisant de manière algébrique à partir d'un produit de convolution voir [**Mik59, Mik83, MB87, Yos84, FMPR99a, DP78**].

En particulier, pour $x=0$, (132) *donne*

$$\hat{u}(s) = \left(\operatorname{ch}\left(\ell\sqrt{\varpi(s)}\right) + \frac{R+Ls}{Z} \frac{\operatorname{sh}\left(\ell\sqrt{\varpi(s)}\right)}{\sqrt{\varpi(s)}} \right) \hat{y}(s). \tag{133}$$

Filtre de précompensation. — Cette équation apporte une solution au problème de planification de trajectoires : si on désire que la sortie y suive une certaine trajectoire, l'entrée u correspondante est donnée par l'équation (133).

Solution dans le domaine temporel. — Nous réécrivons l'équation (133) dans le domaine temporel. Par souci de simplicité, mais sans perte de généralité, nous supposons $G=0$. Posons $\lambda = \ell\sqrt{LC}$ et $\alpha = \frac{R}{2L}$. On a alors $\varpi(s) = RCs + LCs^2$ et l'équation (133) donne

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{2}e^{-\alpha\lambda}\left(1 - \frac{1}{Z}\sqrt{\frac{L}{C}}\right) y(t-\lambda) + \frac{1}{2}e^{\alpha\lambda}\left(1 + \frac{1}{Z}\sqrt{\frac{L}{C}}\right) y(t+\lambda) \\ &+ \int_{-\lambda}^{+\lambda} \Big(\frac{R}{4Z\sqrt{LC}} e^{-\alpha\tau} J_0(i\alpha\sqrt{\tau^2-\lambda^2}) \\ &\qquad + \frac{e^{-\alpha\tau} i\alpha}{2\sqrt{\tau^2-\lambda^2}} (\lambda - \frac{1}{Z}\sqrt{\frac{L}{C}}\tau) J_1(i\alpha\sqrt{\tau^2-\lambda^2}) \Big) y(t-\tau) d\tau \end{aligned} \tag{134}$$

où J_0 et J_1 sont les fonctions de Bessel de première espèce. [2]

---

(2)

Détails calculatoires. — Pour écrire ces formules nous avons utilisé les résultats de [**DP67**, formules 2.4.180 et 2.4.183], (voir aussi [**Mik83**, pages 207–208] ou [**Yos84**, pages 136–138]), qui donnent

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}\sqrt{\varpi(s)}l &= \frac{1}{2}\left(e^{\lambda\sqrt{s^2+2\alpha s}} + e^{-\lambda\sqrt{s^2+2\alpha s}} \right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{-\alpha\lambda}e^{-\lambda s} + e^{\alpha\lambda}e^{\lambda s} - \left\{ 1_{[-\lambda,\lambda]} \frac{-\lambda}{\sqrt{t^2-\lambda^2}} e^{-\alpha t} i\alpha J_1(i\alpha\sqrt{t^2-\lambda^2}) \right\} \right) \\ \frac{R}{Z}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\varpi(s)}l}{\sqrt{\varpi(s)}} &= \frac{R}{2Z}\left(\frac{e^{\lambda\sqrt{s^2+2\alpha s}}}{\sqrt{LC}\sqrt{s^2+2\alpha s}} - \frac{e^{-\lambda\sqrt{s^2+2\alpha s}}}{\sqrt{LC}\sqrt{s^2+2\alpha s}} \right) \\ &= \frac{R}{2Z\sqrt{LC}} \left\{ 1_{[-\lambda,\lambda]} e^{-\alpha t} J_0(i\alpha\sqrt{t^2-\lambda^2}) \right\} \end{aligned}$$

où en posant

$$f(t) = 1_{[-\lambda,\lambda]} e^{-\alpha t} J_0(i\alpha\sqrt{t^2-\lambda^2})$$

$$\begin{aligned} \frac{Ls}{Z}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\varpi(s)}l}{\sqrt{\varpi(s)}} &= \frac{L}{2Z\sqrt{LC}} s\{f\} = \frac{L}{2Z\sqrt{LC}}\left\{\dot{f}\right\} \\ &= \frac{L}{2Z\sqrt{LC}} \{ e^{\alpha\lambda}\delta_{-\lambda} - e^{-\alpha\lambda}\delta_{\lambda} - \alpha f(t) - 1_{[-\lambda,\lambda]} e^{-\alpha t} \frac{i\alpha t}{\sqrt{t^2-\lambda^2}} J_1(i\alpha\sqrt{t^2-\lambda^2}) \} \end{aligned}$$

avec la notation classique : $\{f\}$ désigne la transformée opérationnelle de f.

Non-causalité du filtre - support compact. — Notons que la formule (134) est bien l'équation d'un filtre non causal $\mathcal{F}$ à support compact : $u(t)$ s'exprime au moyen des valeurs de y sur l'intervalle fini $[t-\lambda, t+\lambda]$).

On peut également prouver directement que $\mathcal{F}$ est à support compact par le théorème de Paley-Wiener (voir [**Rud74**, page 375] et l'Annexe H). Enfin notons que $\mathcal{F}^{-1}$ en revanche n'est pas à support compact.(3)

---

(3)Dans ce qui suit nous montrons comment utiliser le théorème de Paley-Wiener, sur une partie de la fonction de transfert seulement par souci de simplicité, plus précisément sur ch $\left(\ell\sqrt{\varpi(s)}\right)$.

Vérification des hypothèses du théorème de Paley-Wiener. —
La fonction $s \mapsto \operatorname{ch}(\ell\sqrt{LCs^2+RC})$ est de type exponentiel. Cette fonction est majorée par $K \exp \ell\sqrt{LC}s = K\exp\lambda s$, où K est une constante bien choisie. Par le théorème de Paley-Wiener, si $s \mapsto \operatorname{ch}(l\sqrt{LCs^2+RC})$ possède un inverse opérationnel, alors cet inverse est à support compact inclus dans $[-\lambda, \lambda]$.
Afin de conclure à l'existence d'un inverse opérationnel, il nous faut vérifier que $\mathbb{C} \ni s \mapsto \operatorname{ch}\sqrt{s^2+bs} - \operatorname{ch}(\frac{b}{2}+s)$ appartient à L^2.

$$2\operatorname{ch}\sqrt{s^2+bs} - 2\operatorname{ch}(\frac{b}{2}+s) = \exp(\sqrt{s^2+bs}) - \exp(\frac{b}{2}+s) + \exp(-\sqrt{s^2+bs}) - \exp(-(\frac{b}{2}+s))$$

Cherchons une estimation asymptotique de la première des deux différences lorsque $\rho = s/\imath \to \infty$.
Considérons $\exp(\sqrt{-\rho^2+\imath b\rho})$ et posons $\cos\varphi = \frac{-\rho^2}{\sqrt{\rho^4+b^2\rho^2}}$.
Lorsque $\rho \to \infty$ on a

$$\cos\varphi \approx -1 + \frac{b^2}{\rho^2}, \quad \cos(\varphi/2) = \frac{b}{2\rho}, \quad \sin(\varphi/2) = 1 - \frac{b^2}{8\rho^2}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\exp(\sqrt{-\rho^2+\imath b\rho}) &\approx \exp\left((\rho^4+b^2\rho^2)^{1/4}(\frac{b}{2\rho} + \imath(1-\frac{b^2}{8\rho^2})\right)\\ &\approx \exp\left((1+\frac{b^2}{4\rho^2})(\frac{b}{2}+\imath(\rho - \frac{b^2}{8\rho})\right)\\ &\approx \exp(\frac{b}{2}+\imath\rho)\exp\left(\frac{b^3}{8\rho^2}+\imath\frac{b^2}{8\rho}\right).\end{aligned}$$

On obtient alors

$$\left|\exp(\sqrt{-\rho^2+\imath b\rho}) - \exp(\frac{b}{2}+\imath\rho)\right| \approx \frac{b^2}{8\rho}\exp(\frac{b}{2}). \tag{135}$$

Un calcul semblable donne

$$\left|\exp(-\sqrt{-\rho^2+\imath b\rho}) - \exp(-(\frac{b}{2}+\imath\rho))\right| \approx \frac{b^2}{8\rho}\exp(\frac{-b}{2}). \tag{136}$$

Finalement

$$\left|\operatorname{ch}\sqrt{-\rho^2+\imath b\rho} - \operatorname{ch}(\frac{b}{2}+\imath\rho)\right| \leq f(\rho), \text{ avec } f(\rho) \approx \operatorname{ch}(\frac{b}{2})\frac{b^2}{8\rho}. \tag{137}$$

Ceci prouve que $\mathbb{C} \ni s \mapsto \operatorname{ch}\sqrt{s^2+bs} - \operatorname{ch}(\frac{b}{2}+s)$ appartient à L^2. Cette fonction est de type exponentiel en s, on peut donc utiliser le théorème de Paley-Wiener et conclure à l'existence d'un inverse opérationnel à support compact.

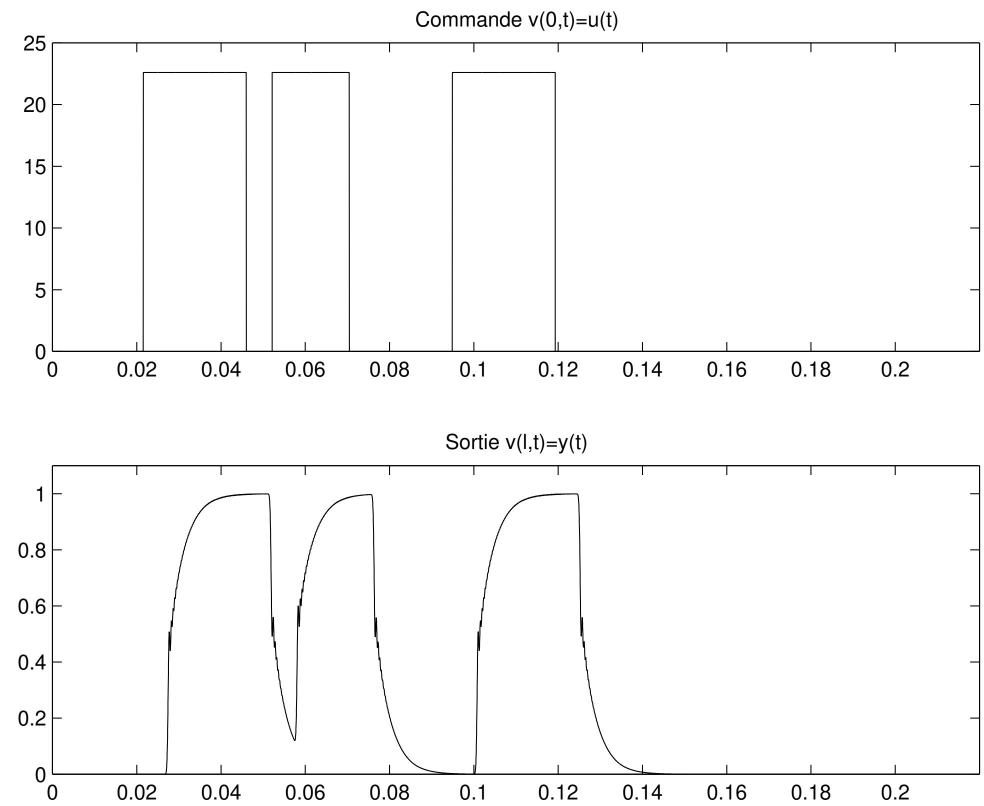

Figure 2 – Sans précompensation. Fréquence 50 Hz. Les créneaux d'entrée sont déformés en sortie.

9.3. Simulations

Dans les simulations présentées ici nous avons choisi $R = 2.16e - 3$, $L = 18.42e - 7$, $C = 1.8e - 11$, $Z = 100$, $l = 1e6$ (unités S.I.). Nous avons utilisé un modèle discret comportant $N = 80$ cellules RLCG (voir la figure 9.1) pour simuler l'équation aux dérivées partielles. Les signaux d'entrée sont des créneaux de fréquences 50 Hz et 300 Hz.

On a compensé l'atténuation naturelle de la ligne $(1 + \frac{Rl}{Z})$ par un simple gain statique en entrée.

Pour chaque fréquence :

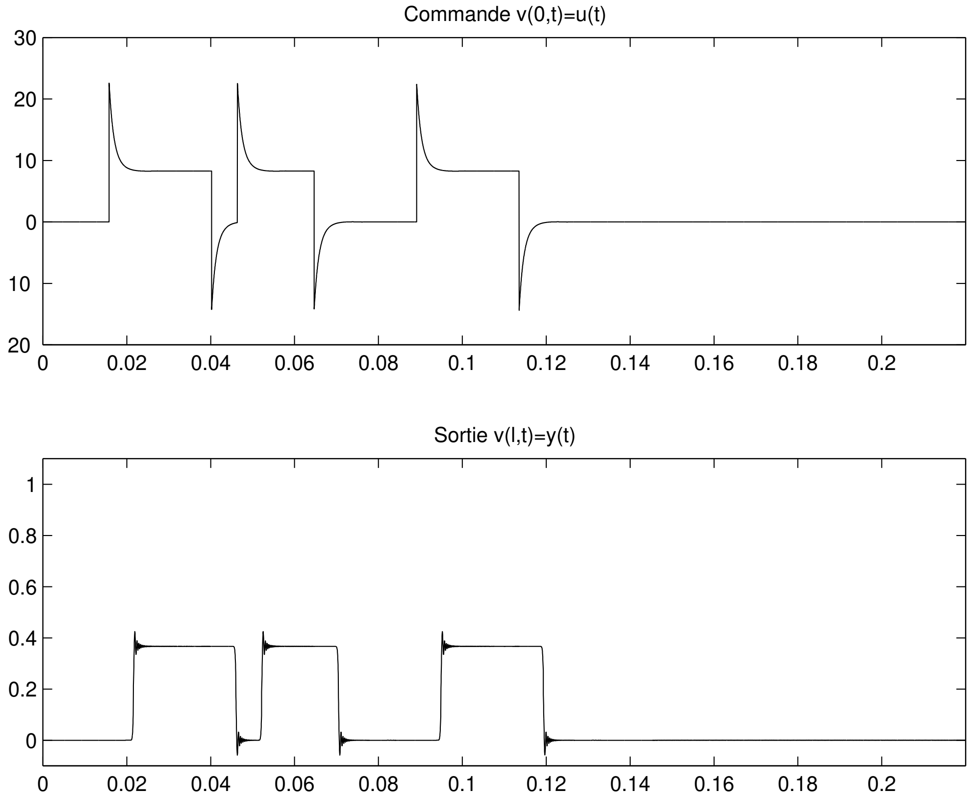

Figure 3 – Avec précompensation. Fréquence 50 Hz. On obtient les créneaux désirés en sortie (aux bruits numériques de simulation près).

1. on commence par utiliser comme signal d'entrée de simples créneaux sans précompensation autre que celle de l'atténuation naturelle de la ligne $(1+\frac{Rl}{Z})$ par un simple gain statique en entrée
2. puis on précompense les distorsions de la ligne par la formule (134).

On montre qu'ainsi on obtient, aux approximations dûes au schéma numérique près, les créneaux désirés à l'autre extrémité de la ligne (sortie).

Fréquence 50 Hz. — Sans précompensation le signal transmis est relativement altéré par la ligne, voir figure 2. En utilisant notre technique de précompensation le signal transmis n'est plus altéré, il est en revanche d'amplitude plus faible, voir figure 3. En effet on a utilisé des signaux de même amplitude sur les figures 2 et 3. La technique

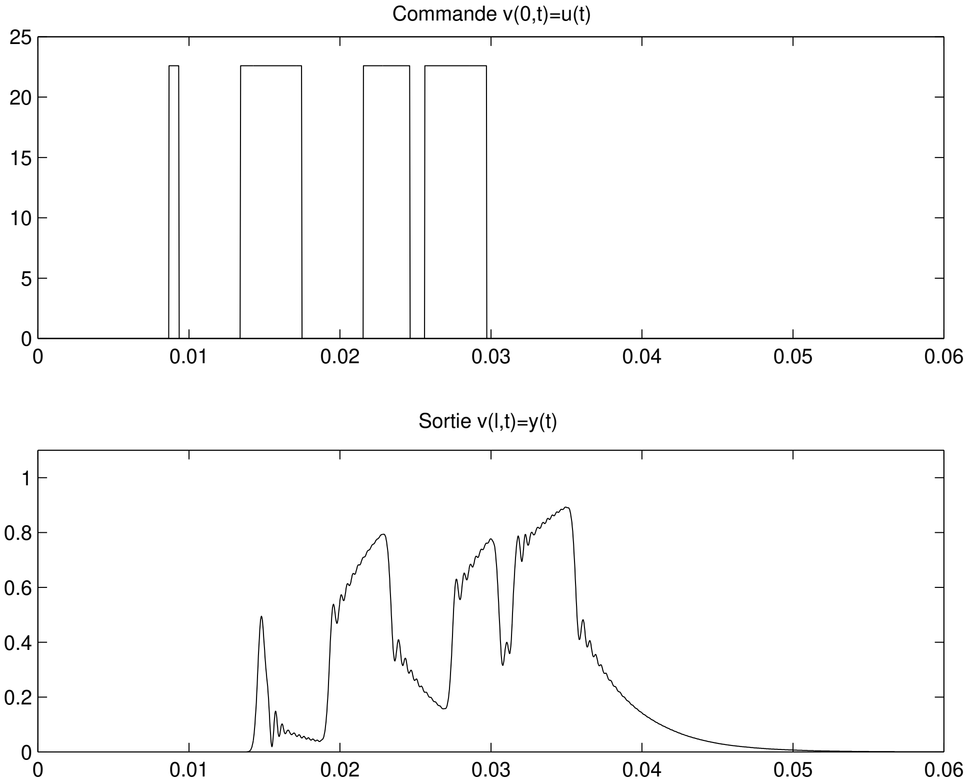

Figure 4 – Sans précompensation. Fréquence 300 Hz. À ces fréquences, la ligne déforme beaucoup les signaux.

de précompensation utilise des signaux avec une plus grande "excursion", il en résulte des signaux de sortie d'amplitude plus faible.

Fréquence 300 Hz. — Sans précompensation le signal transmis est très altéré et à peine reconnaissable, voir figure 4. En utilisant notre technique de précompensation le signal est correctement transmis, voir figure 5.

Robustesse. — En pratique R est bien connu car facile à mesurer. Nous testons ici la robustesse de notre technique de précompensation vis à vis d'erreur numérique sur L et C, voir figures 6 et 7).

Conclusion expérimentale. — La méthode de précompensation donne, à même amplitude d'entrée, des signaux en sortie plus atténués mais dont les formes peuvent être complètement choisies.

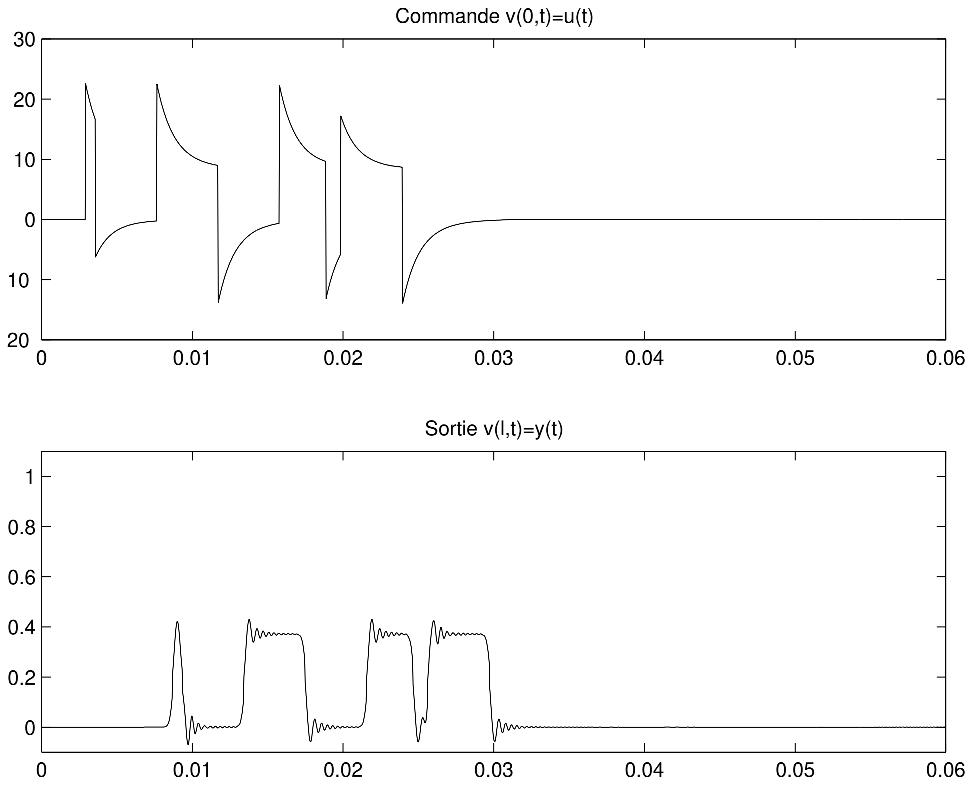

Figure 5 – Avec précompensation. Fréquence 300 Hz. On obtient encore les créneaux désirés (aux bruits numériques de simulation près).

9.4. Conclusion

La technique proposée ici permet d'augmenter la bande-passante d'une ligne coaxiale. La précompensation des distorsions engendrées par la ligne s'effectue en utilisant la platitude du système. Le filtre ainsi calculé est à support compact ce qui le rend facile à réaliser en pratique.

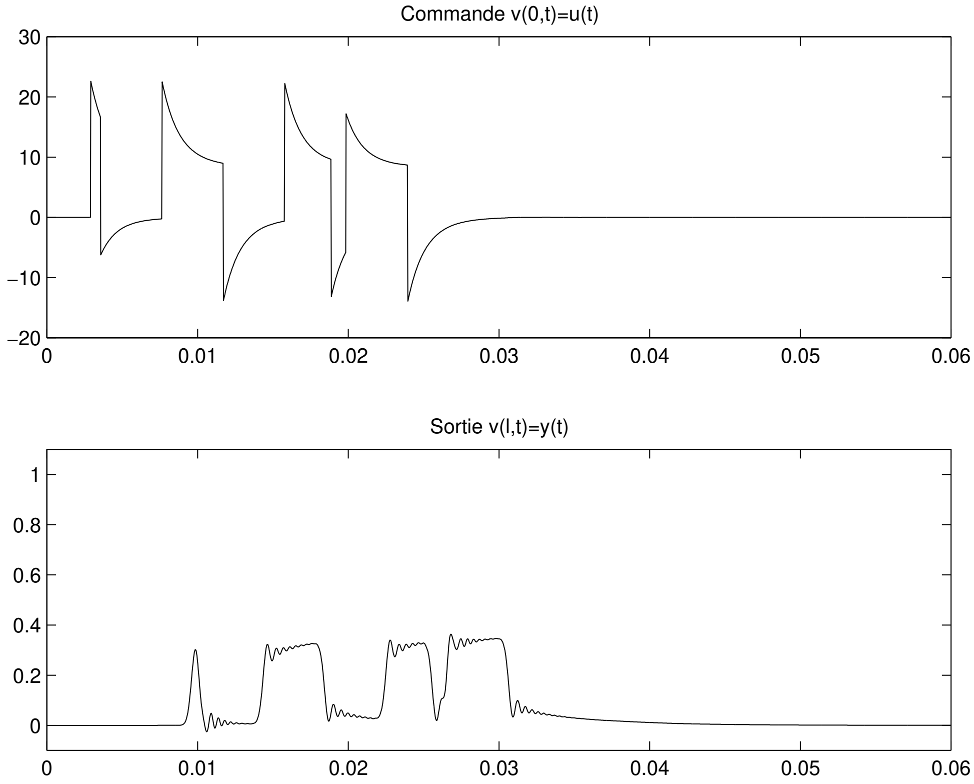

Figure 6 – Fréquence 300 Hz. Précompensation avec sous-estimation de 30% de C. Les créneaux sont encore très reconnaissables.

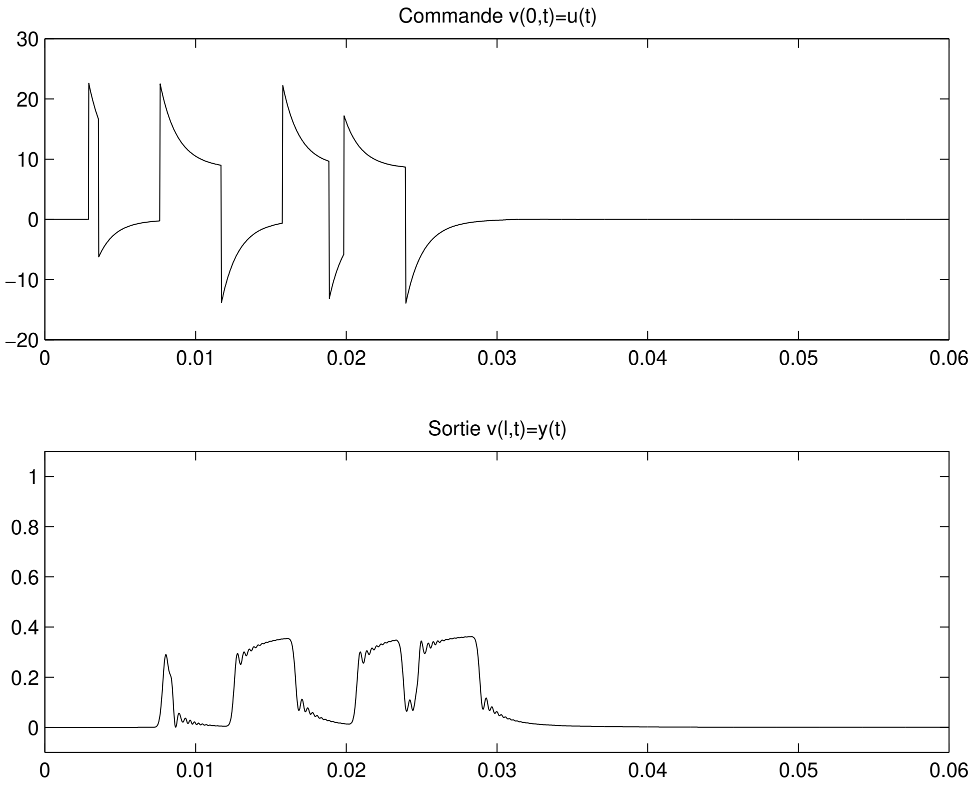

Figure 7 – Fréquence 300 Hz. Précompensation avec sur-estimation de 30% de L. Les créneaux sont encore très reconnaissables.

CHAPITRE 10

ÉQUATION DES CÂBLES PESANTS

Nous nous intéressons ici à un système constitué d'un long câble pesant en position verticale, attaché à un porteur, et transportant une charge. Ce système est une extension des systèmes bien connus de pont roulant. Nous montrons la platitude de ce système régi par des équations aux dérivées partielles (équation des ondes à vitesse variable). Nous utilisons pour cela une transformation de Liouville et concluons à la platitude du système par le théorème de Paley-Wiener. Ces travaux sont l'objet des publications [**PRed, PR00**].

Introduction

Il a été montré dans [**Mur96**] que les systèmes de câbles pesants, considérés comme une association de petits pendules élémentaires, étaient plats : leurs trajectoires peuvent être explicitement paramétrisées par les trajectoires de l'extrémité libre du câble.

Par cette écriture type équation différentielle ordinaire, les relations de platitude auxquelles on aboutit font intervenir de très nombreuses dérivées (le double du nombre de pendules considérés comme approximation). À la limite, le nombre de dérivées à considérer tend vers l'infini et on aboutit à des expressions en séries divergentes, qu'on ne sait pas vraiment utiliser à des fins de planification de trajectoires.

Nous proposons ici de travailler directement sur l'équation aux dérivées partielles. Sous l'hypothèse de petits angles, la dynamique du système est une équation différentielle ordinaire du second ordre (dynamique de la charge transportée $y(t)$ par le câble) couplée avec une équation aux dérivées partielles monodimensionelle (dynamique du câble $X(x,t)$) qui est une équation des ondes avec vitesse variable dépendant de x la variable d'espace[(1)].

[(1)]Nos calculs sont inspirés par les travaux historiques de D. Bernoulli, où apparaissent pour la première fois la fonction de Bessel d'ordre zéro, voir [**Ang57**, page 394] ou [**Wat58**, pages 3–4]

En travaillant directement avec cette description de dimension infinie, nous montrons comment obtenir une paramétrisation explicite des trajectoires faisant intervenir, au lieu d'un nombre infini de dérivées, des opérateurs avance et retard, ponctuels et distribués. Cette paramétrisation permet de résoudre la question de la planification et le raccord de trajectoires.

Plus précisément, pour le système constitué d'un câble pesant porté par un chariot représenté à la figure 1 (voir section 10.1 pour les détails), l'équation

$$\frac{\partial}{\partial x}(gx\frac{\partial X}{\partial x}) - \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = 0$$

admet la paramétrisation explicite suivante

$$X(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(t + 2\sqrt{x/g}\sin\theta)\ d\theta$$

où $t \mapsto y(t)$ est une fonction suffisamment régulière : $X(0,t) = y(t)$ correspond à la position de l'extrémité libre du câble ; la commande $u(t) = X(L,t)$ est la positon du chariot.

La commandabilité de ces systèmes hybrides pourrait être analysée en utilisant la méthode HUM (Hilbert's uniqueness method) [**Lio88a, Lio88b**] comme dans [**HZ95**] où les auteurs s'intéressent à la commandabilité et la stabilisation des cordes vibrantes. Ici nous montrons comme dans [**MRFR98**] et comme nous l'avons prouvé au chapitre 9, qu'une approche utilisant les *retards répartis* apporte une réponse intéressante à la question de la commandabilité. La méthode proposée est donc de type boucle ouverte. Elle pourrait être complétée pour la stabilisation par une méthode de type énergie comme dans [**Bou92**].

Nous prouvons ici que, pour toute distribution de masse le long du câble et pour toute masse attachée au câble (charge) en $x = 0$, il existe une correspondance biunivoque entre les trajectoires de la charge $t \mapsto y(t) = X(0,t)$ et les trajectoires de tout le système i.e. le câble et le chariot : $t \mapsto X(x,t)$ et $t \mapsto u(t) = X(L,t)$. Cette correspondance donne une paramétrisation explicite de toutes les trajectoires du système : $X(x,\cdot) = \mathcal{A}_x y$ où $\{\mathcal{A}_x\}$ est un ensemble d'opérateurs comprenant la dérivation par rapport au temps et des opérateurs avance et retard. En d'autres termes, $(x,t) \mapsto (\mathcal{A}_x y)_t$ vérifie les équations du système pour tout choix d'une fonction régulière $t \mapsto y(t)$. Pour chaque x, l'opérateur $\mathcal{A}_x$ est à support compact.

Cette paramétrisation provient de calculs symboliques. En remplaçant la dérivation par rapport au temps par la variable de Laplace s, on obtient une équation différentielle ordinaire du second ordre en x où s est un paramètre. Sa solution générale A_x est, pour chaque x, une fonction entière de s de type exponentiel. En outre pour chaque x, nous montrons que, grâce à une transformation de Liouville, $s \mapsto A_x$ vérifie, modulo des opérateurs avance et retard ponctuels, les hypothèses du théorème de Paley-Wiener.

Nous traitons en détails les trois cas suivants

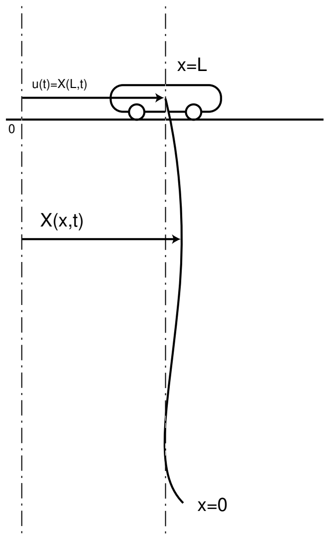

Figure 1 – Câble homogène sans charge.

1. À la section 10.1 nous considérons le cas d'un câble homogène ne portant pas de charge. C'est le cas le plus simple, il nous permet de souligner l'intérêt de notre approche.
2. À la section 10.2 nous nous intéressons au cas d'un câble inhomogène ne portant pas de masse. Nous traitons en détails le problème de la singularité de l'équation différentielle ordinaire du second ordre en $x = 0$. Nous démontrons un résultat général (théorème 10.1).
3. À la section 10.3 nous résolvons le cas général d'un câble inhomogène portant une masse ponctuelle. L'équation différentielle ordinaire du second ordre n'est plus singulière. Nous démontrons un résultat général (théorème 10.2).

10.1. Câble homogène sans charge

Les calculs sont simples, explicites et résument l'objectif de notre démarche.

Modèle. — *On considère un chariot portant un câble homogène en position verticale stable, voir la figure 1, gouverné par l'équation suivante sous l'hypothèse des petits angles*

$$\left\{\begin{array}{c} \dfrac{\partial}{\partial x}(gx\dfrac{\partial X}{\partial x}) - \dfrac{\partial^2 X}{\partial t^2} = 0 \\ X(L,t) = u(t). \end{array}\right. \tag{138}$$

où $X(x,t) - u(t)$ est le profil de déviation, g est la gravité. La commande u est la position du chariot.

Par le changement de variable classique $y = 2\sqrt{\frac{x}{g}}$, on obtient

$$y\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}(y,t) + \frac{\partial X}{\partial y}(y,t) - y\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}(y,t) = 0.$$

En utilisant la transformée de Laplace de X par rapport à la variable t (qu'on note $\hat{X}$ en supposant les conditions initiales nulles i.e. $X(.,0) = 0$ et $\frac{\partial X}{\partial t}(.,0) = 0$) on obtient

$$y\frac{\partial^2 \hat{X}}{\partial y^2}(y,s) + \frac{\partial \hat{X}}{\partial y}(y,s) - ys^2\hat{X}(y,s) = 0.$$

Utilisons ensuite le changement de variables $z = \imath sy$, nous obtenons alors

$$z\frac{\partial^2 \hat{X}}{\partial z^2}(z,s) + \frac{\partial \hat{X}}{\partial z}(z,s) + z\hat{X}(z,s) = 0. \tag{139}$$

C'est une équation de Bessel. Sa solution s'écrit au moyen de J_0 et Y_0. En utilisant le changement de coordonnées inverse $z = 2\imath s\sqrt{\frac{x}{g}}$, on obtient

$$\hat{X}(x,s) = A\ J_0(2\imath s\sqrt{x/g}) + B\ Y_0(2\imath s\sqrt{x/g}).$$

Nous recherchons une solution bornée en $x = 0$, ceci impose $B = 0$. Donc

$$\hat{X}(x,s) = J_0(2\imath s\sqrt{x/g})\hat{X}(0,s). \tag{140}$$

où on reconnaît la fonction de Clifford $\mathcal{C}_0$ (voir [**AS65**, page 358]). En utilisant la représentation intégrale de Poisson de J_0 [**AS65**, formule 9.1.18]

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp(\imath z\sin\theta)\ d\theta,$$

on obtient

$$J_0(2\imath s\sqrt{x/g}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp(2s\sqrt{x/g}\sin\theta)\ d\theta.$$

Dans le formalisme de Laplace, cette expression est une combinaison d'opérateurs retard. L'équation (140),une fois dans le domaine temporel nous donne

$$X(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(t + 2\sqrt{x/g}\sin\theta)\ d\theta \tag{141}$$

avec $y(t) = X(0,t)$.

Formules de platitude. — *La relation (141) signifie qu'il existe une relation biunivoque entre les trajectoires (régulières) de (138) et les fonctions (régulières) $t \mapsto y(t)$. Posons $y(t) = X(0,t)$ pour chaque solution de (138). Pour chaque fonction $t \mapsto y(t)$, définissons X via (141) et u via*

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(t + 2\sqrt{L/g}\sin\theta)\ d\theta \tag{142}$$

qui sont alors solutions de (138).

Il devient alors très simple de trouver une fonction $t \mapsto u(t)$ permettant de planifier une trajectoire entre un état stationnaire $X = 0$ et un autre $X = D$. Il suffit en effet de choisir une fonction $t \mapsto y(t)$ égale à 0 pour $t \leq 0$ et égale à D pour t suffisamment grand (au moins pour $t > 4\sqrt{L/g}$) et enfin de calculer u via (142).

On a représenté sur la figure 2 une telle transition calculée en utilisant (141) où on a choisi

$$y(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t < 0 \\ \frac{3L}{2}\left(\frac{t}{T}\right)^2\left(3 - 2\left(\frac{t}{T}\right)\right) \text{ pour } 0 \leq t \leq T \\ \frac{3L}{2} \text{ pour } t > T \end{cases}$$

avec T valant 2Δ avec $\Delta = 2\sqrt{L/g}$, qui est le temps de parcours d'une onde entre les points $x = L$ et $x = 0$. Pour $t \leq 0$ le câble est en position verticale à l'abscisse 0. Pour $t \geq T$ le câble est en position verticale à l'abscisse $D = 3L/2$.

On a représenté sur la figure 3 la commande $[0, T] \ni t \mapsto u(t)$ requise pour ce mouvement. Noter que le support de $\dot{u}$ est $[-\Delta, T + \Delta]$ alors que le support de $\dot{y}$ est $[0, T]$.

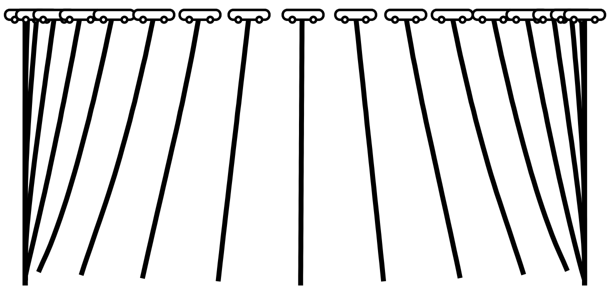

Figure 2 – Transition en temps fini T entre les abscisses 0 et $3L/2$. Positions successives du système.

10.2. Câble inhomogène (i.e. à section variable) sans charge

Modèle. — *Le système constitué d'un câble inhomogène ne portant pas de masse, voir figure 4, admet une écriture au moyen d'une équation aux dérivées partielles comportant une singularité en $x = 0$.*

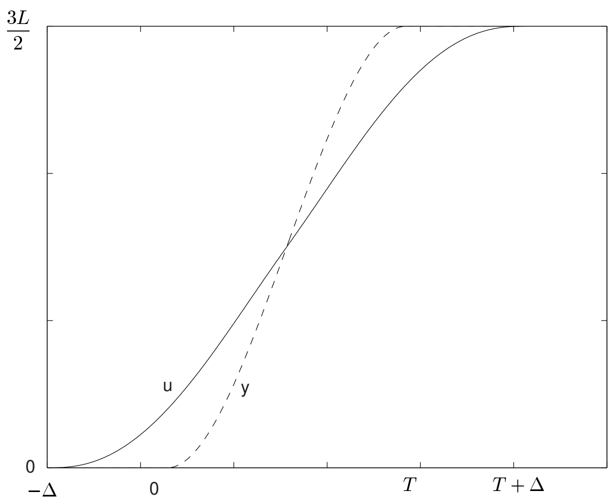

Figure 3 – Commande u réalisant la transition précédente et trajectoire de la sortie plate y.

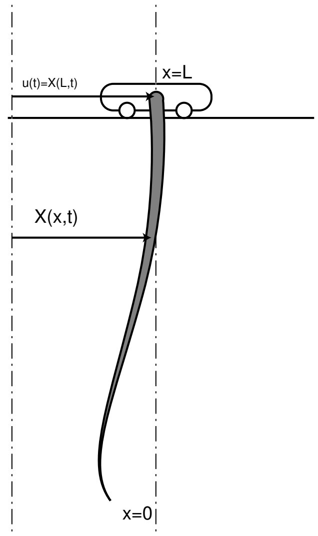

Figure 4 – Câble inhomogène sans charge.

Le système est gouverné par les équations

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\tau(x)\dfrac{\partial X}{\partial x}\right) - \dfrac{\tau'(x)}{g}\dfrac{\partial^2 X}{\partial t^2} = 0 \\
\quad X(L,t) = u(t)
\end{array}
\right.
\tag{143}
$$

où u est la commande. La tension du câble est $\tau(x)$ et vérifie en outre $\tau(0) = 0$ et $\tau(x) = gx + \mathcal{O}(x^2)$. On note $\tau'(x)/g > 0$ la distribution de masse le long du câble. On supposera que $\tau(x) \geq ax \geq 0$.

Théorème 10.1. — *Considérons* (143) *où $[O, L] \ni x \mapsto \tau(x)$ est une fonction régulière vérifiant $\tau(0) = 0$, $\tau(x) = gx + \mathcal{O}(x^2)$ et $\tau' \geq a > 0$. Il existe une relation biunivoque entre les solutions $[0, L] \times \mathbb{R} \ni (x,t) \mapsto (X(x,t), u(t))$ qui sont C^3 par rapport à la variable t et les fonctions C^3 $\mathbb{R} \ni t \mapsto y(t)$ via les formules suivantes*

(144)

$$\begin{aligned}
X(x,t) =& \frac{L^{1/4}\sqrt{g}}{2\pi^{3/2}(\tau(x)\tau'(x))^{1/4}}\sqrt{G(2\sqrt{\tau(x)/g})}\ \int_{-\pi}^{\pi} y\left(t + KG(2\sqrt{\tau(x)/g})\sin\theta\right)d\theta \\
&+ \frac{1}{(\tau(x)\tau'(x)/g)^{1/4}}\int_{-2\sqrt{\frac{\tau(x)}{ag}}}^{2\sqrt{\frac{\tau(x)}{ag}}} \mathcal{K}(G(2\sqrt{\tau(x)/g}), \xi)\ \dot{y}\,(t+\xi)\ \ d\xi \\
u(t) =& X(L,t)
\end{aligned}$$

avec

$$y(t) = X(0,t)$$

où la constante K et les fonctions G et $\mathcal{K}$ sont définies par la donnée de la fonction τ via les formules (157, 171).

La preuve de ce théorème est organisée comme suit

1. On simplifie les équations par un changement de coordonnées. On passe alors de X à Y.
2. On utilise le calcul symbolique pour remplacer la dérivée par rapport au temps par la variable de Laplace s.
3. On factorise la solution $Y(x,s)$ sous la forme $Y(x,s) = Y(0,s)A(x,s)$. On calcule l'équation aux dérivées partielles satisfaite par $A(x,s)$.
4. On effectue sur cette équation une transformation de Liouville.
5. On compare dans ces nouvelles coordonnées l'équation précédente à une équation plus simple, déjà étudiée à la section 10.1 qui est l'équation correspondant à un câble homogène. On note $D(x,s)$ la différence entre les solutions de ces deux équations.
6. On prouve que $D(x,s)$ est une fonction entière de la variable s de type exponentiel.
7. On montre, par une étude minutieuse de l'équation de Volterra vérifiée par $D(x,s)$ que, pour chaque x la restriction à l'axe imaginaire de la fonction $D(x,s)/s$ appartient à L^2.

8. On en déduit, grâce au théorème de Paley-Wiener que, pour chaque x, $D(x,s)/s$ peut être représentée comme une somme compacte (discrète et distribuée) d'exponentielles en s.
9. En rassemblant tous les termes de $A(x,s)$ nous obtenons une expression faisant intervenir la fonction de Bessel de première espèce J_0 (qui est la solution pour un câble homogène) et des exponentielles en s multipliées par s. Ceci donne les formules (144).

Démonstration. —

Changement de coordonnées. — Posons[(2)] $Y(x,t) = X\left(\tau(x)/g, t\right)$. L'équation (143) donne

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau_1(x)\frac{\partial Y}{\partial x}\right) - \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 0 \tag{148}$$

où $\tau_1(x) = x\tau'(\tau^{-1}(gx))$.

[(2)] On notera en effet le résultat suivant : si Y satisfait l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x\tau' \circ \tau^{-1}(gx)\frac{\partial Y}{\partial x}\right) - \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 0 \tag{145}$$

alors $X(x,t) = Y(\tau(x)/g, t)$ satisfait

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau(x)\frac{\partial X}{\partial x}\right) - \frac{\tau'(x)}{g}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = 0. \tag{146}$$

Notons $\circ$ l'opérateur composition par rapport à la première variable. Ainsi $X = Y \circ (\tau/g)$. Donc

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau\frac{\partial X}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\tau\tau'/g\frac{\partial Y}{\partial x} \circ (\tau/g)\right). \tag{147}$$

Or d'autre part en factorisant l'équation (145) on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\tau/g\tau'\frac{\partial Y}{\partial x} \circ (\tau/g)\right) \circ \tau^{-1}(gx)\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\tau^{-1}(gx)\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau\tau'/g\frac{\partial Y}{\partial x} \circ (\tau/g)\right) \circ \tau^{-1}(gx).\end{aligned}$$

Donc en utilisant (147)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau^{-1}(gx)\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau\frac{\partial X}{\partial x}\right) \circ \tau^{-1}(gx) = \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}.$$

Or

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau^{-1}(gx)\right) = \frac{g}{\tau' \circ \tau^{-1}(gx)}$$

d'où

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau\frac{\partial X}{\partial x}\right) \circ \tau^{-1}(gx) = \frac{1}{g}\tau' \circ \tau^{-1}(gx)\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}$$

en d'autres termes

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau\frac{\partial X}{\partial x}\right) = \frac{\tau'}{g}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \circ (\tau/g) = \frac{\tau'}{g}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}$$

ce qui donne la conclusion.

Calcul symbolique. — En remplaçant la dérivée par rapport au temps par la variable s on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau_1(x)\frac{\partial Y}{\partial x}\right) - s^2 Y = 0. \tag{149}$$

Factorisation. — On vérifie rapidement que $Y(x,s) = Y(0,s)A(x,s)$ est solution de l'équation (149) si $A(x,s)$ est solution du système suivant

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial x}(\tau_1(x)\dfrac{\partial A}{\partial x}) - s^2 A = 0 \\ \quad A(0,s) = 1. \end{array}\right. \tag{150}$$

Existence d'une solution. — Le système (150) admet une solution régulière qui est une fonction entière en s de type exponentiel. Cette solution s'écrit sous la forme

$$A(x,s) = \sum_{i\geq 0} \frac{s^{2i}}{i!} f_i(x) \tag{151}$$

où

$$\left\{\begin{array}{l} \quad f_0 = 1 \\ f_i(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\tau_1(l)} \int_0^l i f_{i-1}(s) ds \; dl. \end{array}\right. \tag{152}$$

On vérifie en effet très simplement que $\sum_{i\geq 0} \frac{s^{2i}}{i!} f_i(x)$ est solution (150) : puisque

$$\frac{\partial}{\partial x}(\tau_1(x)\frac{\partial}{\partial x} f_i(x)) = i f_{i-1}(x),$$

on peut écrire

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\tau_1(x)\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\sum_{i\geq 0}\frac{s^{2i}}{i!} f_i(x)\right) = s^2 \displaystyle\sum_{i\geq 0}\frac{s^{2i}}{i!} f_i(x) \\ \qquad \displaystyle\sum_{i\geq 0}\frac{s^{2i}}{i!} f_i(0) = f_0(0) = 1. \end{array}\right. \tag{153}$$

Considérons maintenant le problème de la convergence de cette série. Prouvons pour cela que $\forall i$

$$|f_i(x)| \leq \frac{1}{i!}\left(\frac{x}{a}\right)^i. \tag{154}$$

Supposons que la proposition (154) soit vérifiée au rang i (c'est clairement le cas au rang 0). Prouvons alors que cette proposition est également vraie au rang $i+1$. D'après (152) on a

$$|f_{i+1}(x)| \leq \int_0^x \frac{l^{i+1}}{\tau_1(l) a^i i!} dl.$$

Or puisque $\tau' \geq a$ alors $\tau_1(x) \geq ax \geq 0$ donc

$$\begin{aligned} |f_{i+1}(x)| &\leq \int_0^x \frac{l^i}{a^{i+1} i!} dl \\ &\leq \frac{1}{(i+1)!} \left(\frac{x}{a}\right)^{i+1} \end{aligned}$$

ce qui est justement la proposition de récurrence (154) au rang $i+1$.

En rassemblant (151) et (154) et en utilisant $\frac{1}{(i!)^2} \leq \frac{2^{2i}}{(2i)!}$ on obtient

$$A(x,s) \leq \sum_{i\geq 0} \frac{s^{2i} x^i}{(i!)^2 a^i} \leq \sum_{i \geq 0} \frac{s^{2i} 2^{2i} x^i}{(2i)! a^i} \leq \exp(2s\sqrt{\frac{x}{a}}). \tag{155}$$

Ceci prouve que, pour chaque x, $s \mapsto A(x,s)$ est une fonction entière de s de type exponentiel.

Transformation de Liouville. — La transformation de Liouville

$$(x, A) \mapsto (z, u)$$

(voir par exemple [**Yos60**, page 110] ou [**Féd87**, page 35]) transforme les équations de la forme

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dA}{dx}\right) + (\lambda r(x) - q(x))\, A = 0,$$

avec $p(x) > 0$ en des équations de la forme

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + (\rho^2 - h(z))u = 0$$

où ρ ne dépend que de λ et peut être considéré comme un paramètre.

Ici on a

$$p(x) = \tau_1(x), \quad \lambda = -s^2, \quad r(x) = 1, \quad q(x) = 0, \quad x \in [0, L]$$

la transformation étant définie pour chaque $x > 0$. Elle peut également être étendue au cas $x = 0$ car, au voisinage de 0, $\tau_1(x) \approx gx$ (avec $g > 0$). Elle transforme l'équation (150) en

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - K^2 s^2 u = \bar{h}(z) u \tag{156}$$

avec

$$z = \frac{1}{K}\int_0^x \sqrt{\frac{1}{\tau_1}} = G(2\sqrt{x}), \quad K = \frac{1}{\pi}\int_0^L \sqrt{\frac{1}{\tau_1}} \tag{157}$$

$$u(z,s) = (\tau_1(x))^{1/4} A(x,s) \tag{158}$$

$$\bar{h}(z) = \frac{F''(z)}{F(z)} \text{ avec } F(z) = (\tau_1(x))^{1/4}. \tag{159}$$

Noter que puisque, comme on la vu, $\tau_1(x) \geq ax$ où $a > 0$, la primitive de $\frac{1}{\tau_1}$ est une fonction régulière de $\sqrt{x}$ ce qui implique que G est bien définie et inversible.

Des arguments semblables prouvent que $\bar{h}$ est en fait une fonction de z^2. Notons ainsi $\bar{h}(z) = h(z^2)$. On a alors autour de 0 le développement en série de Laurent

$$\bar{h}(z) = h(z^2) = \frac{-1}{4z^2} + \mathcal{O}(1).$$

Comparaison avec la solution d'une équation plus simple. — On sait d'après [**AS65**, formule 9.1.49 page 362] que

$$u_0(z,s) = (Lg)^{1/4}\sqrt{\frac{z}{\pi}}\ J_0(iKsz). \tag{160}$$

est solution de

$$\frac{d^2u_0}{dz^2} - K^2s^2u_0 = \left(\frac{-1}{4z^2}\right)u_0. \tag{161}$$

En utilisant le développement en série de Laurent de $\bar{h}$ on peut comparer les solutions de (156), i.e. $u(z,s)$, et de (161), i.e. $u_0(z,s)$. Posons $D(z,s) = u(z,s) - u_0(z,s)$. On déduit de (156) et (161)

$$\frac{d^2D}{dz^2} - K^2s^2D = \left(h(z^2) + \frac{1}{4z^2}\right)u_0 + h(z^2)D. \tag{162}$$

On sait que $z = G(2\sqrt{x})$ où G est une fonction régulière et inversible. On déduit d'après (151) et (158)

$$u(z,s) = (Lg)^{1/4}\sqrt{\frac{z}{\pi}} + \mathcal{O}(z^{5/2}).$$

Il est ensuite facile de vérifier que pour tout s, D est une fonction C^1 de la variable z autour de 0 telle que $D(0,s) = 0$ et $D'(0,s) = 0$. L'équation (162) peut être transformée en l'équation intégrale suivante (voir [**Yos60**, page 111])

$$\begin{aligned} D(z,s) =& \frac{1}{Ks}\int_0^z \mathrm{sh}(Ks(z-t))\left(h(z^2) + \frac{1}{4t^2}\right)u_0(t,s)dt \\ &+ \frac{1}{Ks}\int_0^z \mathrm{sh}(Ks(z-t))h(t^2)D(t,s)dt. \end{aligned} \tag{163}$$

Preuve que $\mathbb{C} \ni s \mapsto D(z,s)$ est une fonction entière de type exponentiel. — On sait déjà que $A(x,s)$ et donc $u(z,s)$ (par l'équation (158)) sont des fonctions entières de la variable s de type exponentiel. D'autre part, au même titre J_0, pour tout z, $s \mapsto u_0(z,s)$ est également une fonction entière en s de type exponentiel. D'où la conclusion.

Preuve que $i\mathbb{R} \ni s \mapsto D(z,s)/s$ appartient à L^2. — Pour conclure, on a juste besoin, pour chaque z d'une estimation de $D(z,iw)$ lorsque w tends vers ∞. Par souci de simplicité nous considérons $w \mapsto D(z,iw)$ pour $w > 0$ et grand. Le cas $w < 0$ est similaire. On pose classiquement (voir par exemple [**Yos60**, page 112]) $M(z,w) =$

$\sup_{0\leq\zeta\leq z}|D(\zeta, iw)|$. En utilisant l'équation (163),on obtient une estimation de $M(z,w)$. Plus précisément on obtient

$$KwM(z,w) \leq I_1(z,w) + I_2(z,w) \tag{164}$$

avec

$$I_1(z,w) = \int_0^z \left| h(t^2) + \frac{1}{4t^2} \right| |u_0(t,iw)|\, dt$$
$$I_2(z,w) = \int_0^z \left| h(t^2) \right| |D(t,iw)|\, dt.$$

On sait que

$$0 \leq z \leq \pi, \quad |u_0(t,iw)| \leq (Lg)^{1/4}$$

car J_0 est majoré par 1 sur l'axe réel. On sait également que $h(t^2) + 1/4t^2$ est borné sur $[0,\pi]$. L'intégrale I_1 est donc majorée par une constante $K_1 > 0$ indépendante de $z \in [0,\pi]$ et w

$$I_1(z,w) \leq K_1. \tag{165}$$

Majorons ensuite I_2 en séparant les deux termes

$$I_2(z,w) = \underbrace{\int_0^{\gamma/w} \left|h(t^2)\right| |D(t,iw)|\, dt}_{I_2'(z,w)} + \underbrace{\int_{\gamma/w}^{z} \left|h(t^2)\right| |D(t,iw)|\, dt}_{I_2''(z,w)}$$

où $\gamma > 0$ est un paramètre que nous choisirons a posteriori. Un calcul simple donne (en utilisant le développement $J_0(z) = 1 - \frac{1}{4}z^2 + \circ(z^2)$)

$$D(z,s) = \sqrt{z}\; cs^2z^2(1 + \mu(s^2z^2))$$

où c est une constante et μ est une fonction régulière vérifiant $\mu(0) = 0$. En utilisant cette expression dans I_2' on obtient

$$I_2'(z,w) \leq \sqrt{w}\frac{bc}{6}\gamma^{3/2}\left(1 + \sup_{|\xi|\leq\gamma^2}|\mu(\xi)|\right). \tag{166}$$

où $b > 0$ est telle que $\left|h(t^2)\right| \leq b/(4t^2)$ pour tout $t \in]0,\pi]$. D'autre part on vérifie simplement que

$$I_2''(z,w) \leq \frac{bw}{4\gamma}M(z,w). \tag{167}$$

En rassemblant (166) et (167), on obtient

$$I_2(z,w) \leq \sqrt{w}\frac{bc}{6}\gamma^{3/2}\left(1 + \sup_{|\xi|\leq\gamma^2}|\mu(\xi)|\right) + \frac{bw}{4\gamma}M(z,w). \tag{168}$$

Grâce aux majorations (165) et (168) on obtient

$$KwM(z,w) \leq K_1 + \sqrt{w}\frac{bc}{6}\gamma^{3/2}\left(1 + \sup_{|\xi|\leq\gamma^2} |\mu(\xi)|\right) + \frac{bw}{4\gamma}M(z,w).$$

Cette majoration étant valable pour $z \in]0,\pi]$, $w > 0$ et $\gamma > 0$ vérifiant $\gamma/w \leq z$. Choisissons maintenant

$$\gamma = \frac{b}{2K}.$$

On a ainsi pour $z > 0$, et tout $w > \gamma/z$

$$(K - b/4\gamma)wM(z,w) \leq K_1 + \sqrt{w}\frac{bc}{6}\gamma^{3/2}\left(1 + \sup_{|\xi|\leq\gamma^2} |\mu(\xi)|\right).$$

Or $K - b/4\gamma = K/2$ donc

$$\frac{1}{2}\,KwM(z,w) \leq K_1 + \sqrt{w}\frac{bc}{6}\gamma^{3/2}\left(1 + \sup_{|\xi|\leq\gamma^2} |\mu(\xi)|\right). \tag{169}$$

Il existe donc $C_0 > 0$ tel que pour tout $z \in]0,\pi]$ et pour tout $w > \gamma/z$,

$$|D(z,iw)| \leq \frac{C_0}{\sqrt{|w|}}. \tag{170}$$

Or $D(z,0) = 0$, on en déduit que pour tout $z > 0$, $s \mapsto D(z,s)/s$ est aussi une fonction entière de s (de type exponentiel) et la majoration établie précédemment prouve que $i\mathbb{R} \ni s \mapsto D(z,s)/s$ appartient à L^2.

Utilisation du théorème de Paley-Wiener. — Le théorème de Paley-Wiener [**Rud74**, page 375] énonce que, pour tout $z \in [0,\pi]$ il existe $[-\frac{G^{-1}(z)}{\sqrt{a}}, \frac{G^{-1}(z)}{\sqrt{a}}] \ni t \mapsto \mathcal{K}(z,t)$ in L^2 tel que

$$D(z,s)/s = \int_{-\frac{G^{-1}(z)}{\sqrt{a}}}^{\frac{G^{-1}(z)}{\sqrt{a}}} \mathcal{K}(z,\xi)\exp(s\xi)d\xi. \tag{171}$$

Les bornes de l'intégrale proviennent des faits suivants

1. via (158), $2\sqrt{x} = G^{-1}(z)$ et (155) on a

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad |(u(z,s)| \leq N(z)\exp\left(|s|\,\frac{G^{-1}(z)}{\sqrt{a}}\right)$$

   pour un certain $N(z) > 0$ bien choisi

2. Une propriété bien connue de J_0 implique

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad |(u_0(z,s)| \leq N_0(z)\exp(|s|\,zK)$$

   pour un certain $N_0(z) > 0$ bien choisi.

3. Puisque $\tau x \geq ax$, (157) on a $zK < \frac{G^{-1}(z)}{\sqrt{a}}$.

4. Ainsi
$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad |D(z,s)| = |u(z,s) - u_0(z,s)| \leq (N(z) + N_0(z)) \exp\left(|s| \frac{G^{-1}(z)}{\sqrt{a}}\right).$$

Conclusion. —
$$(u(z,s) - u_0(z,s))/s = \int_{-\frac{G^{-1}(z)}{\sqrt{a}}}^{\frac{G^{-1}(z)}{\sqrt{a}}} \mathcal{K}(z,\xi) \exp(s\xi) d\xi.$$

Ce qui donne
$$u(z,s) = \frac{(Lg)^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{z} J_0(iKsz) + \int_{-\frac{G^{-1}(z)}{\sqrt{a}}}^{\frac{G^{-1}(z)}{\sqrt{a}}} s\mathcal{K}(z,\xi) \exp(s\xi) d\xi.$$

En exprimant (158) dans les coordonnées (x, A) on obtient
$$\begin{aligned} A(x,s) =& \frac{(Lg)^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(\tau(x))^{1/4}} \sqrt{G(2\sqrt{x})} J_0(iKsG(2\sqrt{x})) \\ &+ \frac{1}{(\tau(x))^{1/4}} \int_{-2\sqrt{\frac{x}{a}}}^{2\sqrt{\frac{x}{a}}} s\mathcal{K}(G(2\sqrt{x}),\xi) \exp(s\xi) d\xi. \end{aligned}$$

On obtient alors rapidement $Y(x,s) = Y(0,s)A(x,s)$. Ce qui donne dans le domaine temporel
$$\begin{aligned} Y(x,t) =& \frac{(Lg)^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(\tau_1(x))^{1/4}} \sqrt{G(2\sqrt{x})} \; \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(0, t + KG(2\sqrt{x}) \sin\theta) d\theta \\ &+ \frac{1}{(\tau_1(x))^{1/4}} \int_{-2\sqrt{\frac{x}{a}}}^{2\sqrt{\frac{x}{a}}} \mathcal{K}(G(2\sqrt{x}),\xi) \left[\frac{\partial}{\partial t} Y(0,t+\xi)\right] d\xi. \end{aligned}$$

Puis en substituant
$$\begin{aligned} X(x,t) &= Y(\tau(x)/g, t) \\ Y(0,t) &= X(0,t) \\ \frac{\partial Y}{\partial t}(0,t) &= \frac{\partial X}{\partial t}(0,t) \end{aligned}$$

on obtient

(172)
$$\begin{aligned} X(x,t) =& \frac{L^{1/4}\sqrt{g}}{2\pi^{3/2}(\tau(x)\tau'(x))^{1/4}} \sqrt{G(2\sqrt{\tau(x)/g})} \; \int_{-\pi}^{\pi} y\left(t + KG(2\sqrt{\tau(x)/g}) \sin\theta\right) d\theta \\ &+ \frac{1}{(\tau(x)\tau'(x)/g)^{1/4}} \int_{-2\sqrt{\frac{\tau(x)}{ag}}}^{2\sqrt{\frac{\tau(x)}{ag}}} \mathcal{K}(G(2\sqrt{\tau(x)/g}),\xi) \; \dot{y}(t+\xi) \; d\xi \end{aligned}$$

avec $y(t) = X(0,t)$.

$\square$

Remarque. — Dans le cas d'une chaine homogène on peut remplacer

$$\tau(x) = gx, \quad \tau'(x) = g, \quad \tau_1(x) = gx = \tau(x)$$
$$K = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{L}{g}}, \quad z = G(2\sqrt{x}) = \pi\sqrt{\frac{x}{L}}, \mathcal{K} = 0,$$

et l'équation (172) donne alors

$$X(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(t + 2\sqrt{\frac{x}{g}}\sin\theta)d\theta$$

qui est bien identique à (141).

10.3. Câble inhomogène portant une charge ponctuelle

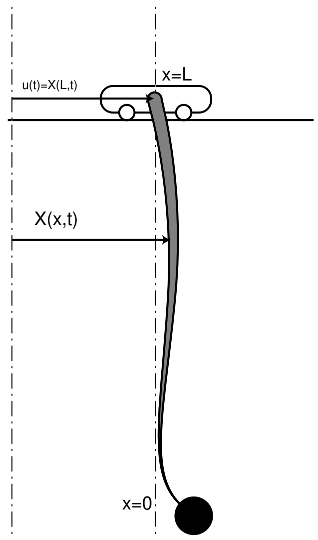

Figure 5 – Câble inhomogène (i.e. section variable) portant une charge ponctuelle.

Modèle. — *Le système représenté sur la figure 5 consiste en un câble pesant inhomogène (i.e. à section variable) portant une charge ponctuelle m. Sous l'hypothèse des petits angles, les déviations par rapport à la verticale $X(x,t) - u(t)$ sont régies par* *l'équation aux dérivées partielles suivante (où g la gravité)*

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\tau(x)\dfrac{\partial X}{\partial x}\right) - \dfrac{\tau'(x)}{g}\dfrac{\partial^2 X}{\partial t^2} = 0 \\
\dfrac{\partial^2 X}{\partial t^2}(0,t) = g\dfrac{\partial X}{\partial x}(0,t) \\
X(L,t) = u(t)
\end{cases}
\tag{173}
$$

où u est la commande. La tension dans le câble $\tau(x)$ vérifie $\tau(0) = mg$. On note $\tau'(x)/g > 0$ la distribution de masse le long du câble.

Théorème 10.2. — *Considérons (173) où $[0,L] \ni x \mapsto \tau(x)$ est une fonction régulière croissante vérifiant $\tau(0) = mg$. Il existe une correspondance biunivoque entre les solutions $[0,L] \times \mathbb{R} \ni (x,t) \mapsto (X(x,t), u(t))$ qui sont C^3 par rapport à la variable t et les fonctions $\mathbb{R} \ni t \mapsto y(t)$ qui sont C^3 via les formules suivantes*

(174)

$$
\begin{cases}
X(x,t) = \phi(x)\;[y(t+\theta(x)) + y(t-\theta(x))] + \psi(x)\;[\dot y(t+\theta(x)) - \dot y(t-\theta(x))] \\
\qquad\qquad + \displaystyle\int_0^x \mathcal{B}(x,\xi)[y(t+\theta(\xi)) + y(t-\theta(\xi))]\;d\xi \\
u(t) = X(L,t)
\end{cases}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
y(t) &= X(0,t) \\
\theta(x) &= \int_0^x \sqrt{\frac{\tau'}{g\tau}} \\
\psi(x) &= \left(\frac{\tau(0)\tau'(0)}{\tau(x)\tau'(x)}\right)^{\frac14} \frac12 \sqrt{\frac{\tau(0)}{g\tau'(0)}} \\
\phi(x) &= \left(\frac{\tau(0)\tau'(0)}{\tau(x)\tau'(x)}\right)^{\frac14} \ldots \\
&\times \left[1 + \frac18\sqrt{\frac{\tau(0)}{\tau'(0)}}\left(\left(\sqrt{\frac{\tau'}{\tau}} + \frac{\tau''}{\tau'}\sqrt{\frac{\tau}{\tau'}}\right)(x) - \left(\sqrt{\frac{\tau'}{\tau}} + \frac{\tau''}{\tau'}\sqrt{\frac{\tau}{\tau'}}\right)(0) + \ldots\right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. \ldots + \frac14\int_0^x \left(\sqrt{\frac{\tau'}{\tau}} + \frac{\tau''}{\tau'}\sqrt{\frac{\tau}{\tau'}}\right)^2 \sqrt{\frac{\tau'}{\tau}}\right)\right]
\end{aligned}
$$

où $B(x,\xi)$ est une fonction régulière de la variable x et ξ sont définies par la donnée de la fonction τ via la formule (187).

La correspondance (174) definit une famille d'opérateurs linéaires $\mathcal{A}_x$ à support compact tels que, pour toute fonction C^3, $X(x,t) = \mathcal{A}_x y|_t$ est automatiquement solution de (173) avec $u(t) = X(L,t)$ et $X(0,t) = y(t)$.

La preuve ce ce résultat est organisée comme suit

1. On utilise le calcul symbolique en remplaçant la dérivée par rapport au temps par la variable de Laplace s. On obtient alors une équation différentielle ordinaire du second ordre en la variable d'espace x avec des coefficients non constants.
2. La solution $X(x,s)$ est factorisée sous la forme $X(x,s) = X(0,s)A(x,s)$. On déduit une équation différentielle ordinaire vérifiée par $A(x,s)$.
3. On simplifie l'étude de $s \mapsto A(x,s)$ par une transformation de Liouville $(x,A) \mapsto (z,u)$.
4. On prouve que la solution $A(x,s)$ de cette équation différentielle ordinaire est une fonction entière de la variable s de type exponentiel. On utilise pour cela des séries de Volterra et des arguments de séries majorantes.
5. On montre, grâce à une étude minutieuse de l'équation de Volterra de seconde espèce satisfaite par A, que, modulo des exponentielles en s, pour tout x, la restriction de $A(x,s)$ à l'axe imaginaire appartient à L^2.
6. Les deux propriétés précendentes nous permettent d'utiliser le théorème de Paley-Wiener et d'affirmer que, pour tout x, A peut s'écrire comme une somme compacte d'exponentielles en s (discrètes et ponctuelles). On aboutit alors à (174).

Démonstration. —

Calculs symboliques. — En remplaçant la dérivation par rapport au temps par la variable s on obtient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}(\tau(x)\dfrac{\partial X}{\partial x}) - \dfrac{\tau'(x)}{g}s^2 X = 0 \\ s^2 X(0,s) = gX'(0,s). \end{cases} \tag{175}$$

On ne traite pas l'autre condition frontière car u est la commande et peut être obtenue explicitement d'après X via $u(t) = X(L,t)$.

Factorisation. — On vérifie aisément que $X(x,s) = X(0,s)A(x,s)$ est solution de (175) si $A(x,s)$ est solution du système suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}(\tau(x)\dfrac{\partial A}{\partial x}) - \dfrac{\tau'(x)}{g}s^2 A = 0 \\ A(0,s) = 1 \\ gA'(0,s) = s^2. \end{cases} \tag{176}$$

Transformation de Liouville. — Utilisons, comme à la section 10.2, une transformation de Liouville

$$(x,A) \mapsto (z,u)$$

avec

$$p(x) = \tau(x), \quad \lambda = -\frac{s^2}{g}, \quad r(x) = \tau'(x), \quad q = 0, \quad x \in [0,L].$$

Les nouvelles variables (z,u) sont définies par les formules suivantes

$$z = \frac{1}{K}\int_0^x \sqrt{\frac{\tau'}{\tau}}, \quad 0 \leq z \leq \pi, \quad K = \frac{1}{\pi}\int_0^L \sqrt{\frac{\tau'}{\tau}} \tag{177}$$

$$u(z,s) = (\tau(x)\tau'(x))^{1/4} A(x,s). \tag{178}$$

Le système (176) est transformé en

$$\frac{d^2u}{dz^2} + (\rho^2 - h(z))u = 0, \text{ avec } \frac{du}{dz}(0) = (a + b\rho^2), \quad u(0) = 1 \tag{179}$$

où

$$\rho = \imath \frac{K}{\sqrt{g}} s, \quad \imath = \sqrt{-1}$$
$$h(z) = \frac{f''(z)}{f(z)}, \text{ avec } f(z) = (\tau(x)\tau'(x))^{1/4}$$
$$a = \frac{f'(0)}{f(0)}, \quad b = \frac{1}{K}\sqrt{\frac{\tau(0)}{\tau'(0)}}.$$

Preuve que $\mathbb{C} \ni \rho \mapsto u(z,\rho)$ est une fonction entière de type exponentiel. — Nous prouvons ici que, pour tout z, $\rho \mapsto u(z,\rho)$ est une fonction entière de type exponentiel.

Désignons par $W(z,\rho)$ la matrice 2×2 solution de

$$\frac{dW}{dz} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ h(z) - \rho^2 & 0 \end{pmatrix} W$$

avec $W(0,\rho) = I$. Or

$$u(z,\rho) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} W(z,\rho) \begin{pmatrix} 1 \\ a + b\rho^2 \end{pmatrix}.$$

il suffit donc de prouver que W est entière en la variable ρ et de type exponentiel. En utilisant la technique classique du point fixe, W peut être exprimée comme une série absolument convergente d'intégrales itérées (série de Volterra)

$$W(z,\rho) = \sum_{i \geq 0} W_i(z,\rho)$$

avec

$$W_0(z,\rho) = I, \quad W_{i+1}(z,\rho) = \int_0^z \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ h(\sigma) - \rho^2 & 0 \end{pmatrix} W_i(\sigma,\rho)\, d\sigma. \tag{180}$$

Pour tout $i > 0$, $W_i(z,\rho)$ est un polynôme en la variable ρ^2 de degré i dont les coefficients dépendent de z. On a ainsi

$$\sum_{0 \leq i \leq k} W_i(z,\rho) = \sum_{0 \leq j \leq k} W^{j,k}(z)\, \rho^{2j}.$$

De l'étape k à l'étape $k+1$, on ajoute à $W^{j,k}(z)$ le coefficient en ρ^{2j} de W_{k+1}, noté $\mathcal{W}^{j,k+1}$, pour obtenir $W^{j,k+1}(z)$

$$W^{j,k+1}(z) = W^{j,k}(z) + \mathcal{W}^{j,k+1}(z).$$

Soit $\alpha = \sup_{[0,\pi]} |h|$. La valeur absolue de chaque quantité $W_i(z,\rho)$ est bornée par la quantité correspondante de la *série majorante* $M_i(z,\rho)$ définie par la récurrence (à comparer avec (180))

$$M_0(z,\rho) = I, \quad M_{i+1}(z,\rho) = \int_0^z \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha+\rho^2 & 0 \end{pmatrix} M_i(\sigma,\rho)\, d\sigma. \tag{181}$$

Comme pour W on définit $M = \sum_{i \geq 0} M_i$ et, pour chaque $k > 0$, les matrices $M^{j,k}$ et $\mathcal{M}^{j,k+1}$ vérifiant

$$\sum_{0 \leq i \leq k} M_i(z,\rho) = \sum_{0 \leq j \leq k} M^{j,k}(z)\, \rho^{2j}, \quad M^{j,k+1}(z) = M^{j,k}(z) + \mathcal{M}^{j,k+1}(z).$$

On montre par des calculs matriciels standards

$$\begin{aligned} M(z,\rho) =& I + \sum_{i>0} \frac{z^{2i}}{(2i)!} \begin{pmatrix} (\rho^2+\alpha)^i & 0 \\ 0 & (\rho^2+\alpha)^i \end{pmatrix} \\ &+ \sum_{i>0} \frac{z^{2i+1}}{(2i+1)!} \begin{pmatrix} 0 & (\rho^2+\alpha)^i \\ (\rho^2+\alpha)^{i+1} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Et donc

$$M(z,\rho) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(z\sqrt{\rho^2+\alpha}) & \mathrm{sh}(z\sqrt{\rho^2+\alpha})/\sqrt{\rho^2+\alpha} \\ \mathrm{sh}(z\sqrt{\rho^2+\alpha})\sqrt{\rho^2+\alpha} & \mathrm{ch}(z\sqrt{\rho^2+\alpha}) \end{pmatrix}. \tag{182}$$

Pour chaque j, les matrices $M^{j,k} = \sum_{j \leq l \leq k-1} \mathcal{M}^{j,l}$ convergent lorsque k tend vers ∞. Notons M^j la limite ainsi atteinte. Par construction, $M = \sum_{j \geq 0} M^j(z)\, \rho^{2j}$ et cette série a un rayon de convergence infini par rapport à la variable ρ, car, pour tout z, les fonctions $\rho \mapsto \mathrm{ch}(z\sqrt{\rho^2+\alpha})$ et $\rho \mapsto \mathrm{sh}(z\sqrt{\rho^2+\alpha})/\sqrt{\rho^2+\alpha}$ tout comme $\rho \mapsto \mathrm{sh}(z\sqrt{\rho^2+\alpha})\sqrt{\rho^2+\alpha}$ sont des fonctions entières de ρ^2.

D'autre part, pour tous i, j et k, les matrices $M^{j,k}$ et $\mathcal{M}^{j,k+1}$ dont les coefficients sont toujours non négatifs dominent les valeurs absolues des coefficients des matrices $W^{j,k}$ et $\mathcal{W}^{j,k+1}$, respectivement. Ainsi pour tout j, les matrices $W^{j,k} = \sum_{j \leq l \leq k-1} \mathcal{W}^{j,l}$ convergent lorsque k tend vers ∞. Notons W^j la limite ainsi atteinte. Par construction, $W = \sum_{j \geq 0} W^j(z)\rho^{2j}$ et cette série possède un rayon de convergence infini par rapport à la variable ρ, comme M. En d'autres termes, W est une fonction entière par rapport à la variable ρ. De plus, les coefficients de M sont des majorants des coefficients de W. Aussi W est de type exponentiel en ρ : pour tout $z \in [0,\pi]$, il existe $E > 0$ tel que

$$\forall \rho \in \mathbb{C}, \quad |W(z,\rho)| \leq E \exp(z|\rho|).$$

Nous avons donc prouvé que, pour tout $z \in [0,\pi]$, $u(z,\rho)$ est une fonction entière en ρ de type exponentiel telle que

$$\forall \rho \in \mathbb{C}, \quad |u(z,\rho)| \leq b(z)\exp(z|\rho|)$$

pour $b(z) > 0$ convenablement choisi.

Preuve qu'une partie de $\mathbb{R} \ni \rho \mapsto u(z,\rho)$ *appartient à* L^2. — Tel quel $\mathbb{R} \ni \rho \mapsto u(z,\rho)$ n'appartient pas à L^2. Le théorème de Paley-Wiener ne s'applique pas directement. Nous devons d'abord ôter certains termes.

Posons

$$v(z,\rho) = u(z,\rho) + b\rho\sin(\rho z) - \left(1 + \frac{b\int_0^z h}{2}\right)\cos(\rho z). \tag{183}$$

Dans ce qui suit nous prouvons que cette fonction entière de type exponentiel est telle que $\mathbb{R} \ni \rho \mapsto v(z,\rho)$ appartient à L^2.

L'équation de Volterra de seconde espèce vérifiée par u (voir [**Yos60**, page 111]),

$$u(z,\rho) = \left(\cos(\rho z) + (a - b\rho^2)\frac{\sin(\rho z)}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\int_0^z \sin(\rho(z-\zeta))\ h(\zeta)\ u(\zeta,\rho)\ d\zeta$$

nous permet de déduire une équation du même type pour v

$$v(z,\rho) = \phi(z,\rho) + \frac{1}{\rho}\int_0^z \sin(\rho(z-\zeta))\ h(\zeta)\ v(\zeta,\rho)\ d\zeta$$

où $\phi = \phi_1 - b\phi_2$ avec

$$\begin{aligned}\phi_1(z,\rho) =& a\frac{\sin(\rho z)}{\rho} + \frac{1}{\rho}\int_0^z \sin(\rho(z-\zeta))h(\zeta)\cos(\rho\zeta)\left(1 + (b/2)\int_0^\zeta h\right)\ d\zeta\\ \phi_2(z,\rho) =& \cos(\rho z)\int_0^z h/2 + \int_0^z \sin(\rho(z-\zeta))h(\zeta)\sin(\zeta)\ d\zeta.\end{aligned}$$

Clairement il existe $D_1 > 0$ tel que pour tout $z \in [0,\pi]$ et $\rho \in \mathbb{R}$,

$$|\phi_1(z,\rho)| \leq \frac{D_1}{1+|\rho|}$$

(h est bornée). Avec $2\sin(\rho(z-\zeta))\sin(\zeta) = \cos(\rho(z-2\zeta)) - \cos(\rho z)$ on a

$$\phi_2(z,\rho) = \int_0^z \cos(\rho(z-2\zeta))h(\zeta)\ d\zeta.$$

Par l'intégration par parties suivante (par hypothèse τ est C^4 et donc h est C^1)

$$\int_0^z \cos(\rho(z-2\zeta))h(\zeta)\ d\zeta = \frac{h(0)+h(z)}{2\rho}\sin(\rho z) + \frac{1}{2\rho}\int_0^z \sin(\rho(z-2\zeta))h'(\zeta)\ d\zeta$$

on montre que pour $|\rho|$ suffisamment grand, ϕ_2 tend vers zéro au moins aussi vite que $1/|\rho|$. Il existe donc une constante $D_2 > 0$ tel que pour tout $z \in [0,\pi]$ et $\rho \in \mathbb{R}$,

$$|\phi_2(z,\rho)| \leq \frac{D_2}{1+|\rho|}.$$

Ceci prouve que v vérifie

$$v(z,\rho) = \phi(z,\rho) + \frac{1}{\rho}\int_0^z \sin(\rho(z-\zeta))h(\zeta)v(\zeta,\rho)\ d\zeta \tag{184}$$

où $|\phi(z,\rho)| \leq D/(1+|\rho|)$ pour tout $z \in [0,\pi]$ et $\rho \in \mathbb{R}$ ($D > 0$ est une constante bien choisie, indépendante de z et de ρ).

Cette dernière inégalité donne la conclusion, via le calcul suivant (voir [**Yos60**, page 112] par exemple).

Soit $\beta(z,\rho) = \sup_{0\leq\zeta\leq z}|v(\zeta,\rho)|$. D'après (184) on a pour chaques z_1 et z_2 dans $[0,\pi]$, $z_1 \leq z_2$,

$$|v(z_1,\rho)| \leq \frac{D}{1+|\rho|} + \frac{\alpha z_1 \beta(z_2,\rho)}{|\rho|} \leq \frac{D}{1+|\rho|} + \frac{\alpha\pi}{|\rho|}\ \beta(z_2,\rho)$$

(en utilisant $\alpha = \sup_{[0,\pi]}|h|$). En particuler lorsque $z_1 = z_2 = z$, on a

$$\beta(z,\rho)\left(1 - \frac{\alpha\pi}{|\rho|}\right) \leq \frac{D}{1+|\rho|}. \tag{185}$$

Finalement pour $|\rho| \geq 2\alpha\pi$, $\beta(z,\rho) \leq 2D/(1+|\rho|)$. Ceci prouve que $\mathbb{R} \ni \rho \mapsto v(z,\rho)$ appartient à L^2.

Utilisation du théorème de Paley-Wiener. — Le théorème de Paley-Wiener affirme que la transformée de Fourier de $\rho \mapsto v(z,\rho)$ est à support compact inclus dans $[-z,z]$ car $\forall \rho \in \mathbb{C}, |v(z,\rho)| \leq N\exp(z|\rho|)$ pour une constante bien choisie $N > 0$. Ceci implique que, pour tout $z \in [0,\pi]$, il existe $[-z,z] \ni \zeta \mapsto \mathcal{K}(z,\zeta)$ appartenant à $L^2([-z,z])$ telle que

$$v(z,\rho) = \int_{-z}^{+z} \mathcal{K}(z,\zeta)\exp(\imath\zeta\rho)\ d\zeta.$$

Or v est une fonction paire de ρ,donc $\mathcal{K}$ est une fonction paire de la variable ζ. On en déduit

$$v(z,\rho) = \int_0^{+z} \mathcal{K}(z,\zeta)(\exp(\imath\zeta\rho) + \exp(-\imath\zeta\rho))\ d\zeta. \tag{186}$$

Conclusion. — Dans les coordonnées (x,A), en utilisant $\rho = \imath Ks/\sqrt{g}$ et en se souvenant que $u(0,\rho)$ est, à une constante près, la transformée de Laplace de $X(0,t)$, on déduit après des calculs assez classiques les expressions de ((174)). La fonction $\mathcal{B}(x,\xi)$ est reliée à $\mathcal{K}(z,\zeta)$ via

$$K\sqrt{\frac{\tau(\xi)}{\tau'(\xi)}}\ \mathcal{B}(x,\xi) = \left(\frac{\tau(0)\tau'(0)}{\tau(x)\tau'(x)}\right)^{\frac{1}{4}}\ \mathcal{K}\left(\frac{\sqrt{g}}{K}\theta(x), \frac{\sqrt{g}}{K}\theta(\xi)\right). \tag{187}$$

Enfin

$$\begin{aligned} A(x,s) = {} & \varphi(x)\left(\exp\theta(x)s + \exp\theta(x)s\right) + \psi(x)s\left(\exp\theta(x)s - \exp\theta(x)s\right) \\ & + \int_0^x \mathcal{K}(x,\zeta)(\exp(\theta(\zeta)s) + \exp(-\theta(\zeta)s))\ d\zeta, \end{aligned}$$

donc $X(x, s) = X(0, s)A(x, s)$, une fois exprimée dans le domaine temporel donne les formules (174). $\square$

10.4. Conclusion

Nous avons montré qu'autour de la position verticale, les systèmes de câbles pesants, portant ou non une charge étaient plats : on peut paramétrer les trajectoires de ces systèmes par la trajectoire de son extrémité libre. Les équations (141),(144) et (174) montrent que la paramétrisation s'effectue grâce à des opérateurs à support compact.

De manière surprenante cette paramétrisation peut aussi s'effectuer lorsque le système est en position verticale instable. Formellement il suffit de remplacer g par $-g$ pour obtenir des solutions de l'équation elliptique

$$\frac{\partial}{\partial x}(gx\frac{\partial X}{\partial x}) + \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = 0$$

par la formule intégrale suivante

$$X(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(t + 2\imath\sqrt{x/g}\sin\theta)\ d\theta$$

où y est cette fois une fonction holomorphe de $\mathbb{R}\times[-2\sqrt{L/g}, +2\sqrt{L/g}]$, à valeur réelle sur l'axe réel. On peut encore résoudre le problème de la planification des trajectoires de ce système même si le problème de Cauchy associé à cette équation elliptique est mal posé au sens de Hadamard.

APPENDICE A

COMMANDE EN TEMPS MINIMUM SOUS CONTRAINTES D'ÉTAT ET DE COMMANDE DES ÉQUATIONS DE SAINT-VENANT

Introduction. — Nous suivons ici la procédure de résolution de la trajectographie en temps minimum sous contraintes présentée à la section 2.5. Après avoir discrétisée la sortie plate, nous utilisons la paramétrisation explicite des variables du systèmes pour calculer une trajectoire (force à exercer) permettant de rallier deux points stationnaires en respectant les contraintes de non-débordement de la gamelle et de mini-maxi sur la force exercée.

Calcul de la force à exercer sur la gamelle. —

$$\begin{aligned} F(t) &= M\ddot{D}(t) + L\int_0^{h(t,D(t)-l/2)} \rho g z dz - L\int_0^{h(t,D(t)+l/2)} \rho g z dz \\ &= M\ddot{D}(t) + \frac{\rho g L}{2}\left(h(t,D(t)-l/2)^2 - h(t,D(t)+l/2)^2\right). \end{aligned}$$

Or d'autre part

$$\begin{aligned} &h(t,D(t)-l/2)^2 - h(t,D(t)+l/2)^2 \\ &\qquad = \left(\bar{h} + \frac{\sqrt{\bar{h}}}{2\sqrt{g}}\left(\dot{\nu}(t+\frac{\Delta}{2}) - \dot{\nu}(t-\frac{\Delta}{2})\right)\right)^2 \dots \\ &\qquad\quad - \left(\bar{h} + \frac{\sqrt{\bar{h}}}{2\sqrt{g}}(\dot{\nu}(t-\frac{\Delta}{2}) - \dot{\nu}(t+\frac{\Delta}{2}))\right)^2 \\ &\qquad = 2\frac{\bar{h}^{3/2}}{\sqrt{g}}\left(\dot{\nu}(t+\frac{\Delta}{2}) - \dot{\nu}(t-\frac{\Delta}{2})\right) \end{aligned}$$

et donc

$$F(t) = \frac{M}{2}\left(\ddot{\nu}(t+\frac{\Delta}{2}) + \ddot{\nu}(t-\frac{\Delta}{2})\right) + L\rho\sqrt{g}\bar{h}^{3/2}\left(\dot{\nu}(t+\frac{\Delta}{2}) - \dot{\nu}(t-\frac{\Delta}{2})\right).$$

Expression du problème d'optimisation. —

Traduction du problème sur la sortie plate. — Le problème d'ingénierie s'écrit

(188)
$$\begin{aligned} &\min T \\ &\text{point stationnaire} \to \text{point stationnaire} \\ F_{mini} \leq &F \leq F_{maxi} \\ h_{mini} \leq &h \leq h_{maxi} \end{aligned}$$

qu'on peut réécrire comme

(189)

$$\begin{aligned} &\min\ T \\ &\nu(t) = 0, t < \frac{\Delta}{2} \\ &\nu(t) = 1, t > T + \frac{\Delta}{2} \\ &F_{mini} \leq \frac{M}{2}\left(\ddot{\nu}(t+\frac{\Delta}{2}) + \ddot{\nu}(t-\frac{\Delta}{2})\right) + L\rho\sqrt{g}\bar{h}^{3/2}\left(\dot{\nu}(t+\frac{\Delta}{2}) - \dot{\nu}(t-\frac{\Delta}{2})\right) \leq F_{maxi}, \forall t \\ &h_{mini} \leq \bar{h} + \frac{\sqrt{\bar{h}}}{2\sqrt{g}}\left(\dot{\nu}(t-\frac{z}{c}) - \dot{\nu}(t+\frac{z}{c})\right) \leq h_{maxi}, \forall t, \forall z \in [-l/2, l/2] \end{aligned}$$

Dans ce qui suit on se concentre sur le problème où seules les hauteurs du fluide au bord de la gamelle sont contraints.

Discrétisation de la sortie plate. — Nous devons considérer des fonctions ν de la forme

$$\nu(t) = \begin{cases} 0 \text{ pour } t \leq \Delta/2 \\ \sigma(t) \text{ pour } t \in]\Delta/2, T+\Delta/2[\\ 1 \text{ pour } t \geq \Delta/2 \end{cases}$$

Nous allons associer à σ le vecteur

$$\sigma = [\sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(N)]$$

où N est la dimension de notre problème. Cela revient à associer à ν le vecteur

$$[0 \quad 0 \quad 0 \quad \nu(\Delta/2) \quad \nu(\Delta/2+\delta t) \quad \ldots \quad \nu(\Delta/2+N\delta t) \quad 1 \quad 1 \quad 1].$$

Expression des contraintes. — Posons $n_1 - 1 = N/\delta t$. On définit les deux matrices suivantes $M_1 \in \mathcal{M}_{N+n_1,N}$ et $M_2 \in \mathcal{M}_{N+n_1,N}$.

(190)

$$M_1 = \begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & \\
-1 & 1 & & & & & & & & \\
 & -1 & 1 & & & & & & & \\
 & & \ddots & \ddots & & & & & & \\
 & & & \ddots & \ddots & & & & & \\
-1 & & & & -1 & 1 & & & & \\
1 & -1 & & & & -1 & 1 & & & \\
 & \ddots & \ddots & & & & \ddots & \ddots & & \\
 & & \ddots & \ddots & & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & 1 & -1 & & & & -1 & 1 \\
 & & & & 1 & -1 & & & & -1 \\
 & & & & & 1 & -1 & & & \\
 & & & & & & 1 & -1 & & \\
 & & & & & & & 1 & -1 & \\
 & & & & & & & & 1 & -1 \\
 & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}, V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix},$$

si bien qu'on peut remplacer $\dot{\sigma}$ par $\frac{1}{\delta t}(M_1\sigma + V_1)$.

(191)

$$M_2 = \begin{pmatrix}
1 &&&&&&&&&&& \\
-2 & 1 &&&&&&&&&& \\
1 & -2 & 1 &&&&&&&&& \\
& 1 & -2 & 1 &&&&&&&& \\
&& \ddots & \ddots & \ddots &&&&&&& \\
&&& \ddots & \ddots & \ddots &&&&&& \\
1 &&&& 1 & -2 & 1 &&&&& \\
-2 & 1 &&&& 1 & -2 & 1 &&&& \\
1 & -2 & 1 &&&& 1 & -2 & 1 &&& \\
& \ddots & \ddots & \ddots &&&& \ddots & \ddots & \ddots && \\
&& \ddots & \ddots & \ddots &&&& \ddots & \ddots & \ddots & \\
&&& 1 & -2 & 1 &&&& 1 & -2 & 1 \\
&&&& 1 & -2 & 1 &&&& 1 & -2 \\
&&&&& 1 & -2 & 1 &&&& 1 \\
&&&&&& 1 & -2 & 1 &&& \\
&&&&&&& 1 & -2 & 1 && \\
&&&&&&&& 1 & -2 & 1 & \\
&&&&&&&&& 1 & -2 & 1 \\
&&&&&&&&&& 1 & -2 \\
&&&&&&&&&&& 1
\end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

si bien qu'on peut remplacer $\ddot{\sigma}$ par $\frac{1}{(\delta t)^2}\left(M_2\sigma + V_2\right)$.

Grâce aux deux définitions précédentes (190) et (191), on réécrit les contraintes du problème d'optimisation (189) ainsi

$$F_{mini} \leq \frac{M}{2\delta t^2}\left(M_2\sigma + V_2\right) + L\rho\sqrt{g}\bar{h}^{3/2}\frac{1}{\delta t}\left(M_1\sigma + V_1\right) \leq F_{maxi},$$
$$h_{mini} \leq \bar{h} + \frac{\sqrt{\bar{h}}}{2\sqrt{g}\delta t}\left(M_1\sigma + V_1\right) \leq h_{maxi}.$$

Résolution du problème par l'algorithme du simplexe. — Cette fois encore, le problème du temps minimum se ramène à l'étude de l'existence d'un point à l'intérieur d'un polytope. L'algorithme du simplexe (première étape) fournit une réponse à cette question. On résoud donc par une dichotomie sur T ce problème comme on l'a fait dans le chapitre 2, en gardant N constant en posant $\delta t = T/N$

$$\begin{aligned}
&\min\ T \\
&F_{mini} \leq \frac{M}{2\delta t^2}\left(M_2\sigma + V_2\right) + L\rho\sqrt{g}\bar{h}^{3/2}\frac{1}{\delta t}\left(M_1\sigma + V_1\right) \leq F_{maxi}, \\
&h_{mini} \leq \bar{h} + \frac{\sqrt{\bar{h}}}{2\sqrt{g}\delta t}\left(M_1\sigma + V_1\right) \leq h_{maxi}
\end{aligned}$$

Résultats. — On fournit les résultats de la résolution du temps minimum $T \simeq 2.4779$ [(1)] avec les paramètres $F_{maxi} = 4N$, $F_{mini} = -4N$, $\bar{h} = 0.1\,m$, $\rho = 1000\,kg/m^3$, $g = 9.81\ ms^{-2}$, $M = 0.2\ kg$, $h_{mini} = 0.08\ m$, $h_{maxi} = 0.12\ m$, $l = 0.1\ m$, $L = 1\ m$, $N = 120$. On déplace la gamelle de gauche à droite sur une distance de $1m$. On suit exactement la procédure présentée précédemment. Sur la figure 2 on a représenté la force exercée sur le système, et sur la figure 3 la hauteur du fluide sur le bord gauche de la gamelle au cours du temps. Le graphe de la fonction σ est reporté sur la figure 1.

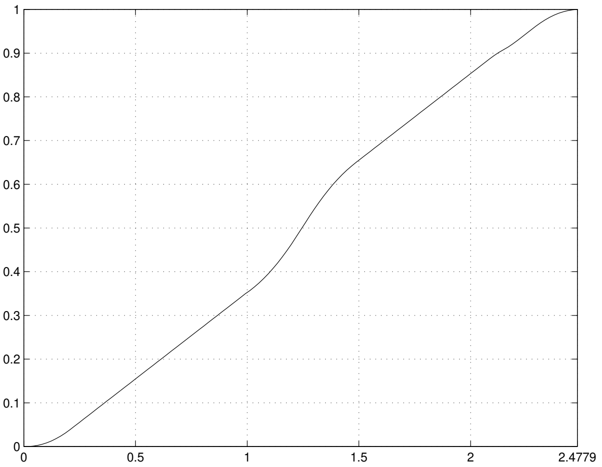

Figure 1 – Résolution du temps minimum. La fonction σ.

Difficultés numériques. — On remarquera sur les figures 2 le ressaut de la force exercée au temps $t = \Delta = 1s$ et au temps $t = 2\ \Delta = 2s$, correspondant aux deux réflexions de l'onde avant l'arrêt du système. Ce phénomène est sans doute amplifié par les effets de la discrétisation spatiale du fluide. On constate un phénomène similaire, figure 3, sur la hauteur du fluide au bord de la gamelle.

(1) La fonction σ est non constante sur l'intervalle $[0,\ 2.4779]$, le temps de transfert total est de $2.4779 + \Delta = 3.4779$.

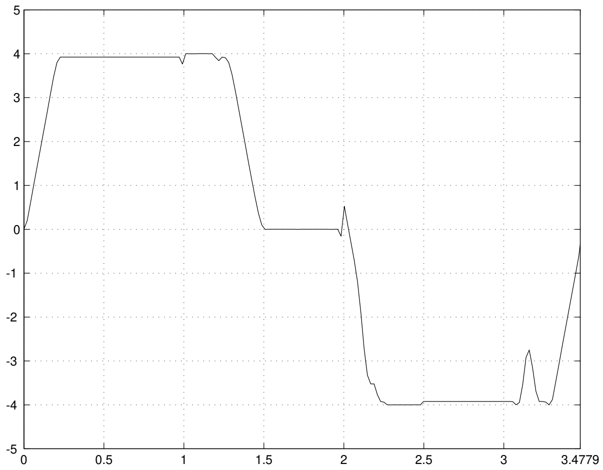

Figure 2 – Résolution du temps minimum. Force exercée.

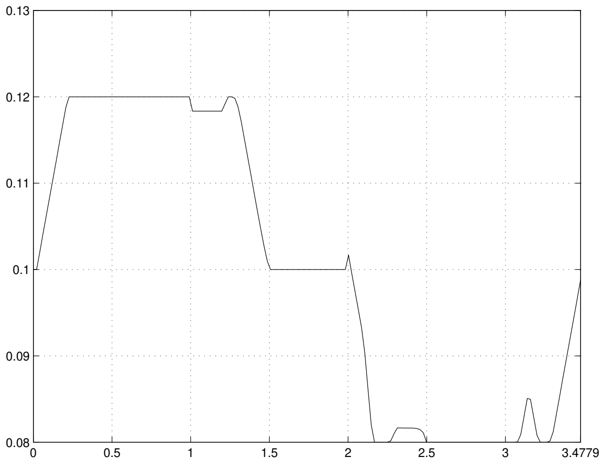

Figure 3 – Résolution du temps minimum. Hauteur au bord gauche de la gamelle.

Les contraintes sont bien respectées.

Comparaison avec la simulation non linéaire. — La résolution de la planification de trajectoire en temps minimum sous contraintes que nous venons de réaliser repose sur l'étude du modèle linéarisé (dans les coordonnées des invariants de Riemann) de la section 8.2.

Cette fois encore, il est intéressant de simuler l'influence de cette commande en boucle ouverte sur le système non linéaire . Pour cela nous utilisons le simulateur à base de schéma de Godunov déjà utilisé à la section 8.6.

Les résultats sont reportés figure 4.

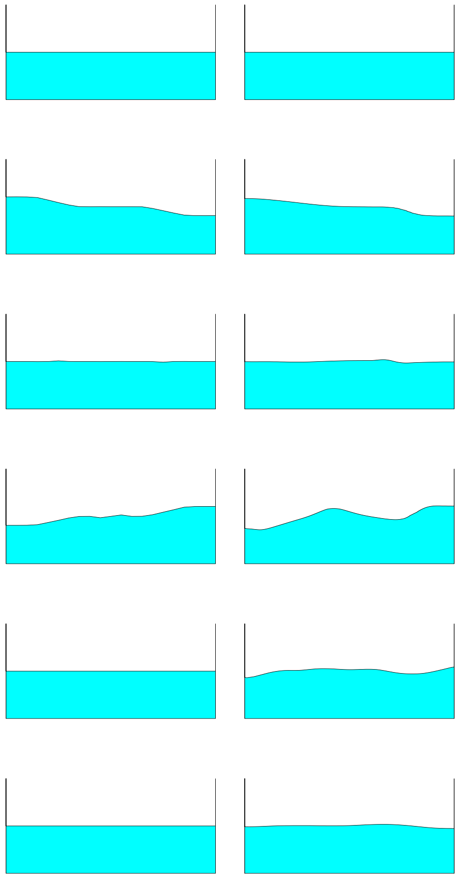

Figure 4 – Profils aux temps $t = 0$, $t = 3.4779/4$, $t = 3.4779/2$, $t = 3/4\ 3.4779$, $t = 3.4779$ et $t = 5/4\ 3.4779$. Planification en temps minimum (gauche). Simulation non linéaire (droite).

APPENDICE B

APPROXIMATION DE SYSTÈMES LINÉAIRES À RETARDS PAR DES FRACTIONS CONTINUES

Introduction. — À des fins d'identification il peut être utile d'approximer un système linéaire à retard par une système linéaire d'ordre supérieur. L'approche proposée ici, reposant sur l'approximation de la fonction exponentielle par une fraction continue, est, à notre connaissance, originale. Nous la comparons à diverses techniques de la littérature : approximations de Laguerre, Kautz et Padé.

Approximation. — Nous utilisons le développement en fractions continues de la fonction exponentielle (voir par exemple [**AS65**, formule 4.2.40 page 70])

$$e^z = \frac{1}{1-}\,\frac{z}{1+}\,\frac{z}{2-}\,\frac{z}{3+}\,\frac{z}{2-}\,\frac{z}{5+}\,\frac{z}{2-}\cdots \quad (|z| < \infty) \tag{192}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1-}\,\dfrac{z}{1+}\,\dfrac{z}{2-}\,\dfrac{z}{3+}\,\dfrac{z}{2-}\,\dfrac{z}{5+}\,\dfrac{z}{2-}\,\dfrac{z}{7+}\,\dfrac{z}{2-}\,\dfrac{z}{9+}\,\dfrac{z}{2-}\,\dfrac{z}{11+z/2} \\ \dfrac{665280 + 332640\,z + 75600\,z^2 + 10080\,z^3 + 840\,z^4 + 42\,z^5 + z^6}{665280 - 332640\,z + 75600\,z^2 - 10080\,z^3 + 840\,z^4 - 42\,z^5 + z^6} \end{cases} \tag{193}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1-}\,\dfrac{z}{1+}\,\dfrac{z}{2-}\,\dfrac{z}{3+}\,\dfrac{z}{2-}\,\dfrac{z}{5+}\,\dfrac{z}{2-}\,\dfrac{z}{7+z/2} \\ \dfrac{1680 + 840\,z + 180\,z^2 + 20\,z^3 + z^4}{1680 - 840\,z + 180\,z^2 - 20\,z^3 + z^4} \end{cases} \tag{194}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1-}\,\dfrac{z}{1+}\,\dfrac{z}{2-}\,\dfrac{z}{3+}\,\dfrac{z}{2-}\,\dfrac{z}{5+z/2} \\ \dfrac{120 + 60\,z + 12\,z^2 + z^3}{120 - 60\,z + 12\,z^2 - z^3} \end{cases} \tag{195}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1-}\,\dfrac{z}{1+}\,\dfrac{z}{2-}\,\dfrac{z}{3+z/2} \\ \dfrac{12 + 6\,z + z^2}{12 - 6\,z + z^2} \end{cases} \tag{196}$$

Ordre	2	4	6	8	10
Laguerre	572.723	275.332	144.179	86.266	56.854
Kautz	357.889	232.808	210.509	149.750	105.136
Padé-2	496.687	124.988	34.378	12.207	5.267
Frac. Cont.	496.687	40.663	0.362	0.001	0.000

Figure 1 – Comparaisons des erreurs H_∞ ($\times 10^5$), système du premier ordre.

Ordre	2	4	6	8	10
Laguerre	36.762	9.550	4.277	2.412	1.546
Kautz	68.798	18.816	8.499	4.807	3.084
Padé-2	6.414	0.588	0.132	0.045	0.019
Frac. Cont.	6.414	0.147	0.001	0. (ns)	0. (ns)

Figure 2 – Comparaisons des erreurs H_∞ ($\times 10^5$), système du $5^{ème}$ ordre.

$$\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{1}{1-\frac{z}{1+\frac{z}{2}}} \\ \dfrac{2+z}{2-z} \end{array} \right. \tag{197}$$

Comparaison avec les résultats de la littérature. — Nous allons comparer ces approximations avec certaines de la littérature, présentées dans [**MP99**], i.e.

1. approximation de Laguerre : $e^{-z} \sim \frac{(1-z/(2n))^n}{(1+z/(2n))^n}$
2. approximation de Kautz : $e^{-z} \sim \frac{(1-z/(2n)+z^2/(8n^2))^n}{(1+z/(2n)+z^2/(8n^2))^n}$
3. approximation de Padé-2 : $e^{-z} \sim \frac{(1-z/(2n)+z^2/(12n^2))^n}{(1+z/(2n)+z^2/(12n^2))^n}$

On reporte ici les expériences réalisées avec

– un système du premier ordre $\frac{e^{-s}}{1+5s}$, voir tableau 1

– un système du $5^{ème}$ ordre $\frac{e^{-s}}{(1+s)^5}$, voir tableau 2

Comme on le voit les résultats de la technique “fractions continues” sont très bons, encore meilleurs que ceux de l'approximation Padé-2. Plus précisement nous donnons sur les figures 3 et 4 les résultats aux ordres $2, 3, 4, 5, 6, 8, 10$ qui peuvent se révéler utiles en pratique. Il semble qu'on puisse retenir l'approximation d'ordre 3, formule (195), qui offre un bon compromis complexité/précision.

Conclusion. — La technique proposée est très performante comparée aux autres approximations connues.

Figure 3 – Erreurs H_∞ ($\times 10^5$) pour la méthode “fractions continues”, système du $5^{ème}$ ordre.

Ordre	2	3	4	5	6	8	10
Erreur	6.414	0.751	0.147	0.018	0.001	0.000	0.000

Figure 4 – Erreurs H_∞ ($\times 10^5$) pour la méthode “fractions continues”, système du premier ordre.

Ordre	2	3	4	5	6	8	10
Erreur	496.687	191.049	40.663	4.862	0.362	0.001	0.000

APPENDICE C

QUELQUES ÉLÉMENTS DE THÉORIE DES MODULES POUR LES SYSTÈMES À RETARDS

Les éléments qui suivent sont extraits de [**Mou95**].

Notons $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_r)$ un ensemble d'opérateurs à retards. Classiquement, à toute application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on associe $(\delta_i.f)(t) = f(t - h_i)$, où $h_i \in \mathbb{R}^{+\star}$, $\forall i = 1, \ldots, r$.

D'un point de vue algébrique, on peut considérer un système à retards comme un module sur l'anneau $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \delta]$ des polynômes en δ et $\frac{d}{dt}$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ (voir [**FM94, FM95**]).

Un module est une structure linéaire similaire à un espace vectoriel (ils partagent les mêmes axiomes de définition), dont les coefficients sont définis sur un anneau, comme $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \delta]$, au lieu d'un corps.

Système à retards. — On peut considérer un système comme un ensemble fini de variables vérifiant un nombre fini d'équations différentielles à retards. *On dira qu'un système linéaire à retards est un* $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \delta]$*-module finiment engendré.*

Élément de torsion. — On dit qu'un élément w d'un $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \delta]$-module est de torsion s'il existe un polynôme p de $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \delta]$ tel que $pw = 0$. *Un module est de torsion si tous ses éléments sont de torsion.*

Exemples. Considérons le système

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1(t-1) \\ \dot{x}_2(t) &= x_2(t) + u(t-1). \end{aligned}$$

x_1 *est de torsion.*

En revanche le système suivant est sans torsion

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1(t-1) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_2(t) + u(t-1). \end{aligned}$$

Liberté. — On dit qu'un $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \delta]$-module est libre s'il contient une famille $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \delta]$-linéairement indépendante et génératrice, qu'on appelera une base.

Exemples. Le système

$$\dot{x}(t) = x(t-1) + u(t)$$

est libre de base x.

Le système

$$\dot{x}(t) = u(t-1)$$

est sans torsion mais non libre.

Si une famille n'est pas génératrice sur une $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \delta]$-algèbre, on a vu dans les applications que le fait qu'elle soit génératrice sur une $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \delta, \delta^{-1}]$-algèbre était important : une fois s'être autorisé l'inversion de l'ensemble d'opérateurs δ, on est en mesure de paramétrer les trajectoires du système. C'est ainsi qu'intervient la notion de δ-liberté

Formellement on peut étendre les scalaires du module. Classiquement, considérons un anneau A contenant $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \delta]$ et Λ un $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \delta]$-module. On note $A \otimes_{\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \delta]} \Lambda$ le A-module (ou $\otimes$ est le produit tensoriel, voir [**Eis95**, page 63]) constitué en multipliant formellement les éléments de Λ par des scalaires de A.

On dira que Λ est un système *A-commandable libre* si $A \otimes_{\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \delta]} \Lambda$ est libre.

π-liberté. — On dira qu'un système Λ est π-libre, $\pi \in \mathbb{R}[\delta]$ si Λ est $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \delta, \pi^{-1}]$-commandable libre.

Exemple. Le système

$$\dot{x}(t) = u(t) + u(t-1)$$

est $(1+\delta)$-libre.

δ-liberté. — Comme on l'a vu un cas particulier particulièrement important de la π-liberté est celui de la δ-liberté. On dira alors qu'un système est δ-libre si Λ est $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \delta, \delta^{-1}]$-commandable libre.

Exemple. Le système

$$\dot{x}(t) = u(t-1) + x(t)$$

est δ-libre.

APPENDICE D

EXEMPLE DE TRAJECTOIRES POUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES MIMO

On considère comme au chapitre 1 les systèmes de la forme

$$\dot{z}_i^j = \frac{K_i^j u(t-\delta_i^j) - z_i^j}{\tau_i^j}$$

On a vu à la section 1.1 la construction d'une base du module correspondant à ce système. Dans chaque colonne de la matrice correspondant au système (sans perte de généralité, la première), où on renumérote par souci de simplification, on cherche un élément de la base sous la forme

$$\xi_1 = a_1\ z_1(t+\delta_1) + \ldots + a_q\ z_q(t+\delta_q),$$

où $a_1, \ldots, a_q$ vérifient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{K_1}{\tau_1} & \frac{K_2}{\tau_2} & \ldots & \frac{K_q}{\tau_q} \\ \frac{K_1}{(\tau_1)^2} & \frac{K_2}{(\tau_2)^2} & \ldots & \frac{K_q}{(\tau_q)^2} \\ & & & \\ \frac{K_1}{(\tau_1)^{(q-1)}} & \frac{K_2}{(\tau_2)^{(q-1)}} & \ldots & \frac{K_q}{(\tau_q)^{(q-1)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \\ a_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La reconstruction est alors donnée par la formule suivante, où la matrice en question est bien inversible comme nous l'avons vu à la section 19 (son déterminant étant de Vandermonde)

$$\begin{pmatrix} z_1(t+\delta_1) \\ \vdots \\ z_q(t+\delta_q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_q \\ -\frac{a_1}{\tau_1} & \ldots & -\frac{a_q}{\tau_q} \\ \vdots & & \vdots \\ (-1)^{(q-1)}\ \frac{a_1}{(\tau_1)^{(q-1)}} & \ldots & (-1)^{(q-1)}\ \frac{a_q}{(\tau_q)^{(q-1)}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \dot{\xi}_1(t) \\ \vdots \\ \xi_1^{(q-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Cas 2×2. —

(198)
$$\begin{cases} \xi_1(t) = a_1^1 z_1^1(t+\delta_1^1) + a_2^1 z_2^1(t+\delta_2^1) \\ \xi_2(t) = a_2^1 z_2^1(t+\delta_2^1) + a_2^2 z_2^2(t+\delta_2^2) \end{cases}$$

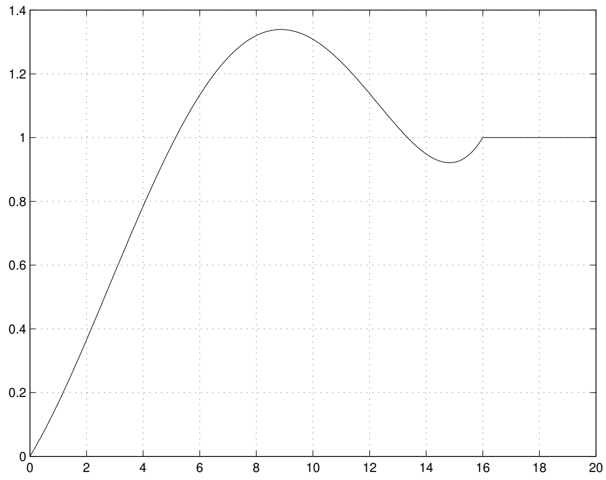

Figure 1 – Planification de la commande u_1.

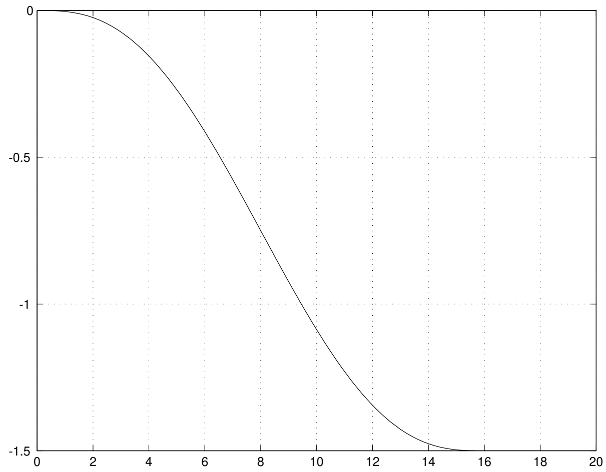

Figure 2 – Planification de la sortie plate ξ_1.

avec (pour ξ_1, la relation pour ξ_2 étant similaire)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{K_1^1}{\tau_1^1} & \frac{K_2^1}{\tau_2^1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il vient

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \dot{\xi}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ \frac{-a_1^1}{\tau_1^1} & \frac{-a_2^1}{\tau_2^1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^1(t+\delta_1^1) \\ z_2^1(t+\delta_2^1) \end{pmatrix}.$$

On note alors

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ \frac{-a_1^1}{\tau_1^1} & \frac{-a_2^1}{\tau_2^1} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} g_1^1 & h_1^1 \\ g_2^1 & h_2^1 \end{pmatrix}.$$

Expression des contraintes. — Sur chaque état partiel z_i^j, on ne peut imposer des contraintes que sur l'intervalle $[\delta_i^j, T]$. Ainsi, imposer

$$min_1^1 \leq z_1^1(t) \leq max_1^1 \text{ sur } [\delta_1^1, T]$$

revient à imposer

$$min_1^1 \leq g_1^1\xi_1(t) + h_1^1\dot{\xi}_1(t) \leq max_1^1 \text{ sur } [0, T-\delta_1^1].$$

Pour obtenir l'expression de la commande, on inverse l'une quelconque des deux équations de la dynamique

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{\tau_1^1 \dot{z}_1^1(t+\delta_1^1) + z_1^1(t+\delta_1^1)}{K_1^1} \\ &= \frac{1}{K_1^1}\Big(\tau_1^1(g_1^1\dot{\xi}_1(t) + h_1^1\ddot{\xi}_1(t)) + (g_1^1 xi_1(t) + h_1^1(t))\Big) \end{aligned}$$

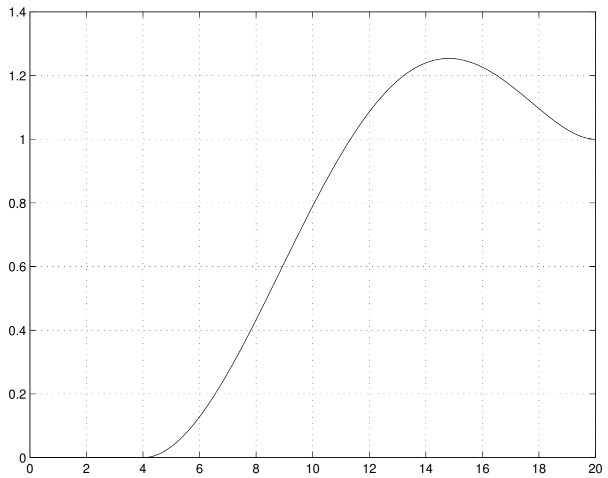

Figure 3 – Planification de l'état partiel z_1^1.

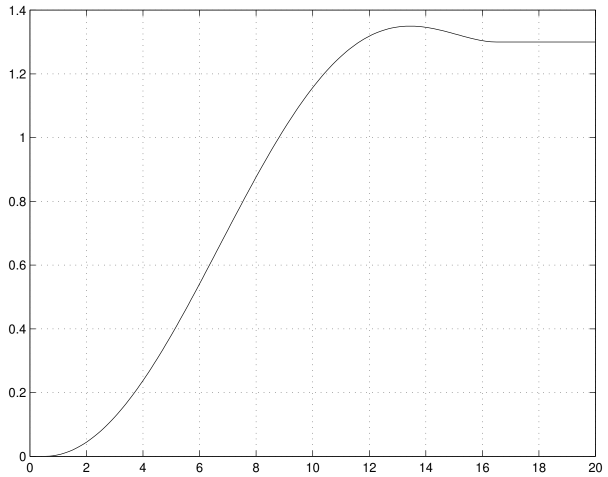

Figure 4 – Planification de l'état partiel z_2^1.

Il faut ensuite rajouter les contraintes initiales et finales, ce qui donne sur ξ_1 (les relations sur ξ_2 sont similaires)

$$
(199)\quad \left\{ \begin{array}{r}
min_1^1 \leq g_1^1\xi_1(t) + h_1^1\dot{\xi}_1(t) \leq max_1^1 \text{ sur } [0, T-\delta_1^1] \\
min_2^1 \leq g_2^1\xi_1(t) + h_2^1\dot{\xi}_1(t) \leq max_2^1 \text{ sur } [0, T-\delta_2^1] \\
min_1 \leq \dfrac{1}{K_1^1}\Big(\tau_1^1(g_1^1\dot{\xi}_1(t) + h_1^1\ddot{\xi}_1(t)) + (g_1^1 xi_1(t) + h_1^1(t)\Big) \leq max_1 \text{ sur } [0, T] \\
\xi_1(0) \text{ point de départ en } z_i^1 \\
\dot{\xi}_1(0) \text{ point de départ en } \dot{z}_i^1, \text{ i.e. 0 si on part d'un point stationnaire} \\
\ddot{\xi}_1(0) \text{ expression de la continuité de la commande} \\
\xi_1(T - \max(\delta_1^1, \delta_2^1)) \text{ point visé} \\
\dot{\xi}_1(T - \max(\delta_1^1, \delta_2^1)) = 0 \text{ (on vise un point stationnaire)} \\
\ddot{\xi}_1(T - \max(\delta_1^1, \delta_2^1)) = 0 \text{ (on vise un point stationnaire).}
\end{array} \right.
$$

En général ξ_1 sera une fonction dont le graphe ressemblera à celui représenté figure 2 (polynôme).

Exemple de résultats. — On donne les résultats pour une seule colonne avec

$$K_1^1 = 1, \quad \delta_1^1 = 4, \quad \tau_1^1 = 2, \quad K_2^1 = 1.3, \quad \delta_2^1 = .5, \quad \tau_2^1 = 5.$$

On souhaite passer du point stationnaire défini par $u_1 = 0$ à celui défini par $u_1 = 1$ dans le temps $T = 20$. Comme on le voit, l'effet des retards se traduit par le fait que u_1 atteint sa consigne à $T - \max(\delta_1^1, \delta_2^1) = 16$, que z_{11} ne quitte son point stationnaire qu'au temps $\delta_1^1 = 4$ et que z_{21} ne quitte son point stationnaire qu'au temps $\delta_2^1 = 0.5$. On remarquera également que z_1^1 est l'état le plus lent. Il atteint sa consigne en $T = 20$, alors que z_2^1 l'atteint en $T - 3.5 = 16.5$.

APPENDICE E

UNE FONCTION C^∞ DONT LA DÉRIVÉE EST À SUPPORT COMPACT

Un exemple de fonction raccord C^∞ est donné par la construction suivante extraite de [**Gou94**, pages 75–76]. Elle peut être utile pour la planification de trajectoires de systèmes plats.

Soit l'application $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x) = 0 \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = e^{-1/x} \text{ si } x \geq 0. \end{cases}$$

Son graphe est donné sur la figure 1.

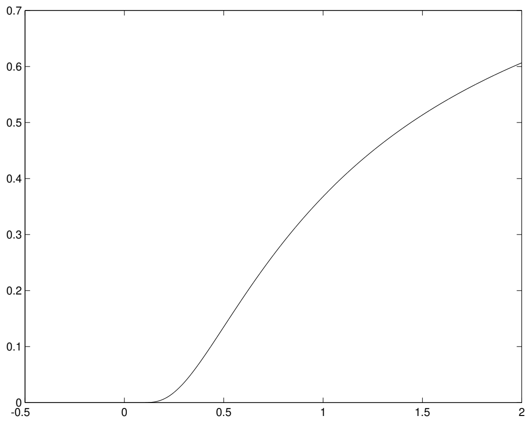

Figure 1 – La fonction $e^{-1/x}$.

À partir de cette fonction plate en 0 on va construire g plate en 0 et en 1 en posant :

$$g(x) = 1 - \frac{f(f(1) - f(x))}{f(f(1))} = 1 - e^{-\frac{e^{2-1/x}}{1-e^{1-1/x}}}.$$

Son graphe est représenté sur la figure 2. .

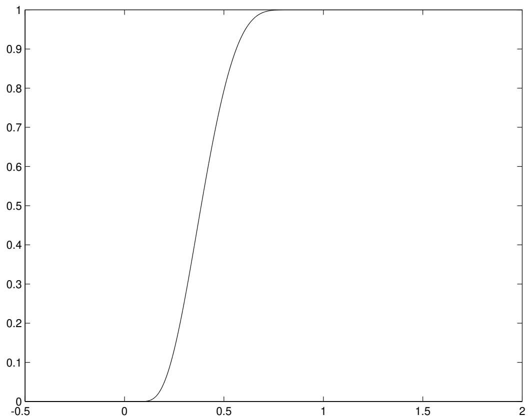

Figure 2 – Une fonction C^∞ dont la dérivée est à support compact.

Les fonctions f et g sont toutes deux C^∞.

On notera que le comportement de g n'est pas analogue aux points 0 et 1 ce qui est dommage.

D'autre part, on pourra calculer les dérivées successives de g au moyen des dérivées de f qui se calculent par la récurrence suivante

$$f^{(n)}(x) = e^{-1/x} P_n\left(\frac{1}{x}\right)$$

avec

$$P_n(X) = X^2 P_{n-1}(X) - X^2 P'_{n-1}(X).$$

APPENDICE F

RÉSULTATS DE LA LITTÉRATURE SUR DEUX CLASSES D'ÉQUATIONS INTÉGRALES

On reporte ici les solutions de deux équations intégrales importantes. Ces résultats sont tirés de [**Yos60**]. Ces deux solutions utilisent la technique du noyau résolvant (resolvent kernel) que nous avons utilisée au chapitre 10.

Équation de Fredholm de seconde espèce. — On appelle équation de Fredholm de seconde espèce, l'équation intégrale suivante où φ est l'inconnue

$$f(s) = \varphi(s) - \int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt \tag{200}$$

où $[a,b]^2 \ni (s,t) \mapsto K(s,t)$ et $[a,b] \ni s \mapsto f(s)$ sont des fonctions à valeurs complexes continues sur leurs intervalles de définitions.

Sous l'hypothèse

$$\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 \, dsdt < 1 \tag{201}$$

l'équation (200) admet pour unique solution

$$\varphi(s) = f(s) + \int_a^b \Gamma(s,t) f(t)dt \tag{202}$$

avec

$$\Gamma(s,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} K^{(n)}(s,t) \tag{203}$$

et la récurrence suivante

$$\begin{aligned} K^{(1)}(s,t) &= K(s,t) \\ K^{(2)}(s,t) &= \int_a^b K(s,r)K(r,t)dr \\ &\vdots \\ K^{(n)}(s,t) &= \int_a^b K(s,r)K^{(n-1)}(r,t)dr. \end{aligned}$$

La série (203) est connue sous le nom de *série de Neumann* du noyau K (voir [**Yos60**, page 117]). Sa convergence est assurée par l'hypothèse (201).

Équation de Volterra de seconde espèce. — On appelle équation de Volterra de seconde espèce, l'équation intégrale suivante où φ est l'inconnue

$$f(s) = \varphi(s) - \int_a^s K(s,t)\varphi(t)dt \tag{204}$$

où $[a,b]^2 \ni (s,t) \mapsto K(s,t)$ et $[a,b] \ni s \mapsto f(s)$ sont des fonctions à valeurs complexes continues sur leurs intervalles de définitions.

Cette équation admet pour unique solution

$$\varphi(s) = f(s) + \int_a^s \Gamma(s,t)f(t)dt \tag{205}$$

avec

$$\Gamma(s,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} K^{(n)}(s,t) \tag{206}$$

et la récurrence suivante

$$\begin{aligned} K^{(1)}(s,t) &= K(s,t) \\ K^{(2)}(s,t) &= \int_t^s K(s,r)K(r,t)dr \\ &\vdots \\ K^{(n)}(s,t) &= \int_t^s K(s,r)K^{(n-1)}(r,t)dr. \end{aligned}$$

La convergence de la série (206) étant cette fois automatique (voir [**Yos60**, page 145]pour l'utilisation des bornes d'intégration pour la preuve de cette convergence).

Une autre écriture équivalente provient du développement $\varphi(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(s)$. En remplaçant dans (204) il vient

$$f(s) = \varphi_0(s) + \sum_{n=1}^{+\infty} (\varphi_n(s) - \int_a^s K(s,t)\varphi_{n-1}(t)dt)$$

avec

$$\varphi_0(s) = f(s)$$
$$\varphi_n(s) = \int_a^s K(s,t)\varphi_{n-1}(t)dt.$$

Remarque sur la résolution des équations intégrales de seconde espèce. — Les résultats suivants sont adaptés de [**Bon88**, §5.4.3 page 90].

Considérons l'équation intégrale de seconde espèce en l'inconnue $u(t)$ définie sur $[0,+\infty[$

$$u(t) + \int_0^t k(t-s)u(s)ds = f(t) \tag{207}$$

où k et f sont localement sommables.

L'équation précédente se réécrit en une équation de convolution

$$(\delta + Hk) * u = g.$$

La série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(Hk)^{*n}$ converge en norme L^1 sur chaque compact. Notons $Hl = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n(Hk)^{*n}$ cette limite. D'après le théorème sur la continuité (au sens des distributions) du produit de convolution (voir [**Bon88**, th. 4.4.9 p 78]) l'identité suivante a bien un sens

$$(\delta + Hk) * (\delta + Hl) = \delta$$

et définit l'inverse de convolution de $(\delta + Hk)$.

La solution de l'équation (207) est donc

$$u(t) = (\delta + Hl) * g.$$

On remarquera enfin que Hl n'est autre que la somme de la série de Neumann définie dans (203).

APPENDICE G

RÉSULTATS DE LA LITTÉRATURE SUR LES ÉQUATIONS DE BESSEL

Les détails de cette section sont issus de [**Dec68**].

L'équation de Bessel (1824) est

$$\ddot{y} + \frac{1}{x}\dot{y} + (1 - \frac{\nu^2}{x^2})y = 0$$

Les coefficients de y et $\dot{y}$ admettent 0 pour valeur singulière. Cette équation est de la forme $\ddot{y}+A(x)\dot{y}+B(x)y = 0$. On peut montrer que les seuls points singuliers possibles pour y sont les points singuliers de A et B. Dans notre cas 0 est un pôle simple de A et pôle double de B, ceci implique par le théorème de Fuchs qu'il existe une solution de la forme $y = x^r f(x)$ où f est analytique en 0, et r une constante à déterminer.

Résolution. — En choisissant $r^2 - \nu^2 = 0$, il vient avec $y = x^\nu z$

$$x\ddot{z} + (2\nu + 1)\dot{\nu} + xz = 0.$$

Avec le développement

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2^\nu \Gamma(1+\nu)} \\ a_1 &= 0 \\ a_{m-2} + m(2\nu + m)a_m &= 0. \end{aligned}$$

Il vient enfin

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{2^\nu p!\Gamma(1+\nu+p)2^{2p}}.$$

Le rayon de convergence est infini, la solution s'exprime

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!\Gamma(\nu+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p}$$

et pour n entier

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \left[\frac{1}{n!} - \frac{1}{1!(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \ldots + \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p} + \ldots\right].$$

Résultats importants. —

$$\frac{d}{dx}(x^\nu J_\nu(x)) = x^\nu J_{\nu-1}(x)$$
$$\frac{d}{dx}(x^{-\nu} J_\nu(x)) = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x).$$

Expression intégrale. — La première des deux formules est connue sous le nom de formule de Lommel.

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_0^\pi \cos(x\cos\theta)\sin^{2\nu}\theta d\theta$$
$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\theta - x\sin\theta)d\theta.$$

Approximation numérique. — On reporte ici pour mémoire les formules [**AS65**, 9.4.1 page 369] et [**AS65**, 9.4.3 page 369–370]

$$\begin{aligned}
&-3 \leq x \leq 3\\
J_0(x) =& 1 - 2.2499997(x/3)^2 + 1.2656208(x/3)^4\\
&- 0.3163866(x/3)^6 + 0.0444479(x/3)^8\\
&- 0.0039444(x/3)^{10} + 0.0002100(x/3)^{12} + \varepsilon\\
&\quad |\varepsilon| < 5\times 10^{-8}
\end{aligned}$$

$$3 \leq x < \infty J_0(x) = x^{-\frac{1}{2}} f_0 \cos\theta_0$$

$$\begin{aligned}
f_0 =& 0.79788456 - 0.00000077(3/x) - 0.00552740(3/x)^2\\
&- 0.00009512(3/x)^3 + 0.00137237(3/x)^4\\
&- 0.00072805(3/x)^5 + 0.00014476(3/x)^6 + \varepsilon\\
&\quad |\varepsilon| < 1.6\times 10^{-8}\\
\theta_0 =& x - 0.78539816 - 0.04166397(3/x)\\
&- 0.00003954(3/x)^2 + 0.00262573(3/x)^3\\
&- 0.00054125(3/x)^4 - 0.00029333(3/x)^5\\
&+ 0.00013558(3/x)^6 + \varepsilon\\
&\quad |\varepsilon| < 7\times 10^{-8}.
\end{aligned}$$

APPENDICE H

UN THÉORÈME DE PALEY-WIENER

Nous reportons ici un théorème de Paley-Wiener exactement tel qu'il est présenté dans [**Rud95**, page 356–357]

***Théorème H.1* (Paley-Wiener).** — *Soient A et C deux constantes positives, et soit f une fonction entière telle que, pour tout z,*

$$|f(z)| \leq Ce^{A|z|} \tag{208}$$

Supposons aussi que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx < \infty. \tag{209}$$

Il existe alors une fonction $F \in L^2(-A, A)$ telle que

$$f(z) = \int_{-A}^{A} F(t) e^{itz} dt. \tag{210}$$

Lorsque nous avons utilisé ce théorème c'est sous la forme équivalente suivante

***Théorème H.2* (Forme équivalente).** — *Soient A et C deux constantes positives, et soit f une fonction entière telle que, pour tout s,*

$$|f(s)| \leq Ce^{A|s|} \tag{211}$$

Supposons aussi que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(ix)|^2 \, dx < \infty. \tag{212}$$

Il existe alors une fonction $F \in L^2(-A, A)$ telle que

$$f(z) = \int_{-A}^{A} F(t) e^{-ts} dt. \tag{213}$$

Ce qui signifie que f possède un antécédent par la transformée de Laplace (original), à support compact, F.

APPENDICE I

TECHNIQUES DE RÉGLAGE DE LA LITTÉRATURE DES CONTRÔLEURS EN GÉNIE DES PROCÉDÉS

On trouve dans la littérature (voir par exemple [**BR96**] dont cette section est inspirée) des techniques de réglages intéressantes, simples à mettre en œuvre et effectivement souvent utilisées dans la pratique pour les régulations linéaires de bas niveau.

La méthode de Ziegler-Nichols pour les PID, à la différence de la méthode de Graham-Lathrop ne requiert pas la connaissance de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Soit $e(t)$ l'écart entre mesure et consigne dans le schéma de régulation de la figure 1.

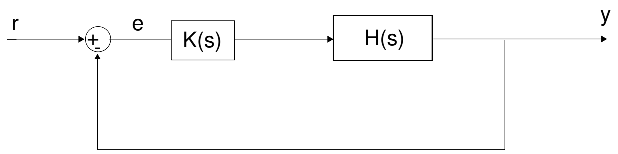

Figure 1 – Schéma de régulation.

La méthode de Ziegler-Nichols. — La méthode de réglage de Ziegler-Nichols correspond à la minimisation du critère IAE (integral of absolute error)

$$J = \int_0^{+\infty} |e(t)|\, dt. \tag{214}$$

On pourra comparer les réglages de Ziegler-Nichols (1941) et ceux de Cohen et Coon (1953) dans [**CCZ59**, page 232].

La méthode de Graham-Lathrop. — De la même manière que précédemment la méthode de Graham-Lathroppermet de minimiser le critère ITAE (integral of time and absolute error)

$$J = \int_0^{+\infty} t\,|e(t)|\,dt. \tag{215}$$

Selon l'ordre et le nombre d'intégrateur du transfert dans la chaîne d'action $K(s)H(s)$, le tableau de la figure 2 fournit le dénominateur en boucle fermée optimal. Il ne reste ensuite qu'à adapter les paramètres de $K(s)$ à cette condition.

Ordre de $K(s)H(s)$	Nombre d'intégrateurs dans $K(s)H(s)$	Dénominateur optimal en boucle fermée
1	1	$1 + s$
2	1	$1 + 1.4s + s^2$
	2	$1 + 3.2s + s^2$
3	1	$1 + 2.15s + 1.75s^2 + s^3$
	2	$1 + 3.25s + 1.75s^2 + s^3$
	3	$1 + 4.94s + 2.97s^2 + s^3$
4	1	$1 + 2.7s + 3.4s^2 + 2.1s^3 + s^4$
	2	$1 + 5.14s + 4.93s^2 + 2.41s^3 + s^4$
	3	$1 + 5.93s + 7.88s^2 + 3.71s^3 + s^4$

Figure 2 – Polynômes normalisés optimaux de Graham-Lathrop [**BR96**].

Les règles du pouce. — On trouve enfin dans [**FS96**, page 163] les "règles du pouce". Ces règles sont effectivement efficaces et c'est pourquoi nous les reproduisons ici. Suivant les applications on réglera le PID suivant d'après les règles du tableau de la figure 3

$$u = u_0 + K\left(e + \frac{1}{T_i}\int e dt + T_d\frac{de}{dt}\right).$$

Type de régulateur	Gain K	Intégral $\frac{1}{T_i}$ en $(min)^{-1}$	Dérivée T_d en (min)
Débit	0.4 - 0.65	0.1-0.25	Sans
Température	2-10	2-10	0.1-2
Pression, Gaz	20-50	Sans	Sans
Pression, Liquide	0.5-2.0	0.1-0.25	Sans
Pression, Vapeur	2-10	2-10	0.1-2
Niveau	2-20	1-5	Sans
Concentration	0.1-1.0	10-30	Suivant application

Figure 3 – "Règles du pouce" [**FS96**]

APPENDICE J

MÉTHODE DE SIMULATION DE L'ÉQUATION DES TÉLÉGRAPHISTES

Nous reportons ici, pour mémoire, un descriptif de la méthode de différences finies qui nous sert à simuler l'équation des télégraphistes du chapitre 9.

Équations des cellules. — À chaque cellule i de longueur δx correspond une tension e_i et une intensité i_i. La tension aux bornes de première cellule est la commande. La condition limite porte sur la dernière cellule.

$$\left\{\begin{aligned}
e1(t) &= u(t)\\
\frac{di_1}{dt} &= -\frac{R}{L}i_1 - \frac{e_2 - e_1}{L\delta x}\\
\frac{de_2(t)}{dt} &= -\frac{G}{C}e_2 - \frac{i_2 - i_1}{C\delta x}\\
\frac{di_2}{dt} &= -\frac{R}{L}i_2 - \frac{e_3 - e_2}{L\delta x}\\
&\vdots\\
\frac{de_N(t)}{dt} &= -\frac{G}{C}e_N - \frac{i_N - i_{N-1}}{C\delta x}\\
\frac{di_N}{dt} &= -\frac{R}{L}i_N - \frac{e_{N+1} - e_N}{L\delta x}\\
\frac{de_{N+1}(t)}{dt} &= -\frac{G}{C}e_{N+1} - \frac{i_{N+1} - i_N}{C\delta x}\\
\frac{di_{N+1}}{dt} &= -\frac{R}{L}i_{N+1} - \frac{Zi_{N+1} - e_{N+1}}{L\delta x}
\end{aligned}\right. \tag{216}$$

Écriture matricielle. — $dx = \delta x$ En conséquence, on peut écrire le système sous la forme d'état $\dot{X} = AX + BU$ avec

$$X = \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_{N+1} \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{N+1} \end{pmatrix}$$

$$u = e_1$$

$A =$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|ccccccc}
\frac{-R}{L} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \frac{-1}{L\delta x} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & \frac{-R}{L} & 0 & & & & \vdots & 0 & \frac{1}{L\delta x} & \frac{-1}{L\delta x} & 0 & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & & & \\
\vdots & & & \ddots & \frac{-R}{L} & \ddots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \frac{1}{L\delta x} & \frac{-1}{L\delta x} & 0 \\
\vdots & & & & 0 & \frac{-R}{L} & 0 & \vdots & & & & \ddots & \frac{1}{L\delta x} & \frac{-1}{L\delta x} \\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -(\frac{R}{L} + \frac{Z}{L\delta x}) & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{L\delta x} \\
\frac{1}{C\delta x} & \frac{-1}{C\delta x} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{-G}{C} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & & & \\
\vdots & & & \ddots & \frac{1}{C\delta x} & \frac{-1}{C\delta x} & 0 & \vdots & & & & \ddots & -\frac{G}{C} & 0 \\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{C\delta x} & \frac{-1}{C\delta x} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{-G}{C}
\end{array}\right),$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{L\delta x} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

où A est une matrice $(2N+1) \times (2N+1)$ dans laquelle R apparaît jusqu'à la colonne $N+1$ et la ligne $N+1$, et B est un vecteur colonne de dimension $(2N+1)$.

BIBLIOGRAPHIE

[Ang57] A. Angot – *Compléments de mathématiques*, 3ème éd., Éditions de la revue d'optique, 1957.

[AS65] M. Abramowitz & I. A. Stegun (éds.) – *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications inc., 1965.

[BF86] J. Boussinesq & A. Flamant – « Notice sur la vie et les travaux de M. de Saint-Venant », *Annales des ponts et chaussées* **12** (1886), p. 557–595.

[Bon88] J.-M. Bony – *Analyse*, École Polytechnique, 1988.

[Bou92] F. Boustany – « Commande non linéaire adaptative de systèmes mécaniques de type pont roulant, stabilisation frontière d'EDP », Thèse, École des Mines de Paris, 1992.

[BPDM93] A. Bensoussan, G. D. Prato, M. Delfour & S. Mitter – *Representation and control of infinite dimensional systems*, vol. 1 & 2, Birkhäuser, 1992 & 1993.

[BR96] P. Borne & F. Rotella – *Techniques de l'ingénieur*, vol. S2, Technip, 1996.

[Buc64] P. S. Buckley – *Techniques of process control*, John Wiley & Sons, Inc., 1964.

[CCZ59] W. I. Caldwell, G. A. Coon & L. M. Zoss – *Frequency response for process control*, McGraw-Hill, 1959.

[CH62] R. Courant & D. Hilbert – *Methods of mathematical physics*, vol. 2, Interscience, 1962.

[CM90] A. Chorin & J. Marsden – *A mathematical introduction to fluid mechanics*, Springer-Verlag, 1990.

[Col76] S. Colombo – *Les équations aux dérivées partielles en physique et en mécanique des milieux continus*, Masson, 1976.

[Cre00a] Y. Creff – *Fonctionnement du cœur d'ANAMEL version 4.0*, Rapport confidentiel ELF, 2000.

[Cre00b] ______, *Manuel d'exploitation de la conduite avancée du polystyrène de carling*, Rapport confidentiel ELF, 2000.

[CZ95] R. F. Curtain & H. Zwart – *An introduction to infinite-dimensional linear systems theory*, Springer, New-York, 1995.

[Dec68] M. Decuyper – *Modèles mathématiques de la physique*, Dunod U, 1968.

[DL85] R. Dautray & J.-L. Lions – *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, vol. 3, Masson, 1985.

[dNC94] B. d'Andrea-Novel & M. Cohen de Lara – *Commande linéaire des systèmes dynamiques*, Masson, 1994.

[DP67] V. Ditkin & A. P. Prudnikov – *Formulaire pour le calcul opérationnel*, Masson et Cie., 1967.

[DP78] ______, *Transformations intégrales et calcul opérationnel*, Éditions Mir Moscou, 1978.

[DPR99] F. Dubois, N. Petit & P. Rouchon – « Motion planning and nonlinear simulations for a tank containing a fluid », *Proc. of the* 5*th European Control Conf.*, 1999.

[Dre31] R. Dreyfus – *La téléphonie*, Librairie Armand Colin, 1931.

[EHS93] B. Elvers, S. Hawkins & G. Schulz (éds.) – *Ullmann's encyclopedia of industrial chemistry*, VCH, 1993.

[Eis95] D. Eisenbud – *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Graduate texts in mathematics, no. 150, Springer-Verlag, 1995.

[Féd87] M. Fédoriouk – *Méthodes asymptotiques pour les équations différentielles ordinaires linéaires*, Éditions Mir Moscou, 1987.

[Fli92] M. Fliess – « A remark on Willems' trajectory characterization of linear controllability », *Systems Control Letters* **19** (1992), p. 43–45.

[FLMR92] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin & P. Rouchon – « Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats », *C.R. Acad. Sci. Paris* **I–315** (1992), p. 619–624.

[FLMR95] ______, « Flatness and defect of nonlinear systems : introductory theory and examples », *Int. J. Control* **61** (1995), no. 6, p. 1327–1361.

[FLMR99] ______, « A Lie-Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems », *IEEE Trans. Automat. Control* **44** (1999), p. 922–937.

[FM94] M. Fliess & H. Mounier – « Quelques propriétés structurelles des systèmes linéaires à retards constants », *C.R. Acad. Sci. Paris* **I-319** (1994), p. 289–294.

[FM95] ______, « Interpretation and comparison of various types of delay system controllabilities », *IFAC Conf. System Struct. Control, Nantes*, 1995, p. 165–170.

[FM98] M. Fliess & H. Mounier – « Controllability and observability of linear delay systems : an algebraic approach », *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations* **3** (1998), p. 301–314.

[FMPR99a] M. Fliess, P. Martin, N. Petit & P. Rouchon – « Active signal restoration for the telegraph equation », *Proc. of the 38th IEEE Conf. on Decision and Control*, 1999.

[FMPR99b] ———, « Commande de l'équation des télégraphistes et restauration active d'un signal », *Colloque Bernard Picinbono*, 1999.

[FS96] P. G. Friedmann & T. P. Stoltenberg (éds.) – *Practical guide for measurement and control*, ISA, 1996.

[Ger62] P. Germain – *Mécanique des milieux continus*, Masson, 1962.

[Gou94] X. Gourdon – *Les maths en tête, Mathématiques pour M', analyse*, Ellipses, Paris, 1994.

[HC47] P. Humbert & S. Colombo – « Le calcul symbolique et ses applications à la physique mathématique », Mémorial des sciences mathématiques, Gauthier-Villars, Paris, 1947.

[HZ95] S. Hansen & E. Zuazua – « Exact controllability and stabilization of a vibrating string with an interior point mass », *SIAM J. Control & Opt.* **33** (1995), p. 1357–1391.

[Jan54] M. Janet – *Précis de calcul matriciel et de calcul opérationnel*, Presses universitaires de France, 1954.

[Kha92] H. Khalil – *Nonlinear systems*, MacMillan, 1992.

[Lio68] J.-L. Lions – *Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod, Paris, 1968.

[Lio88a] ———, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués*, Masson, Paris, 1988.

[Lio88b] ———, « Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems », *SIAM Rev.* **30** (1988), p. 1–68.

[LL86] L. Landau & E. Lifchitz – *Mécanique des fluides*, second éd., Mir Moscow, 1986.

[MB87] J. Mikusiński & T. Boehme – *Operational calculus*, vol. 2, PWN, Varsovie & Oxford University Press, Oxford, 1987.

[Mik59] J. Mikusiński – *Operational calculus*, translated from the second polish edition, vol 30 of monografie matematyczne, 1957 éd., Pergamon Press, 1959.

[Mik83] ———, *Operational calculus*, vol. 1, PWN, Varsovie & Oxford University Press, Oxford, 1983.

[MLH50] N. W. Mac Lachlan & P. Humbert – *Formulaire pour le calcul symbolique*, deuxième éd., Gauthier-Villars, Paris, 1950.

[MM91] K. B. McAuley & J. F. MacGregor – « On-line inference of polymer properties in an industrial polyethylene reactor », *AIChE Journal* **37, 6** (1991), p. 825–835.

[Mou95] H. Mounier – « Propriétés structurelles des systèmes linéaires à retards : aspects théoriques et pratiques », Thèse, Université Paris Sud, Orsay, 1995.

[MP99] P. M. Mäkilä & J. R. Partington – « Shift operator induced approximations of delay systems », *SIAM J. Control & Opt.* **37** (1999), p. 1897–1912.

[MRFR98] H. Mounier, J. Rudolph, M. Fliess & P. Rouchon – « Tracking control of a vibrating string with an interior mass viewed as delay system », *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations* **3** (1998), p. 315–321.

[Mur96] R. M. Murray – « Trajectory generation for a towed cable flight control system », *Proc. IFAC World Congress* (San Francisco), 1996, p. 395–400.

[Oll28] H. Ollivier – *Cours de physique générale*, 2ème éd., vol. 3, Librairie scientifique Hermann & Cie, 1928.

[PCR97] N. Petit, Y. Creff & P. Rouchon – « δ-freeness of a class of linear delayed systems », *Proc. of the 4th European Control Conf.*, 1997.

[PCR98] ______, « Motion planning for two classes of nonlinear systems with delays depending on the control », *Proc. of the 37th IEEE Conf. on Decision and Control*, 1998.

[PCR99] ______, « Minimum time constrained control of acid strength on a sulfuric acid alkylation unit », submited *to Chemical Engineering Science* (1999).

[Pet96] N. Petit – *Systèmes δ-libres sous contraintes*, Rapport de stage de DEA, Université d'Orsay, 1996.

[PR00] N. Petit & P. Rouchon – « Motion planning for heavy chain systems », *5th Int. Conf. on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation*, 2000.

[PRB+00] N. Petit, P. Rouchon, J.-M. Boueilh, F. Guérin & P. Pinvidic – « Control of an industrial polymerization reactor using flatness », *Proc. of the International Symposium Mathematical Theory of Systems, Control, Network 2000*, 2000.

[PRed] N. Petit & P. Rouchon – « Motion planning for heavy chain systems », *SIAM J. Control & Opt.* (2000, submitted).

[Ric93] J. Richalet – *Pratique de la commande prédictive*, Hermès, 1993.

[Rob98] M. Roberson – « APPRYL investments worth 1 billion french francs », *Hydrocarbon Processing* **77** (1998), no. 6.

[Roc71] Y. Rocard – *Dynamique générale des vibrations*, quatrième éd., Masson, 1971.

[Rud74] W. Rudin – *Real and complex analysis*, 2nd éd., McGraw-Hill, New York, St Louis, Paris, 1974.

[Rud95] ______, *Analyse réelle et complexe*, Masson, Paris, Milan, Barcelone, 1995.

[RW97] P. Rocha & J. C. Willems – « Behavioral controllability of delay-differential systems », *SIAM J. Control & Opt.* **35** (1997), p. 254–264.

[Sch73] L. Schwartz – *Théorie des distributions*, Hermann, 1973.

[Ste84] G. Stephanopoulos – *Chemical process control : an introduction to theory and practice*, Prentice Hall, 1984.

[van97] M. J. van Nieuwstadt – « Trajectory generation for nonlinear control systems », Thèse, California Institute of Technology, 1997.

[Wat58] G. N. Watson – *A treatise on the theory of Bessel functions*, 2nd éd., Cambridge University Press, 1958.

[Wil91] J. C. Willems – « Paradigms and puzzles in the theory of dynamical systems », *IEEE Trans. Automat. Control* **36** (1991), p. 259–294.

[Yos60] K. Yosida – *Lectures on differential and integral equations*, Interscience Publishers, New York, 1960.

[Yos84] ———, *Operational calculus*, Springer, New-York, 1984.