MAP-AUT1 Principes fondamentaux de l'Automatique
Examen. Durée 3h
Tous documents autorisés.

ENSTA ParisTech *vendredi 20 janvier 2017*

Les 4 exercices sont indépendants. Le barème comporte 50 points.

Exercice 1 Contrôle autour d'un point d'équilibre [10 points]

On considère le système suivant

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 \\ \ddot{x}_2 &= -x_2^3 + (\dot{x}_2)^2 + u\end{aligned}$$

1. Combien d'états le système comporte-il ?
2. Quel est le point d'équilibre correspondant à $u = 1$?
3. Linéariser le système autour de ce point d'équilibre.
4. Le système linéarisé tangent est-il commandable ?
5. Donner une sortie de Brunovsky
6. Proposer un retour d'état stabilisant.

Exercice 2 Théorie de Richardson sur la course aux armements [22 points]

Des travaux ont été réalisés pour modéliser les interactions entre les nations dans les politiques d'équipement militaire. On présente souvent les armements comme des garanties contre les conflits, arguant qu'un pays sans défense constitue une "invitation" à la guerre. Les travaux de L. F. Richardson ont proposé une modélisation et une analyse mathématique de ces questions sous la forme de système dynamique modélisant la course aux armements.

On considère le système suivant de 2 équations linéaires couplées, représentant les interactions entre 2 nations. Les états x et y désignent les niveaux d'armement des nations.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= ky(t) - \alpha x(t) + g \\ \dot{y}(t) &= \ell x(t) - \beta y(t) + h\end{aligned}$$

Les paramètres (strictement) positifs g et h sont appelés "adversités". Ils représentent chacun un ensemble de facteurs psychologiques (instinct de revanche, mécontentement général) indépendants des comportements des nations. Les paramètres k et ℓ sont des paramètres positifs appelés "réflexes de défense". Les paramètres positifs α et β sont appelés "facteur d'usure".

1. Mettre le système sous forme d'état. Préciser la matrice A.
2. On dit qu'une matrice $n \times n$ à coefficients réels est une matrice de Metzler si tous ses termes non diagonaux sont positifs. Montrer que A est une matrice de Metzler.
3. Calculer les points d'équilibre x_{eq}, y_{eq} du système. A quelle condition ces points d'équilibre sont-ils bien définis et positifs ?
4. Interpréter ce résultat.
5. Un théorème classique est :
   Théorème — *Soit M une matrice de Metzler, et b un vecteur ayant toutes ses coordonnées strictement positives. Il existe une solution x ayant toutes ses coordonnées positives à l'équation*
   $$Mx + b = 0$$
   si et seulement si M à toutes ses valeurs propres à partie réelle strictement négative.
   Former le polynôme caractéristique de A. D'après ce théorème, retrouver la condition obtenue à la question précédente.

6. On généralise le modèle au cas de n nations. A chaque nation $i = 1, ..., n$ on fait correspondre une équation
$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} k_{ij} x_j(t) + g_i$$
avec $k_{ij} \geq 0$ pour $i \neq j$ et $k_{ii} \triangleq -\alpha_i < 0$. Les paramètres g_i sont strictement positifs. Mettre le système sous forme d'état, préciser l'équation caractérisant les points d'équilibre et dire à quelle(s) condition(s) le point d'équilibre est unique et à coordonnées strictement positives.
7. Le système dynamique
$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} k_{ij} x_j(t)$$
est initialisé en un vecteur quelconque, à coordonnées strictement positives. On se demande si les coordonnées du vecteur d'état peuvent devenir négatives. En considérant t_0 le premier instant où une des coordonnées devient nulle, montrer que les coordonnées du vecteur d'état ne peuvent pas devenir négatives.
8. Montrer que si M est une matrice de Metzler alors la matrice $P = M + cI$ où I est l'identité n'a que des coefficients positifs, pour $c > 0$ à préciser.
9. Un second théorème classique est

   Théorème de Perron-Frobenius — *Soit M une matrice à coefficients strictement positifs. Le rayon spectral $\rho(M) = \max_{i=1,...,n} |\lambda_i(M)|$ est une valeur propre simple de M, et le sous-espace propre associé est une droite vectorielle engendrée par un vecteur à coordonnées strictement positives.*

   Montrer, en utilisant la matrice P, qu'une matrice de Metzler M possède une valeur propre réelle $\lambda_0 - c$ correspondant à un vecteur propre x_0 à coefficients positifs.
10. Montrer que $\mu_0 \triangleq (\lambda_0 - c)$ est la plus grande valeur propre de M.
11. Dans le modèle à n nations, on peut montrer l'existence de coalitions. Pour cela, on va étudier la plus petite valeur propre μ_n de la matrice d'état, désignée A. En étudiant sa trace, montrer que $\mu_n < 0$.
12. On note f un vecteur propre à gauche de A pour la valeur propre μ_n, c.-à-d. $f^T A = \mu_n f^T$. On note $z = f^T x$. Montrer qu'avec les notations du cas à n nations, on a
$$\dot{z}(t) = \mu_n z(t) + f^T g$$
13. Déterminer le comportement asymptotique de $z(t)$. En déduire que z peut être considéré comme constant en première approximation.
14. Montrer que f est nécessairement orthogonal aux vecteurs propres associés à la plus grande valeur propre de A.
15. Réécrire la propriété précédente sous la forme
$$f^T x_0 = 0$$
En déduire que f ne peut pas avoir toutes ses composantes de même signe.
16. Les composantes de f se répartissent en 2 ensembles (composantes positives, composantes négatives), définissant 2 coalitions de nations. On note f_+,f_- deux vecteurs (de même taille que f) n'ayant que des composantes positives les composantes ainsi regroupées de telle sorte que
$$f = f_+ - f_-$$
Montrer que le système à n nations initialisé en temps $t = 0$ à une valeur positive quelconque satistait
$$f_+^T x(t) - f_-^T x(t) \approx -\frac{f^T g}{\mu_n}$$
pour tout temps $t > 0$.

   Note — Ce dernier résultat s'interprète comme suit. Indépendamment de la stabilité de la course aux armements, le long des trajectoires, les niveaux d'armement des 2 coalitions évoluent de telle sorte que les différences des deux groupes (pondérées par les composantes de f) restent constante. La théorie complète est exposée dans L. F. Richardson, Arms and Insecurity, Boxwood Press, Pittsburght Quadrange Book, Chicago 1960, ouvrage contenant des études sur 211 conflits sur la période 1820-1952. Des données pour l'année 1935 et les développements menant à cet exercice sont exposés dans D. G. Luenberger, Introduction to dynamic systems, John Wiley & Sons, 1979.

Exercice 3 Régulateur de référence [10 points]

On considère un système sous forme d'état

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) \tag{1}$$

avec $\dim x = n$, $\dim u = m$, $\dim y = 1$. On considère un signal de référence contant par morceaux $r(t)$, $\dim r = 1$. Pour asservir la sortie du système à la référence, on utilise un contrôleur

$$\dot{z}(t) = Qz(t) + Hy(t) \tag{2}$$
$$u(t) = Kz(t) + Nr + My(t) \tag{3}$$

1. Quelles sont les dimensions des matrices A, B, C ?
2. Quelles sont les dimensions des matrices Q, H, K, M, N ?
3. Combien d'état le système (1)-(2)-(3) comporte-il ?
4. Faire un schéma blocs des équations (1) couplées avec les équations (2) et (3). Préciser quelle est l'entrée et quelle est la sortie.
5. On suppose désormais que le système (1) est commandable et observable. Rappeler des conditions équivalentes sur les matrices A, B et C.
6. En utilisant un observateur-contrôleur, proposer des matrices Q, H, K, N, M permettant de stabiliser le système bouclé autour de $x = 0$ pour $r = 0$.
7. Quel est le régime atteint par $y(t)$ si on applique votre contrôleur et que $r \neq 0$. En déduire une valeur judicieuse pour N pour que y suive asymptotiquement le signal r.

Exercice 4 Observabilité d'un système inter-connecté [8 points]

On considère un système partageant son entrée et sa sortie suivant les équations suivantes

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u, \qquad y = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} x \tag{4}$$

où les dimension de A_1 et A_2, B_1 et B_2, C_1 et C_2 sont les mêmes. On demande (en justifiant rapidement) de qualifier de VRAI ou FAUX les assertion suivantes

1. Si (A_1, C_1) est observable alors (A_2, C_2) l'est.
2. L'observabilité du système (4) dépend d'une condition portant sur (B_1, B_2).
3. Dans le cas $A_1 = A_2$ et $C_1 = C_2$ le système n'est pas observable.
4. La situation change pour le système

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u, \qquad y = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \end{pmatrix} x$$

5. Le système suivant est observable sous l'hypothèse que (A_1, C_1) l'est

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} A_1 & I \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u, \qquad y = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \end{pmatrix} x$$