MAP-AUT1 Principes fondamentaux de l'Automatique
Examen. Durée 3h
Tous documents autorisés.

ENSTA ParisTech — *vendredi 23 janvier 2016*

Les exercices sont indépendants. Le barème comporte 44 points.

Exercice 1 Traction d'iceberg [22 points]

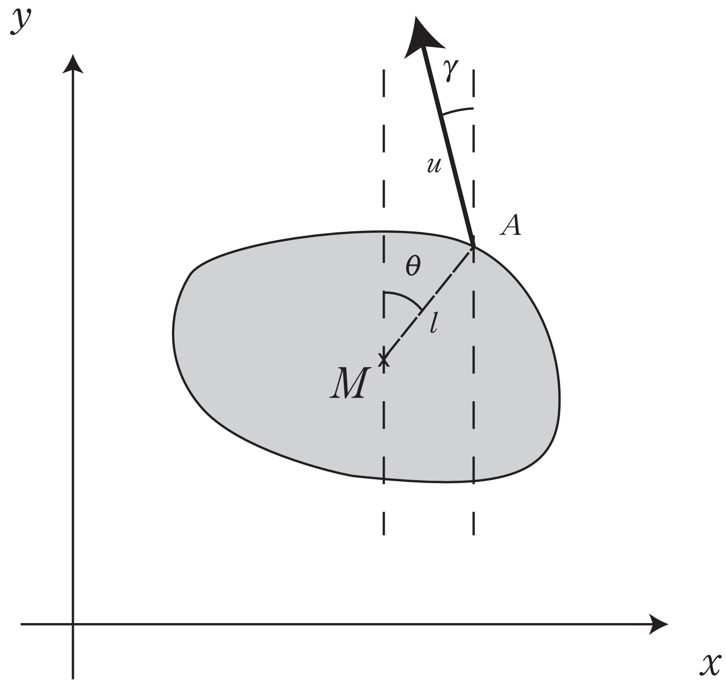


Figure 1 – Iceberg tracté. Notations

Les risques de rencontre d'iceberg sur les routes maritimes augmentent de manière considérable avec les perspectives de réchauffement climatique. Pour cette raison, on étudie aujourd'hui des technologies permettant de dévier un iceberg s'il se situe dans une zone à risque.

De manière simplifiée, on modélise un iceberg comme un corps rigide dans un plan repéré par les positions (x, y) de son centre de masse M dans un référentiel Galiléen. On désigne par u la norme d'un vecteur force appliqué en un point particulier de l'iceberg. On note θ l'angle de rotation de ce point d'application A par rapport à l'axe y du repère Galiléen. La force est orientée avec un angle γ par rapport à ce même axe. En résumé, les notations sont représentées sur le schéma de la Figure 1.

Les équations du mouvement sont, en tenant compte des forces de frottement de l'eau sur le corps rigide, et du bras de levier $\ell > 0$, à masse et inertie normalisées,

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}x &= -k\frac{d}{dt}x + u\sin\gamma \\ \frac{d^2}{dt^2}y &= -k\frac{d}{dt}y + u\cos\gamma \\ \frac{d^2}{dt^2}\theta &= -u\ell\sin(\theta+\gamma) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Les variables γ et u sont libres, ce sont 2 commandes.

1. Combien le système comporte-il d'états ?
2. On souhaite effectuer des manœuvres sans déport latéral, c.-à-d. $x(t) = 0$ pour tout t. Que cela impose-il sur les commandes ?
3. On souhaite se déplacer à $x(t) = 0$, $\frac{d}{dt}y(t) = 1$, quelles sont les commandes correspondantes ?
4. Si on impose les conditions précédentes, écrire la dynamique de θ.
5. Sous les conditions précédentes, avec $u \neq 0$, quels sont les points d'équilibre de la dynamique de θ ?
6. Linéariser l'équation de la dynamique sous l'hypothèse que $\theta << 1$.
7. Mettre cette équation sous forme d'état $\frac{d}{dt}X = AX$. Préciser X et A.
8. Le point d'équilibre est-il stable ? Préciser suivant $u > 0$,$u < 0$, $u = 0$. En déduire s'il est plus facile de tracter ou de pousser l'iceberg.
9. On décide d'appliquer, quelle que soit la condition initiale de la dynamique (1), la loi de commande

$$u(t) = 1, \gamma(t) = 0, \forall t \geq 0$$

   Quel est le comportement asymptotique de la solution de (1) pour une condition initiale proche de $\frac{d}{dt}x(0) = 0$, $\frac{d}{dt}y(0) = 0$, $\frac{d}{dt}\theta(0) = 0$?
10. L'iceberg est en fait un corps relativement fragile. Les oscillations de la variable θ risquent de l'endommager si elles durent trop longtemps, et l'iceberg peut alors de séparer en 2 corps rigides ce qui est encore plus problématique pour la sécurité des navires environnant. On propose une loi de feedback pour résoudre ce problème :

$$u(t) = 1, \gamma(t) = -k_1 \frac{d}{dt}\theta(t), \forall t \geq 0$$

    avec $k_1 > 0$. Montrer que cette loi stabilise (localement) la variable θ.
11. Que peut-on en déduire sur le comportement asymptotique de $\frac{d}{dt}x$? et sur celui de x ?
12. On souhaite trouver une loi de commande permettant de stabiliser à la fois x et θ en les asservissant vers 0. On considère la trajectoire de référence définie par

$$x^{eq} = 0, \theta^{eq} = 0, y^{eq}(t) = t/k, \gamma^{eq} = 0, u^{eq} = 1$$

    On note $x = x^{eq} + \Delta x$, $y = y^{eq} + \Delta y$, $\theta = \theta^{eq} + \Delta\theta$. Donner les équations du système linéarisé tangent.
13. On considère d'abord la dynamique de Δy. Est-elle commandable ? Proposer un bouclage stabilisant la trajectoire de référence.
14. Proposer une forme de Brunovsky du système. Combien d'états la commande $\Delta\gamma$ doit elle asservir ?
15. Montrer que la trajectoire de référence est stabilisable par une loi de commande du type

$$u(t) = 1 - k_4(y(t) - y^{eq}), \gamma(t) = -k_1 \frac{d}{dt}\theta(t) - k_2 x(t) - k_3 \frac{d}{dt}x(t), \forall t \geq 0$$

16. On se place désormais du point de vue du bateau devant assurer la traction. Expliquer comment les manœuvres doivent être éxécutées pour assurer l'asservissement précédent ?

$\boxed{\text{Exercice 2}}$ Equation de la chaleur [12 points]

On s'intéresse à un système à paramètres distribués défini par l'équation aux dérivées partielles suivante

$$\left.\begin{aligned} w_t &= w_{xx} \\ w(0,t) &= 0 \\ w(1,t) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

où $w(x,t)$ désigne l'état du système au point $x \in [0,1]$ au temps t, w_t désigne la dérivée partielle par rapport à t, et w_{xx} la dérivée partielle seconde par rapport à x. Cette équation dite de diffusion représente par exemple l'équation de la chaleur d'une tige conductrice de longueur normalisée avec conditions limites de température nulle.

On souhaite démontrer que l'état de ce système converge asymptotiquement vers 0 lorsque $t \to +\infty$. Pour celà on définit une fonction, dite (fonctionnelle) de Lyapounov,

$$V(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 w^2(x,t)dx$$

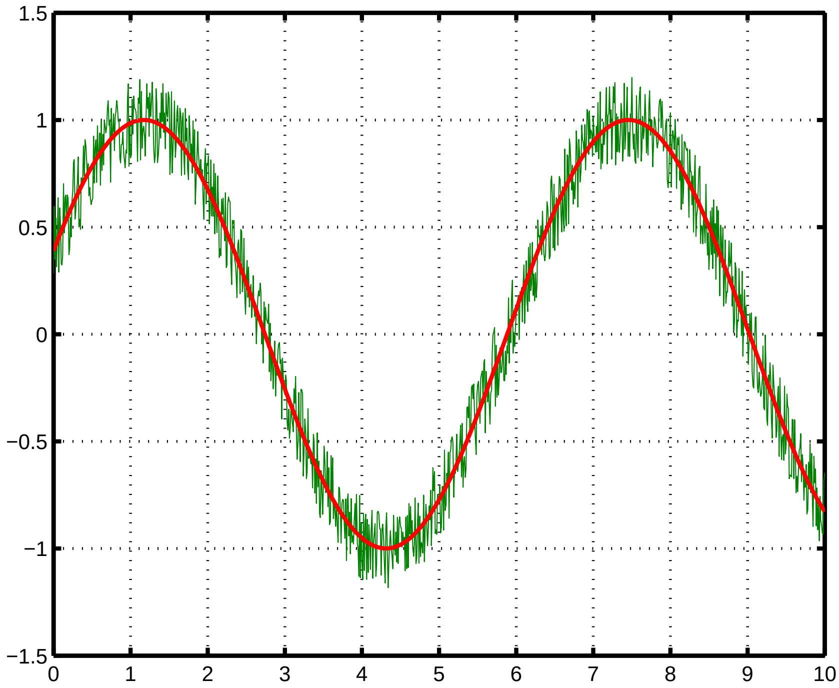
1. Montrer, par une intégration par partie, en utilisant (2), que
$$\frac{d}{dt}V(t) = -\int_0^1 w_x^2(x,t)dx$$
2. Déduire de ce qui précède que $V(t)$ converge vers une limite ℓ lorsque $t \to +\infty$.
3. Un résultat classique (inégalité de Poincaré) stipule que pour toute fonction f continûment différentiable sur $[0,1]$, on a
$$\int_0^1 (f(\tau) - f(0))^2 d\tau \leq \frac{4}{\pi^2}\int_0^1 (f'(\tau))^2 d\tau$$
En déduire que
$$\int_0^1 w^2(x,t)dx \leq \frac{4}{\pi^2}\int_0^1 w_x^2(x,t)dx$$
4. En déduire que
$$\frac{d}{dt}V \leq -V$$
5. On sait (lemme de Grönwall) que la solution d'une inéquation différentielle scalaire du type
$$\dot{x}(t) \leq k(t)x(t)$$
est bornée par la solution de l'équation différentielle
$$\dot{u}(t) = k(t)u(t)$$
si bien que
$$x(t) \leq x(0)\exp\left(\int_0^t k(\tau)d\tau\right)$$
En déduire que
$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^1 w^2(x,t)dx = 0$$
ce qui est la convergence exponentielle de la norme L_2 de w.
6. Reprendre la même étude pour l'équation dite d'advection-diffusion
$$\left.\begin{aligned} & w_t = w_{xx} + w_x \\ & w_x(0,t) = 0 \\ & w(1,t) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Exercice 3 Lissage d'un signal [10 points]

Un récepteur radiofréquence est utilisé pour recevoir un signal $\theta(t)$. Les mesures sont bruitées si bien que les mesures sont définies comme

$$m(t) = \theta(t) + n(t)$$

où n désigne un bruit inconnu. On souhaite réaliser un lissage du signal reçu pour atténuer l'effet du bruit. Pour cela on dispose d'une connaissance a priori : on sait que le signal θ est T-périodique, où $T > 0$ est un paramètre connu.



1. Montrer que θ satisfait une équation du type

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta = -p\theta$$

   où on précisera p.
2. Mettre l'équation précédente sous forme d'état.
3. Par la mesure $y(t) = \theta(t)$, le système précédent est-il observable ?
4. Proposer un observateur.
5. Déduire de ce qui précède que l'observateur utilisé avec les mesures $m(t)$ fournit une estimation de θ. Faire un schéma précisant où interviennent les mesures et l'estimation.
6. Quel est l'impact des conditions initiales de l'observateur ?
7. Comment faut il régler les gains de l'observateur pour obtenir de bonnes performances de filtrage ? On pourra supposer que le bruit $n(t)$ contient des signaux périodiques de fréquences élevées.