

# Examen d'Automatique: Le tube de Rijke

ENSTA – 2019

On s'intéresse à un tube de Rijke de longueur  $L$ , schématiquement représenté en Figure 1. Une résistance chauffante  $y$  est placée à un quart de sa hauteur. Le couplage entre la dynamique du dégagement de chaleur au niveau de la résistance et la dynamique de l'air génère des instabilités, dites *thermo-acoustiques*. Ce phénomène, lorsqu'il se produit dans des systèmes industriels tels que les turbines d'avion, est hautement problématique : il entraîne des vibrations qui peuvent endommager la turbine, et les variations de pression peuvent aller jusqu'à souffler la flamme dans la chambre de combustion. On installe

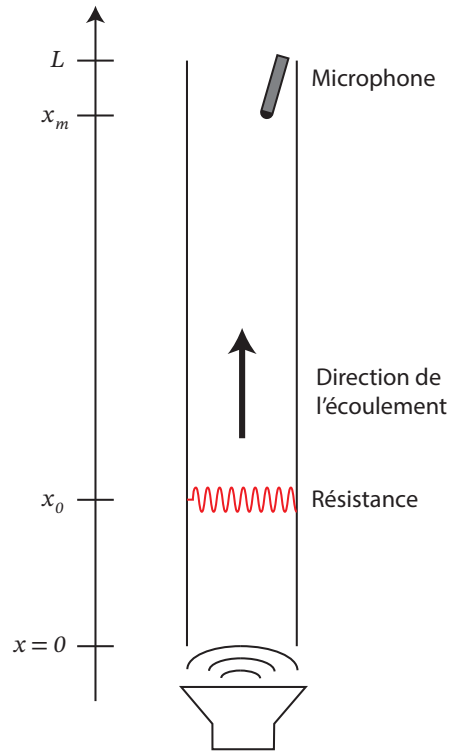


FIGURE 1 – Tube de Rijke – vision schématique

un capteur de pression (un microphone) à une hauteur  $x_m = 9L/10$ , et un haut-parleur situé sous le tube permet d'imposer une condition de pression en  $x = 0$ . Le but de cette étude est de mettre au point des méthodes de commande permettant de stabiliser le système. Les paramètres sont listés dans la Table 1.

## 1 Modélisation

Les équations simplifiées régissant la dynamique de l'air dans le tube sont données par

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{c^2}{\gamma \bar{P}} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \gamma \bar{P} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\gamma - 1}{A} W \delta(x - x_0) \quad (2)$$

où  $v$  et  $P$  représentent l'écart entre la vitesse (resp. la pression) et une vitesse (resp. une pression) de référence  $\bar{v}$  (resp.  $\bar{P}$ ). Les paramètres  $\gamma$  et  $c^2$  sont respectivement la constante adiabatique de l'air et la vitesse du son dans l'air. La variable  $W$  représente le flux d'énergie correspondant au dégagement de chaleur au niveau de la résistance, située en  $x = x_0$ , qui satisfait l'équation suivante

$$\dot{W}(t) = \frac{W_K(t) - W(t)}{t_h}, \quad W_K(t) = K_v \left( \sqrt{|\bar{v} + v(x_0, t)|} - \sqrt{\bar{v}} \right) \quad (3)$$

Ces équations sont complétées par les conditions frontières suivantes

$$P(0, t) = -Zv(0, t) + U(t) \quad (4)$$

$$P(L, t) = Zv(L, t) \quad (5)$$

où  $U$  est la variable de commande et  $Z$  l'impédance acoustique du tube.

1. On définit pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$v_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L v(x, t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx, \quad P_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L P(x, t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad (6)$$

En supposant que  $v$  s'écrit  $v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ , montrer qu'on a alors

$$\dot{v}_n(t) = \frac{4}{L} \frac{c^2}{\gamma \bar{P}} (-1)^n Z \sum_{k=1}^{+\infty} v_{2k-1}(t) - \frac{c^2}{\gamma \bar{P}} \frac{n\pi}{L} P_n(t) + \frac{2}{L} \frac{c^2}{\gamma \bar{P}} U(t) \quad (7)$$

$$\dot{P}_n(t) = \frac{n\pi}{L} \gamma \bar{P} v_n(t) + \frac{2(\gamma - 1) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right)}{LA} W(t) \quad (8)$$

*Bonus : chercher les modes propres exacts.*

2. En tronquant la somme à l'ordre  $N$ , on obtient donc un modèle dynamique dont les états sont  $(v_1, \dots, v_N, P_1, \dots, P_N, W)$ . Ecrire le modèle à l'ordre 1, et effectuer le changement de variables suivant

$$x_1(\tau) = \frac{v_1(t)}{\bar{v}}, \quad x_2(\tau) = \frac{P_1(t)}{\bar{P}}, \quad x_3(\tau) = \frac{ct_h}{LK_v \sqrt{\bar{v}}} W(t), \quad u(\tau) = \frac{2c}{\gamma \bar{P} \bar{v}} U(t), \quad \tau = \frac{c}{L} t, \quad (9)$$

$$\nu = \frac{\gamma \bar{v}}{c}, \quad \tau_1 = \frac{\gamma \bar{P}}{4cZ}, \quad \tau_3 = \frac{ct_h}{L}, \quad a = \frac{2(\gamma - 1) LK_v \sqrt{\bar{v}} \sin\left(\frac{\pi}{L}x_0\right)}{Ac^2 \bar{P} t_h} \quad (10)$$

Montrer qu'on obtient alors le système suivant

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{\tau_1} x_1 - \frac{\pi}{\nu} x_2 + u \quad (11)$$

$$\dot{x}_2 = \pi \nu x_1 + a x_3 \quad (12)$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{1}{\tau_3} x_3 - 1 + \sqrt{\left|1 + \frac{x_1}{\sqrt{2}}\right|} \quad (13)$$

3. Implémenter ce modèle en Simulink. *Bonus : implémenter le modèle à l'ordre  $N$ .*

4. Commenter le comportement du système en boucle ouverte.

## 2 Commande

1. Quel est le point d'équilibre correspondant à  $u = 0$  ?
2. Stabiliser le point d'équilibre à l'aide d'un contrôleur PID reposant sur la mesure de pression suivante

$$Y(t) = P(x_m, t) \quad (14)$$

Evaluer numériquement les performances de votre contrôleur.

3. Calculer la marge de retard de votre contrôleur.
4. Votre contrôleur permet-il de stabiliser le système après que celui-ci a convergé vers son cycle limite? Qu'en déduisez-vous sur le bassin d'attraction du point d'équilibre en boucle fermée?
5. La commande est en fait saturée :

$$-1 < u(\tau) < 1 \quad (15)$$

Ajouter cette contrainte au simulateur et réévaluer les performances de votre contrôleur.

6. Ajouter également du bruit de mesure.
7. Linéariser le système autour de son unique point d'équilibre.
8. Le linéarisé tangent est-il commandable?
9. Synthétiser un feedback par retour d'état (sur le linéarisé) permettant de stabiliser le point d'équilibre.
10. Appliquer ce feedback au système non-linéaire. Comparer les performances à celles du PID en prenant la pression comme sortie d'intérêt.

### 3 Observateur

Dans cette section, on cherche à réaliser un observateur permettant d'estimer tout l'état à partir de la mesure de pression.

1. Le linéarisé tangent est-il observable?
2. Réaliser un observateur et le tester sur le linéarisé tangent. Proposer plusieurs réglages. Commenter les performances de l'observateur.
3. Calculer le conditionnement de la matrice d'observabilité.
4. Synthétiser un observateur pour le modèle réduit. Le tester sur le linéarisé tangent et le modèle non-linéaire.
5. On se propose de réaliser l'“observateur” suivant

$$\dot{\hat{v}}_1(t) = -\alpha \hat{v}_1(t) + y(t) \quad (16)$$

$${}_t \hat{W}(t) = K_v \left( \sqrt{\bar{v} + \hat{v}_1(x, t)} - \sqrt{\bar{v}} \right) - \hat{W}(t) \quad (17)$$

Expliquer cette synthèse. Montrer la convergence à l'aide de la fonction de Lyapunov suivante

$$V(t) = |v_1(t) - \hat{v}_1(t)| + \alpha \left( W(t) - \hat{W}(t) \right)^2 \quad (18)$$

avec  $\alpha$  bien choisi.

6. Implémenter cet observateur.
7. Que se passe-t-il lorsque des erreurs de paramètres sont présentes?
8. Quels en sont les avantages et les inconvénients?

### 4 Observateur-contrôleur

1. Implémenter un observateur-contrôleur nonlinéaire stabilisant le point d'équilibre.
2. Linéariser autour du point d'équilibre et évaluer ses marges de robustesse, ainsi que ses performances.

## A Paramètres

Symbole	Description	Valeur
$L$	Longueur du tube	1 m
$x_0$	Position de la résistance	$L/4$
$x_m$	Position du microphone	$9L/10$
$c$	Vitesse du son dans l'air	$340 \text{ m.s}^{-1}$
$\gamma$	Constante adiabatique	1.4
$P$	Pression de référence	$10^5 \text{ Pa}$
$A$	Section du tube	$4 \times 10^{-3} \text{ m}^2$
$K_v$	Paramètre résistance	$1.269 \times 10^3 \text{ kg.m}^{1/2}\text{s}^{-3/2}$
$t_h$	Constante de temps résistance	$2 \times 10^{-3} \text{ s}$
$\bar{v}$	Vitesse de référence de l'air	$2 \times 10^{-1} \text{ m.s}^{-1}$
$Z$	Impédance acoustique frontière	$4.14 \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2}$

TABLE 1 – Liste des paramètres