

AUT 202

Commande avancée des systèmes

FLORENT DI MEGLIO

Centre Automatique et Systèmes
MINES ParisTech
PSL Research University

`florent.di_meglio@mines-paristech.fr`

21 février 2019
Amphi 4

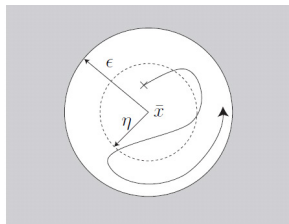
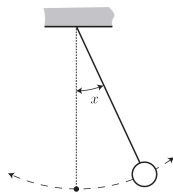
Plan de l'amphi 4

- 1 Fonctions de Lyapounov
- 2 Méthodes de perturbations
- 3 Synthèse de contrôleur en cascade

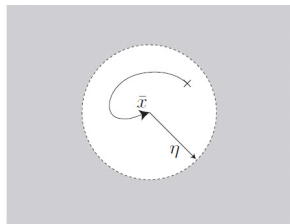
Rappel: stabilité

Pendule amorti ou non amorti

$$\frac{d^2}{dt^2}x + k\frac{d}{dt}x + \frac{g}{R}\sin x = 0$$



\bar{x} stable



\bar{x} asympt. stable

- 1 Fonctions de Lyapounov
- 2 Méthodes de perturbations
- 3 Synthèse de contrôleur en cascade

Fonctions de Lyapounov

- \bar{x} point d'équilibre de $\frac{d}{dt}x = f(x)$ défini sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, f est Lipschitz.

Définition: On appelle *fonction de Lyapounov* une fonction $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie:

- 1 V est \mathcal{C}^1
- 2 $V(\bar{x}) = 0$ et $V(x) > 0$ sur $\Omega \setminus \{\bar{x}\}$
- 3 Pour toute solution $x(t)$, $\frac{d}{dt}V(x(t)) \leq 0$ (décroissante le long des trajectoires)

Remarque : (3) $\Leftrightarrow \nabla V(x)f(x) \leq 0$ pour tout $x \in \Omega$

Résultats locaux

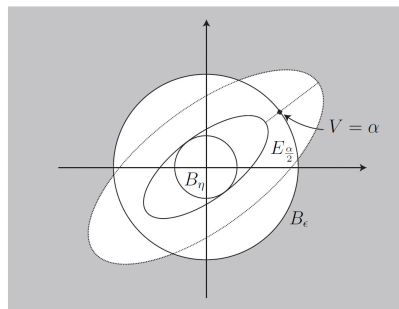
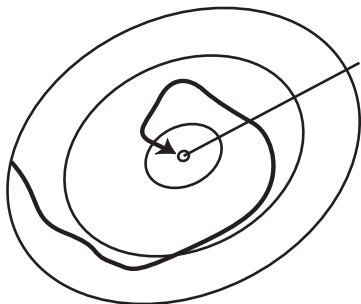
Théorème: [Stabilité et stabilité asymptotique locale par une fonction de Lyapounov]

S'il existe une **fonction de Lyapounov** $V(x)$ dans un voisinage \mathcal{O} de \bar{x} alors \bar{x} est un point d'équilibre **stable**.

Théorème: Si de plus, $\nabla V(x)f(x) < 0$ pour tout $x \in \mathcal{O} \setminus \{\bar{x}\}$, alors \bar{x} est un point d'équilibre (localement) **asymptotiquement stable**.

Ensembles de niveaux

Liens entre la norme Euclidienne et la fonction de Lyapounov.
Les ensembles de niveaux $E_a = \{x \mid V(x) \leq a\}$ sont des **ensembles positivement invariants** : si $x(0) \in E_a$, alors $\forall t > 0$, $x(t) \in E_a$.



Résultat global

Théorème:

S'il existe une fonction de Lyapounov $V(x)$ définie sur \mathbb{R}^n **radialement non bornée** telle que $\nabla V(x)f(x) < 0$ pour tout $x \neq \bar{x}$, alors \bar{x} est le seul point d'équilibre et il est **globalement asymptotiquement stable**

r.n.b. $\Leftrightarrow V(x) \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$

$$V(x_1, x_2) = |x_1| + x_2^2$$

radialement non bornée

$$V(x_1, x_2) = \cos(x_1) + x_2^2$$

non radialement non bornée

Exemple de fonction de Lyapounov

$$\frac{d}{dt}x = -x^3,$$

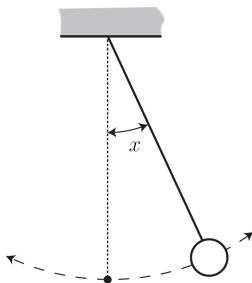
Fonction de Lyapounov :

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2$$

- V est continue, $\frac{dV}{dx}$ est continue,
 $V(x) > 0$, pour tout $x \neq 0$, et $V(0) = 0$
- $V(x) \rightarrow +\infty$, lorsque $|x| \rightarrow +\infty$
- $\frac{d}{dt}V(x(t)) = x \cdot \dot{x} = -x^4 < 0$, sauf en 0

Donc, 0 est **globalement asymptotiquement stable**.

Un exemple physique ?



$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x = y \\ \frac{d}{dt}y = -ky - \frac{g}{l} \sin(x) \end{cases}$$

$$V(x, y) = \frac{g}{l} (1 - \cos(x)) + \frac{y^2}{2}$$

$$\frac{d}{dt}V(x, y) = -ky^2 \leq 0$$

mais $\left\{ \frac{dV}{dt}(x, y) = 0 \right\}$ n'est pas réduit à $\{0\}$!

Invariance de LaSalle

Lorsque l'ensemble $\{x \mid \frac{d}{dt} V(x) = \nabla V \cdot f(x) = 0\}$ n'est pas réduit à l'équilibre.

Théorème d'invariance de LaSalle:

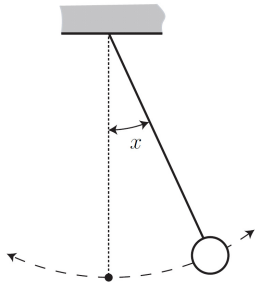
Soit $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto V(x) \in \mathbb{R}^+, C^1$, radialement non bornée,

$$\frac{d}{dt} V(x) = \nabla V(x) f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) f_i(x) \leq 0$$

Alors, **pour toute condition initiale x^0** , la solution de $\frac{d}{dt} x = f(x)$ (définie pour tout temps $t > 0$) converge asymptotiquement vers le **plus grand sous-ensemble invariant** contenu dans $\{x \mid \frac{d}{dt} V(x) = \nabla V \cdot f(x) = 0\}$.

(version globale d'un résultat local)

Exemple:



$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x = y \\ \frac{d}{dt}y = -ky - \frac{g}{l} \sin(x) \end{cases}$$

$$V(x, y) = \frac{g}{l} (1 - \cos(x)) + \frac{y^2}{2}$$

$$\frac{d}{dt}V(x, y) = -ky^2 \leq 0$$

Le système converge
(localement) asymptotiquement
vers $(0, 0)^T$

- 1 Fonctions de Lyapounov
- 2 Méthodes de perturbations
- 3 Synthèse de contrôleur en cascade

Méthodes de perturbations

$$(\Sigma^\varepsilon) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, z, \varepsilon) \\ \varepsilon \frac{dz}{dt} = g(x, z, \varepsilon) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{avec } x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^p, \\ 0 < \varepsilon \ll 1 \text{ un petit paramètre,} \\ f \text{ et } g \text{ des fonctions régulières} \end{array}$$

x : variables lentes, z : variables rapides

Méthodes de perturbations

$$(\Sigma^\varepsilon) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, z, \varepsilon) \\ \varepsilon \frac{dz}{dt} = g(x, z, \varepsilon) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{avec } x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^p, \\ 0 < \varepsilon \ll 1 \text{ un petit paramètre,} \\ f \text{ et } g \text{ des fonctions régulières} \end{array}$$

x : variables lentes, z : variables rapides

Exemple: Moteur à courant continu, L “petit”

$$J \frac{d\omega}{dt} = ki \quad \text{Mécanique}$$

$$L \frac{di}{dt} = -k\omega - Ri + u \quad \text{Electrocinétique}$$

Méthodes de perturbations

$$(\Sigma^\varepsilon) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, z, \varepsilon) \\ \varepsilon \frac{dz}{dt} = g(x, z, \varepsilon) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{avec } x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^p, \\ 0 < \varepsilon \ll 1 \text{ un petit paramètre,} \\ f \text{ et } g \text{ des fonctions régulières} \end{array}$$

x : variables lentes, z : variables rapides

Exemple: Moteur à courant continu, L "petit"

$$\begin{array}{l} J \frac{d\omega}{dt} = ki \\ L \frac{di}{dt} = -k\omega - Ri + u \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \frac{d\omega_r}{dt_r} = i_r \\ \frac{T_e}{T_m} \frac{di_r}{dt_r} = -\omega_r - i_r + u_r \end{array}$$

$$\varepsilon = \frac{T_e}{T_m} = \frac{Lk^2}{JR^2}$$

Réduction de modèle

Pour $0 < \varepsilon \ll 1$, on considère l'approximation de

$$(\Sigma^\varepsilon) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, z, \varepsilon) \\ \varepsilon \frac{dz}{dt} = g(x, z, \varepsilon) \end{cases} \quad \text{par} \quad (\Sigma^0) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, \rho(x), 0) \\ 0 = g(x, z, 0) \end{cases}$$

où on a défini $z = \rho(x) \Leftrightarrow g(x, z, 0) = 0$

Σ^ε : modèle perturbé, Σ^0 : modèle réduit (z peut disparaître)

Elle peut être justifiée par le Théorème de Tikhonov.

Le **modèle réduit** est alors $\frac{d}{dt}x = f(x, \rho(x), 0)$

Exemple

$$\Sigma^\varepsilon \begin{cases} \frac{d}{dt}x_1 = x_2 \\ \frac{d}{dt}x_2 = -x_1 + \sin(z) + \varepsilon(x_1 + x_2) \\ \varepsilon \frac{d}{dt}z = -z - x_1^2 + \varepsilon \frac{1}{1 + 4x^2} \end{cases}$$

Exemple

$$\Sigma^\varepsilon \begin{cases} \frac{d}{dt}x_1 = x_2 \\ \frac{d}{dt}x_2 = -x_1 + \sin(z) + \varepsilon(x_1 + x_2) \\ \varepsilon \frac{d}{dt}z = -z - x_1^2 + \varepsilon \frac{1}{1 + 4x^2} \end{cases}$$

$$\Sigma^0 \begin{cases} \frac{d}{dt}x_1 = x_2 \\ \frac{d}{dt}x_2 = -x_1 - \sin(x_1^2) \\ z = -x_1^2 \end{cases}$$

Théorème de Tikhonov (réduction par perturbations singulières)

Théorème (Σ^ε est proche de Σ^0)

Si les hypothèses **H1** et **H2** sont satisfaites

H1: $z = \rho(x)$ solution de $g(x, z, 0) = 0$ est telle que

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x, \rho(x), 0) < 0 \quad (\text{les variables rapides sont stables})$$

H2: le système réduit (Σ^0) $\frac{dx}{dt} = f(x, \rho(x), 0)$, $x_{(t=0)} = x_\varepsilon(0)$ a une solution $x(t)$ sur $[0, T]$

alors, pour $\varepsilon \ll 1$, (Σ^ε) admet une solution $(x_\varepsilon(t), z_\varepsilon(t))$ sur $[0, T]$ (si $z_\varepsilon(0)$ proche de $\rho(x_\varepsilon(0))$)

et sur tout $[\tau, T]$, $\tau > 0$ on a

$$x_\varepsilon(t) = x(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (\text{et} \quad z_\varepsilon(t) = \rho(x_\varepsilon(t)) + \mathcal{O}(\varepsilon))$$

Exemple (suite)

$$\Sigma^\varepsilon \begin{cases} \frac{d}{dt}x_1 = x_2 \\ \frac{d}{dt}x_2 = -x_1 + \sin(z) + \varepsilon(x_1 + x_2) \\ \varepsilon \frac{d}{dt}z = -z - x_1^2 + \varepsilon \frac{1}{1 + 4x_1^2} \end{cases}$$

$$g(x, z, \varepsilon) = -z - x_1^2 + \varepsilon \frac{1}{1 + 4x_1^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial z}(x, \rho(x), 0) = -1$$

Exemple (suite)

$$\Sigma^0 \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}x_1 = x_2 \\ \frac{d}{dt}x_2 = -x_1 - \sin(x_1^2) \\ z = -x_1^2 \end{array} \right.$$

$$g(x, z, \varepsilon) = -z - x_1^2 + \varepsilon \frac{1}{1 + 4x_1^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial z}(x, \rho(x), 0) = -1$$

Compléments: Préservation de la stabilité

$$(\Sigma^\varepsilon) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = f(x, z, \varepsilon) \\ \varepsilon \frac{dz}{dt} = g(x, z, \varepsilon) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{avec } g(x, \rho(x), 0) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial z}(x, \rho(x), 0) \text{ matrice stable} \\ \text{et } 0 < \varepsilon \ll 1. \end{array}$$

- Si le système réduit $(\Sigma^0) \frac{d}{dt}x = f(x, \rho(x), 0)$ admet un point d'équilibre \bar{x} **asymptotiquement stable** (voir les valeurs propres de la matrice $\left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} \right]_{(\bar{x}, \rho(\bar{x}), 0)}$)
- Alors, pour $\varepsilon \ll 1$ le système (Σ^ε) admet un point d'équilibre proche de $(\bar{x}, \rho(\bar{x}))$ **asymptotiquement stable**.

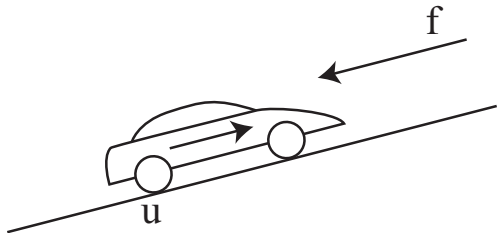
- 1 Fonctions de Lyapounov
- 2 Méthodes de perturbations
- 3 Synthèse de contrôleur en cascade**

Synthèse de contrôleur sur une cascade

$$\frac{d^2}{dt^2}x = f(x, \frac{d}{dt}x) + u$$

(ex. formulation variationnelle, ou “cruise-control”, ***f* mal connue**)

Problème: asservir la **position** à \bar{x} , 1 commande u pour 2 états $(x, \frac{d}{dt}x)$



$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x = v \\ \frac{d}{dt}v = f(x, v) + u \end{cases}$$

Hypothèse: f est dérivable, **de dérivées bornées**

Asservissement de x

Pour que x converge vers \bar{x} , on désire

$$v \approx -k_1(x - \bar{x}) \triangleq \bar{v}, \quad k_1 > 0$$

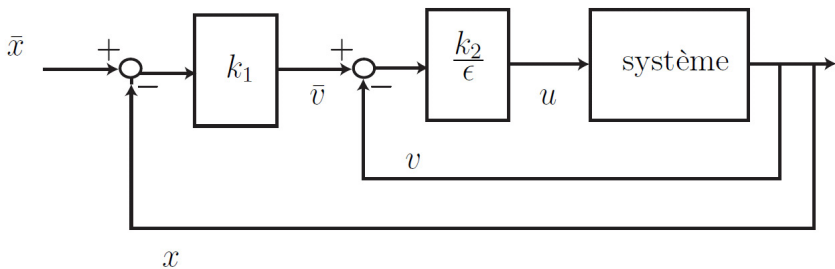
Peut-on l'assurer?

$$\frac{d}{dt}v = f(x, v) - \frac{k_2}{\varepsilon}(v - \bar{v}), \quad k_2 > 0$$

c.-à-d. (u est un retour d'état)

$$u = -\frac{k_2}{\varepsilon}(v + k_1(x - \bar{x}))$$

Cascade



Formulation lent-rapide

$$\frac{d}{dt}x = v$$

$$\frac{d}{dt}v = f(x, v) - \frac{k_2}{\varepsilon}(v + k_1(x - \bar{x}))$$

$$\Sigma^\varepsilon \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}x = v \quad \text{lent} \\ \varepsilon \frac{d}{dt}v = \varepsilon f(x, v) - k_2(v + k_1(x - \bar{x})) \quad \text{rapide} \end{array} \right.$$

de solution $x_\varepsilon(t), v_\varepsilon(t)$

Réduction par les perturbations singulières

- Le système rapide est asymptotiquement stable

$$g(x, v, \varepsilon) = \varepsilon f(x, v) - k_2(v + k_1(x - \bar{x}))$$

Pour $\varepsilon = 0$, $g(x, v, 0) = k_2(v + k_1(x - \bar{x}))$ a pour solution
 $v = -k_1(x - \bar{x})$,

$$\frac{\partial g}{\partial v}(x, -k_1(x - \bar{x}), 0) = -k_2 < 0$$

- Le système réduit est

$$\frac{d}{dt}x = -k_1(x - \bar{x}), \quad v = -k_1(x - \bar{x})$$

Le système réduit est asymptotiquement stable

$$\frac{d}{dt}x = -k_1(x - \bar{x})$$

donc, sa solution $x_0(t)$ est une bonne approximation de la solution $x_\varepsilon(t)$ pour tout t , et

$$x_\varepsilon(t) = \bar{x} + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} v_\varepsilon(t) = 0$$

sans aucune connaissance de f

Remarques

- En fait, on sait traiter

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x = v \\ \frac{d}{dt}v = f(x, v) + \alpha u \end{cases}$$

avec $\alpha > 0$ mal connu

- on a pris

$$u = -\frac{k_2}{\varepsilon}(v + k_1(x - \bar{x}))$$

il s'agit d'un retour d'état.

Résumé

- 1 Fonctions de Lyapounov: stabilité et stabilité asymptotique, conclusion directe ou par l'invariance de LaSalle
- 2 Méthodes de perturbations : simplification de modèle, conception de régulateurs en cascade (régulateur "maître" lent qui donne sa consigne lentement variable à un régulateur "esclave" rapide)