AUT 202

Commande avancée des systèmes

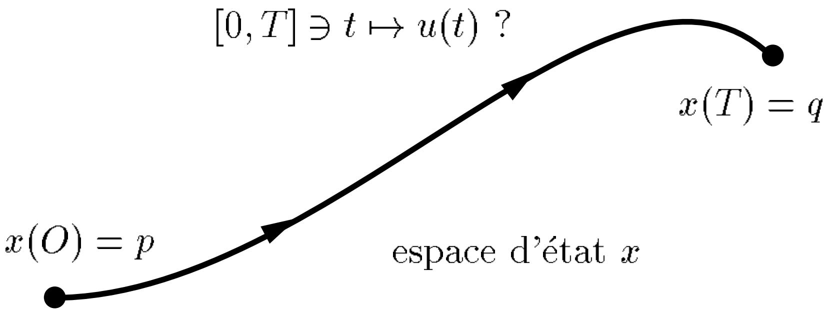
Florent Di Meglio

Centre Automatique et Systèmes
MINES ParisTech
PSL Research University
florent.di_meglio@mines-paristech.fr

31 janvier 2019
Amphi 2

Plan de l'amphi 2

Planification de trajectoire



Boucle ouverte

En boucle ouverte: on peut trouver une loi horaire $[0, t_f] \ni t \mapsto u(t)$ amenant le système de tout point $x(0) = p$ à tout point $x(t_f) = q$ sous hypothèse de commandabilité

$$\mathcal{C} = (B, AB, \ldots A^{n-1}B) \text{ est de rang } n = \dim(x)$$

Formule explicite

Transition entre $x(0) = p$ à $x(T) = q$

$$u(t) = B' \exp[(T-t)A'] \left(\int_0^T \exp(sA)BB' \exp(sA')ds \right)^{-1} (q - \exp(TA)p)$$

Boucle ouverte

En boucle ouverte: on peut trouver une loi horaire $[0, t_f] \ni t \mapsto u(t)$ amenant le système de tout point $x(0) = p$ à tout point $x(t_f) = q$ sous hypothèse de commandabilité

$$\mathcal{C} = (B, AB, \dots A^{n-1}B) \text{ est de rang } n = \dim(x)$$

Formule explicite

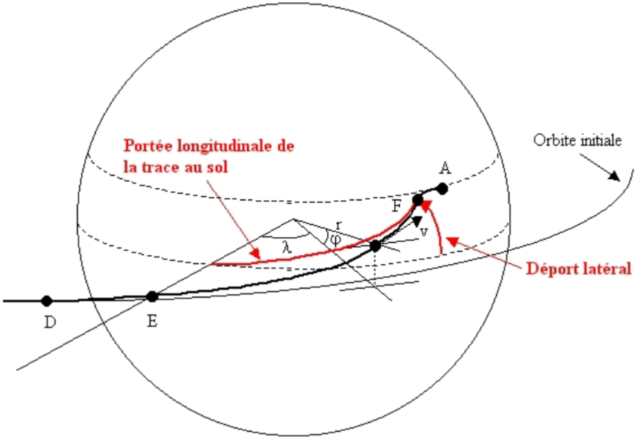
Transition entre $x(0) = p$ à $x(T) = q$

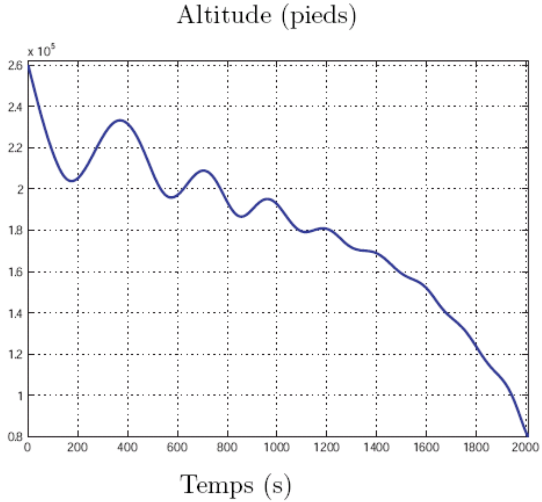
$$u(t) =$$

$$B' \exp[(T-t)A'] \left(\int_0^T \exp(sA)BB' \exp(sA')ds \right)^{-1} (q - \exp(TA)p)$$

Optimisation de transitoires

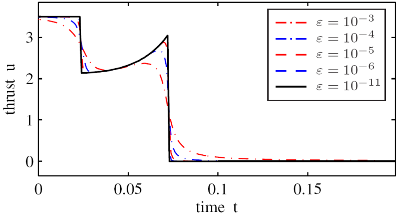
Exemple: réentrée atmosphérique, optimisation d'une trajectoire (loi horaire)



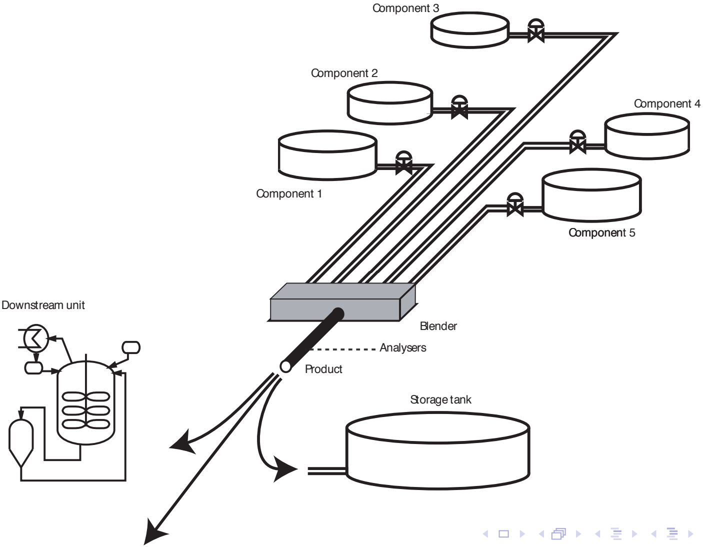


"Rebonds atmosphériques", osc. phugoïde, Zhukovskii 1949

Le problème de Goddard



Exemple: raffineries



Optimisation de dimension finie

$$\min_{\begin{cases} x \in \mathbb{R}^n \\ h_1(x) = 0, \dots, h_p(x) = 0 \end{cases}} J(x)$$

- on rajoute des multiplicateurs de Lagrange $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$
- on introduit le Lagrangien

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = J(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i h_i(x) = J(x) + \lambda^T h(x)$$

- on explicite les conditions de stationnarité du Lagrangien en faisant comme si les variables x et λ pouvaient varier librement. Ces conditions sont $\delta\mathcal{L} = 0$ pour toutes variations infinitésimales δx et $\delta\lambda$ des variables x et λ

Optimisation de dimension finie

$$\min_{\left\{\begin{array}{c} x \in \mathbb{R}^n \\ h_1(x)=0,\ldots,h_p(x)=0 \end{array}\right.} J(x)$$

- on rajoute des multiplicateurs de Lagrange $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$
- on introduit le Lagrangien

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = J(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i h_i(x) = J(x) + \lambda^T h(x)$$

- on explicite les conditions de stationnarité du Lagrangien en faisant comme si les variables x et λ pouvaient varier librement. Ces conditions sont $\delta\mathcal{L} = 0$ pour toutes variations infinitésimales δx et $\delta\lambda$ des variables x et λ

Optimisation de dimension finie

$$\left\{\begin{array}{cc}\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} & J(x) \\ h_1(x) = 0, \ldots, h_p(x) = 0 & \end{array}\right.$$

- on rajoute des multiplicateurs de Lagrange $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$
- on introduit le Lagrangien

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = J(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i h_i(x) = J(x) + \lambda^T h(x)$$

- on explicite les conditions de stationnarité du Lagrangien en faisant comme si les variables x et λ pouvaient varier librement. Ces conditions sont $\delta\mathcal{L} = 0$ pour toutes variations infinitésimales δx et $\delta\lambda$ des variables x et λ

Optimisation de dimension finie

$$\left\{ \begin{array}{c} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \quad J(x) \\ h_1(x) = 0, \ldots, h_p(x) = 0 \end{array} \right.$$

- on rajoute des multiplicateurs de Lagrange $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$
- on introduit le Lagrangien

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = J(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i h_i(x) = J(x) + \lambda^T h(x)$$

- on explicite les conditions de stationnarité du Lagrangien en faisant comme si les variables x et λ pouvaient varier librement. Ces conditions sont $\delta\mathcal{L} = 0$ pour toutes variations infinitésimales δx et $\delta\lambda$ des variables x et λ

Théorème de stationnarité

Si (x^*, λ^*) est un point stationnaire du Lagrangien
$\mathcal{L}(x, \lambda) = J(x) + \lambda^T h(x)$ (i.e. $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$, (n+p équations))
alors x^* est un point stationnaire de J sous les contraintes h,
i.e. un candidat à être solution de

$$\left\{ \begin{array}{cc} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} & J(x) \\ h_1(x) = 0, \ldots, h_p(x) = 0 & \end{array} \right.$$

Calcul des variations et adjoint

$$\min_{x,u} \ell(x(t_f)) + \int_0^{t_f} L(x(t),u(t))\, dt$$

$$\left\{ \begin{array}{c} [0,t_f] \ni t \mapsto (x(t),u(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ x(0) = x^0 \\ f_1(x(t),u(t)) - \frac{d}{dt}x_1(t) = 0, \;\; t \in [0,t_f] \\ \vdots \\ f_n(x(t),u(t)) - \frac{d}{dt}x_n(t) = 0, \;\; t \in [0,t_f] \end{array} \right.$$

On introduit le Lagrangien

$$\mathcal{L}(x,u,\lambda) = \ell(x(t_f)) + \int_0^{t_f} L(x(t),u(t))\, dt$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_0^{t_f} \lambda_i(t) \left(f_i(x(t),u(t)) - \frac{d}{dt}x_i(t) \right) dt$$

Le Lagrangien $\mathcal{L}$ est une fonctionnelle

On écrit les conditions de stationnarité de $\mathcal{L}$ pour toutes variations

- $t \mapsto \delta\lambda(t)$
- $t \mapsto \delta u(t)$
- $t \mapsto \delta x(t)$ ($\delta x(0) = 0$)

Conditions de stationnarité (1)

Pour toute fonction $t \mapsto \delta\lambda(t) \in \mathbb{R}^n$ on doit avoir

$$\delta\mathcal{L} = \int_0^{t_f} \delta\lambda^T(t) \left(f(x(t), u(t)) - \frac{d}{dt} x(t) \right) \, dt = 0$$

La seule possibilité [1] est qu'à chaque instant $t \in [0, t_f]$,

$$f(x(t), u(t)) - \frac{d}{dt} x(t) = 0$$

[1] On se reportera au lemme de du Bois-Reymond.

Conditions de stationnarité (2)

Pour toute fonction $t \mapsto \delta u(t) \in \mathbb{R}^m$, on doit avoir

$$\delta \mathcal{L} = \int_0^{t_f} \left(\left.\frac{\partial L}{\partial u}\right|_{(x(t),u(t))} \delta u(t) + \lambda^T(t) \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x(t),u(t))} \delta u(t) \right) dt = 0$$

En mettant δu en facteur on obtient

$$\delta \mathcal{L} = \int_0^{t_f} \left(\left.\frac{\partial L}{\partial u}\right|_{(x(t),u(t))} + \lambda^T(t) \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(x(t),u(t))} \right) \delta u(t)\, dt = 0$$

Ceci donne la condition de stationnarité sur u

$$\frac{\partial L}{\partial u}(x,u) + \lambda^T \frac{\partial f}{\partial u}(x,u) = 0, \quad t \in [0, t_f]$$

Conditions de stationnarité (3)

Pour toute fonction $t \mapsto \delta x(t) \in \mathbb{R}^n$ telle que $\delta x(0) = 0$, on doit avoir

$$0 = \delta \mathcal{L} = \frac{\partial \ell}{\partial x}(x(t_f))\delta x(t_f) +$$

$$\int_0^{t_f} \left[\left.\frac{\partial L}{\partial x}\right|_{(x(t),u(t))} \delta x(t) + \lambda^T(t) \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x(t),u(t))} \delta x(t) - \frac{d}{dt}\delta x(t) \right) \right] dt$$

Intégration par partie

$$-\int_0^{t_f} \lambda^T(t)\frac{d}{dt}\delta x(t)\, dt = -[\lambda^T \delta x]_0^{t_f} + \int_0^{t_f} \frac{d}{dt}\lambda^T(t)\, \delta x(t)\, dt$$

$$= -\lambda^T(t_f)\delta x(t_f) + \int_0^{t_f} \frac{d}{dt}\lambda^T(t)\, \delta x(t)\, dt$$

(car $\delta x(0) = 0$)

Pour toute fonction $t \mapsto \delta x(t)$ telle que $\delta x(0) = \delta x(t_f) = 0$, on a

$$\int_0^{t_f} \left[\left.\frac{\partial L}{\partial x}\right|_{(x(t),u(t))} + \lambda^T(t) \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x(t),u(t))} + \frac{d}{dt}\lambda^T(t) \right] \delta x(t)\, dt = 0$$

On en déduit

$$\left.\frac{\partial L}{\partial x}\right|_{(x(t),u(t))} + \lambda^T(t) \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x(t),u(t))} + \frac{d}{dt}\lambda^T(t) = 0$$

c.-à-d.

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^T_{(x,u)} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T_{(x,u)} \lambda + \frac{d}{dt}\lambda = 0, \; t \in [0, t_f]$$

Enfin, avec $\delta x(t_f) \neq 0$ on obtient de $\delta \mathcal{L} = 0$ la condition finale

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial \ell}{\partial x}(x(t_f))$$

Problème aux deux bouts

En somme, les conditions de stationnarité sont, pour $t \in [0, t_f]$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = f(x(t), u(t)) \\ \dfrac{d}{dt}\lambda(t) = -\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^T_{(x(t),u(t))} \lambda(t) - \left(\dfrac{\partial L}{\partial x}\right)^T_{(x(t),u(t))} \\ 0 = \left(\dfrac{\partial L}{\partial u}\right)_{(x(t),u(t))} + \lambda^T \left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\right)_{(x(t),u(t))} \end{cases}$$

avec comme conditions au bord

$$x(0) = x^0, \quad \lambda(t_f) = \frac{\partial \ell}{\partial x}(x(t_f))$$

Il s'agit d'un problème aux deux bouts, ce n'est pas un *problème de Cauchy*

Linéarisé tangent autour d'une trajectoire $(x_r(t), u_r(t))$

Optimisation

La trajectoire elle même est issue d'une optimisation

$$\begin{cases} \Delta x(0) = \Delta x^0 \\ \frac{d}{dt}\Delta x(t) = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_r(t), u_r(t))\right)}_{A(t)} \cdot \Delta x(t) + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial u}(x_r(t), u_r(t))\right)}_{B(t)} \cdot \Delta u(t) \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}x = A(t)x + B(t)u(t)$$

Problème à résoudre

Étant donné un point de départ (perturbation), on cherche les meilleures corrections (autour de la trajectoire)

Contrôleur LQ

En particulier, pour un système linéaire (instationnaire)

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)u$$

et un coût quadratique à minimiser

$$\frac{1}{2}x^T(t_f)S_f x(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f}\left(x^T(t)Rx(t) + u^T(t)Qu(t)\right)$$

compromis tolérance sur l'erreur d'état, effort sur la commande
S_f, R sont sym. positives, Q est sym. définie pos.

Problème aux deux bouts

$f = Ax + Bu$, $L = \frac{1}{2}(x^T Rx + u^T Qu)$ et $\ell = \frac{1}{2} x^T S_f x$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= A(t)x(t) - BQ^{-1}B^T\lambda(t) \\ \frac{d}{dt}\lambda(t) &= -Rx(t) - A^T(t)\lambda(t) \end{aligned}\right\}$$

avec les conditions limites bilatérales

$$x(0) = x^0, \quad \lambda(t_f) = S_f x(t_f)$$

L'*état adjoint* λ est de la même dimension que x. La commande optimale est alors donnée par

$$u(t) = -Q^{-1}B^T(t)\lambda(t)$$

Solution explicite sous forme linéaire

$$\lambda(t) = S(t)x(t)$$

avec $S(t_f) = S_f$

En substituant, on obtient

$$\frac{d}{dt}S(t)x(t) + S(t)A(t)x(t) - S(t)B(t)Q^{-1}B^T(t)S(t)x(t) = -Rx(t) - A^T(t)S(t)x(t)$$

Il suffit alors de choisir S solution de l'équation différentielle matricielle *de Riccati* en temps rétrograde (quadratique en l'inconnue S)

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d}{dt}S(t) = -S(t)A(t) + S(t)B(t)Q^{-1}B^T(t)S(t) - R - A^T(t)S(t) \\ S(t_f) = S_f \end{array}\right\}$$

pour obtenir finalement la commande optimale

$$u(t) = -Q^{-1}B^T(t)S(t)x(t)$$

Énoncé

Contrôleur LQ

Soit $\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + B(t)u$ avec $x(0)$ comme condition initiale, et le critère à minimiser

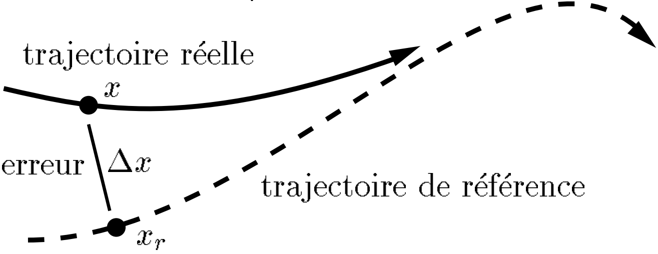
$$J = \frac{1}{2}x^T(t_f)S_f x(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} \left(x^T(t)Rx(t) + u^T(t)Qu(t)\right) dt$$

où $A(t)$ est une matrice $n \times n$, $B(t)$ est une matrice $n \times m$, S_f et R sont symétriques positives, Q est symétrique définie positive. La solution à ce problème de minimisation est la loi de *feedback optimal*

$$u(t) = -Q^{-1}B^T(t)S(t)x(t)$$

où S est définie par l'*équation différentielle de Riccati* rétrograde, et la valeur du critère qui lui est associée est $J^{opt} = \frac{1}{2}x^T(0)S(0)x(0)$

$$u = u_r + \Delta u \ ?$$



Corrections optimales:

$$\Delta u(t) = -Q^{-1} B^T(t) S(t) \Delta x(t)$$

Coût total de la correction:

$$\frac{1}{2} x^T(0) S(0) x(0)$$

Régulateur LQR

Passage à la limite $t_f \rightarrow +\infty$ on va utiliser la commande LQ en feedback, l'horizon étant naturellement glissant

$$\int_0^{+\infty} \left(x^T(t)Rx(t) + u^T(t)Qu(t) \right) dt$$

où R est sym. positive, Q sym. définie positive et le système est linéaire stationnaire

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu$$

où l'état $x \in \mathbb{R}^n$, la commande $u \in \mathbb{R}^m$ et les matrices A et B sont de tailles $n \times n$ et $n \times m$

Régulateur LQR

$$\min_u \int_0^{+\infty} \left(x^T(t)Rx(t) + u^T(t)Qu(t) \right) dt, \quad \frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu$$

i) (A, B) est *commandable* *ii)* R est sym. pos. *iii)* Q est sym. déf. pos. *iv)* $\exists$ une racine de R telle que $(R^{1/2}, A^T)$ est commandable
Solution: loi de feedback optimal

$$u(t) = -Q^{-1}B^T S^0 x(t)$$

où S^0 est l'unique solution symétrique stabilisante de l'équation de Riccati algébrique

$$0 = SA + A^T S - SBQ^{-1}B^T S + R$$

et la valeur du critère qui lui est associée est $x^T(0)S^0x(0)$

Preuve: construction d'une solution

1. comparaison avec un placement de pôles: exp. stabilisant, il fournit une intégrale convergente. $t \mapsto \min_u \int_0^t$ est majorée et croissante donc convergente. Limite: $x^T(0)\Sigma_\infty x(0)$
2. Σ_∞ est solution de l'équation de Riccati algébrique
$$0 = SA + A^T S - SBQ^{-1}B^T S + R$$
3. Σ_∞ est sym. déf. pos. sous l'hypothèse de commandabilité
4. $V(x) = x^T \Sigma_\infty x$ est fonction de Lyapounov. L'ensemble $\frac{d}{dt}V(x) = 0$ est donné par
$$R^{1/2}x(0) = 0 = R^{1/2}Ax(0) = ... = R^{1/2}A^{n-1}x(0)$$
qui est réduit à $\{0\}$
5. Unicité de la solution de l'éq. de Riccati stabilisante: lemme d'algèbre linéaire
6. Calcul du coût optimum

Exemple

Problème

Considérons le système $\frac{d}{dt}x = \frac{-1}{\tau}x + u$ et le critère quadratique à minimiser $\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(ax^2 + bu^2)dt$ où $a \geq 0$, $b > 0$

Solution

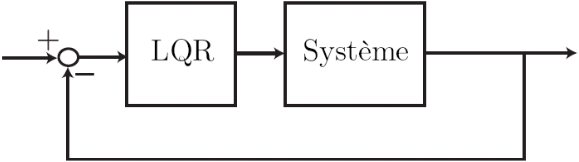
L'équation (ici scalaire) de Riccati algébrique associée est

$$0 = -\frac{2}{\tau}S - \frac{S^2}{b} + a$$

possède 2 solutions $S_\pm = \frac{-b}{\tau} \pm \sqrt{\frac{b^2}{\tau^2} + ab}$. La commande associée est $u = \left(\frac{1}{\tau} \mp \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + \frac{a}{b}}\right)x$. La commande optimale correspond à S_+

$a \to +\infty$, $\max|u| \to +\infty$

Propriété de robustesse de la commande LQR



$$\min_u \int_0^{+\infty} \left(x^T(t) R x(t) + u^T(t) Q u(t) \right) dt, \quad \frac{d}{dt} x(t) = A x(t) + B u$$

$$K(sI - A)^{-1} B$$

Lieu de Nyquist

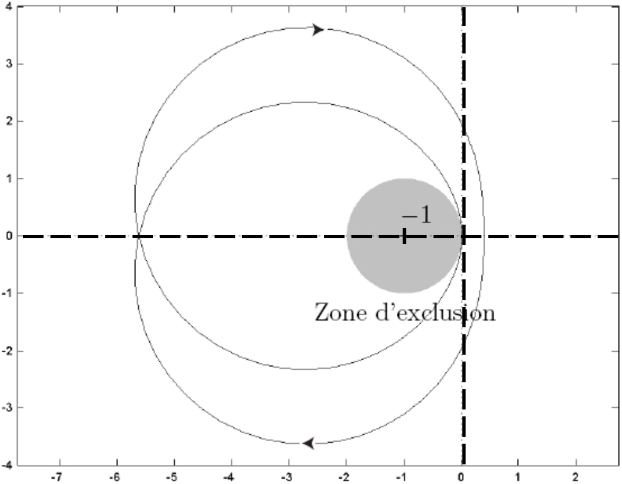
$$K(sI - A)^{-1}B = Q^{-1}B^T S^0 (sI - A)^{-1}B$$

Lieu de Nyquist (s parcourt $+\imath\infty \to -\imath\infty$) (cas mono-entrée)

$$\|1 + K(sI - A)^{-1}B\|^2 = \overline{(1 + K(sI - A)^{-1}B)}^T (I + K(sI - A)^{-1}B)$$
$$= 1 + \frac{1}{Q}\overline{(sI - A)^{-1}}^T R (sI - A)^{-1}$$

en utilisant l'équation de Riccati algébrique

$$\|1 + K(sI - A)^{-1}B\|^2 \geq 1$$



Limitation des performances: cheap control

$$\min_u \int_0^{+\infty} \left(x^T(t) R x(t) + \epsilon^2 u^T(t) Q u(t) \right) dt, \quad \frac{d}{dt} x(t) = Ax(t) + Bu$$

Que se passe-t-il quand $\epsilon \to 0$? Le coût minimal est

$$J^* = \frac{1}{2} \Delta x_0^\top H \Delta x_0, \qquad \text{avec trace } H = 2 \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\alpha_i}$$

où les α_i sont les zéros instables du système. Cette formule est à comparer à

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \log |T(j\omega)| \frac{d\omega}{\omega^2} + \frac{1}{2K_v} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\alpha_i}$$

Limitation des performances: cheap control

$$\min_u \int_0^{+\infty} \left(x^T(t) R x(t) + \epsilon^2 u^T(t) Q u(t) \right) dt, \quad \frac{d}{dt} x(t) = A x(t) + B u$$

Que se passe-t-il quand $\epsilon \to 0$? Le coût minimal est

$$J^* = \frac{1}{2} \Delta x_0^\top H \Delta x_0, \qquad \text{avec trace } H = 2 \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\alpha_i}$$

où les α_i sont les zéros instables du système. Cette formule est à comparer à

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \log |T(j\omega)| \frac{d\omega}{\omega^2} + \frac{1}{2K_v} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\alpha_i}$$

Limitation des performances: cheap control

$$\min_u \int_0^{+\infty} \left(x^T(t) R x(t) + \epsilon^2 u^T(t) Q u(t) \right) dt, \quad \frac{d}{dt} x(t) = Ax(t) + Bu$$

Que se passe-t-il quand $\epsilon \to 0$? Le coût minimal est

$$J^* = \frac{1}{2} \Delta x_0^\top H \Delta x_0, \qquad \text{avec trace } H = 2 \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\alpha_i}$$

où les α_i sont les zéros instables du système. Cette formule est à comparer à

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \log |T(j\omega)| \frac{d\omega}{\omega^2} + \frac{1}{2K_v} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\alpha_i}$$

Résumé

1. Optimisation de transitoires: problème aux deux bouts
2. Contrôleur LQ: solution explicite dans le cas linéaire quadratique, feedback instationnaire, équation de Riccati différentielle
3. Régulateur LQR: cas limite $t_f \to +\infty$, feedback stationnaire, équation de Riccati algébrique. Le LQR répond indirectement à la question, où placer les valeurs propres?