

SÉRIES DE VOLTERRA: APPLICATIONS À LA MODÉLISATION ET LA COMMANDE DE CLASSES D'EDP ET D'EDO NON LINÉAIRES ANALYTIQUES.

Béatrice Laroche

UR341 MIAJ, INRA Jouy-en-Josas, France

séminaire du CAS, Ecole des Mines, Paris
5 mai 2011

Plan

- **Partie 1:** approche “entrée/sortie”: résultats généraux
[Volterra],[Rugh],[Boyd]
- **Partie 2:** systèmes dynamiques EDO analytiques: résultats généraux
[Brocket],[Gilbert],[Lesiak, Krener],[Fliess, Lamnabhi]
- **Partie 3:** Calculs de rayon de convergence EDO et EDP
[Brocket],[Lamnabhi],[Bullo],[Helie, Laroche]
- Conclusion et perspectives

Opérateurs et Séries de Volterra

$u \in \mathcal{U}$ (espace de fonctions de la variable réelle à définir)

V_N opérateur de Volterra causal, stationnaire (CTI):

$$V_N u(t) = h_0 + \sum_{n=0}^N \int_0^{+\infty} \cdots \int_0^{+\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^n u(t - \tau_i) [d\tau]_i$$

V série de Volterra:

$$Vu(t) = h_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} \cdots \int_0^{+\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^n u(t - \tau_i) [d\tau]_i$$

noyaux de multiconvolution h_n (définis sur \mathbb{R}^n) et entrée u tels que les intégrales et éventuellement la série convergent.

pour $u = 0$, $Vu(t) = h_0$ constant (équilibre).

Opérateurs et Séries de Volterra CTI

- définition généralisable sans mal au cas multi entrées, multi sorties,
- formulation locale en temps (entrées causales) :

$$\begin{aligned} Vu(t) &= h_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \cdots \int_0^t h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^n u(t - \tau_i) [d\tau]_i \\ &= h_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \cdots \int_0^t h_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n) \prod_{i=1}^n u(\tau_i) [d\tau]_i \end{aligned}$$

- généralisation de la notion de système causal, linéaire, invariant par translation temporelle (LTI) convolutif
ex: $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$, équilibre à $t = 0$: $x(0) = x_0$ avec $A(x_0) = 0$
 $y(t) = \int_0^t Ce^{(t-\tau)A} Bu(\tau) d\tau$.
- fonctions de transfert généralisées: $H_n(s_1, \dots, s_n)$

Opérateurs et Séries de volterra instationnaires

formulation instationnaire:

$$Vu(t) = h_0(t) + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \cdots \int_0^t W_n(t, \tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^n u(\tau_i) [d\tau]_i$$

ex: $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$, état initial quelconque $x(0) = x_0$
 $y(t) = Ce^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau.$

Intérêt

- Séries de Volterra = modélisation de comportements nonlinéaires,
- On peut approcher de larges classes de systèmes par des opérateurs ou séries de Volterra
- Modèles éventuellement boîte-noire “faciles” à identifier et à manipuler.

Point de vue qualitatif et domaines d'applications

Quelques comparaisons:

Cas	Relation explicite E/S	distorsions	auto-oscillation bifucation, chaos
Général	non	oui	oui
Volterra	oui	oui	non
Linéaire	oui	non	non

Point de vue qualitatif et domaines d'applications

Quelques comparaisons:

Cas	Relation explicite E/S	distorsions	auto-oscillation bifucation, chaos
Général	non	oui	oui
Volterra	oui	oui	non
Linéaire	oui	non	non

Domaines d'applications

- Electronique, Electromagnétisme, Mécanique, Ingénierie bio-médicale, etc
- Acoustique musicale (modèles **EDP**)

Partie I:

APPROCHE ENTREE/SORTIE

Quelques exemples

système linéaire stationnaire + non linéarité statique entière

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \cdots \int_0^t a_n \prod_{i=1}^n h(t - \tau_i) \prod_{i=1}^n u(t - \tau_i) [d\tau]_n$$

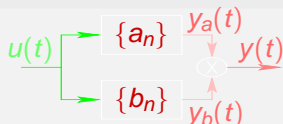
non linéarité statique entière

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \cdots \int_0^t a_n \prod_{i=1}^n \delta(t - \tau_i) \prod_{i=1}^n u(t - \tau_i) [d\tau]_n$$

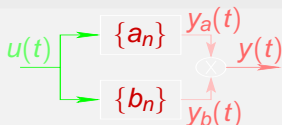
nonlinéarité statique + système linéaire:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \cdots \int_0^t h(t - \tau_1) a_n \prod_{i=2}^n \delta(\tau_1 - \tau_i) \prod_{i=1}^n u(\tau_i) [d\tau]_n$$

Lois d'interconnexion: ex Produit



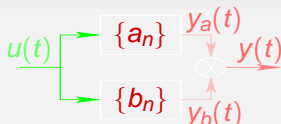
Calcul de $y(t) = y_a(t) y_b(t)$



Lois d'interconnexion: ex Produit

Calcul de $y(t) = y_a(t) y_b(t)$

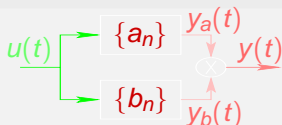
$$\begin{aligned}
 y(t) &= \sum_{p=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^p} \mathbf{a}_p(\theta_{1:p}) u(t - \theta_1) \dots u(t - \theta_p) d\theta_1 \dots d\theta_p \\
 &\quad \times \sum_{q=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^q} \mathbf{b}_q(\sigma_{1:q}) u(t - \sigma_1) \dots u(t - \sigma_q) d\sigma_1 \dots d\sigma_q
 \end{aligned}$$



Lois d'interconnexion: ex Produit

Calcul de $y(t) = y_a(t) y_b(t)$

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \sum_{p=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^p} a_p(\theta_{1:p}) u(t - \theta_1) \dots u(t - \theta_p) d\theta_1 \dots d\theta_p \\
 &\quad \times \sum_{q=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^q} b_q(\sigma_{1:q}) u(t - \sigma_1) \dots u(t - \sigma_q) d\sigma_1 \dots d\sigma_q \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\sum_{\substack{p,q \geq 1 \\ p+q=n}} a_p(\theta_{1:p}) b_q(\sigma_{1:q}) \right] u(t - \theta_1) \dots u(t - \theta_p) \\
 &\quad u(t - \sigma_1) \dots u(t - \sigma_q) d\theta_1 \dots d\theta_p d\sigma_1 \dots d\sigma_q
 \end{aligned}$$



Lois d'interconnexion: ex Produit

Calcul de $y(t) = y_a(t) y_b(t)$

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \sum_{p=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^p} a_p(\theta_{1:p}) u(t - \theta_1) \dots u(t - \theta_p) d\theta_1 \dots d\theta_p \\
 &\quad \times \sum_{q=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^q} b_q(\sigma_{1:q}) u(t - \sigma_1) \dots u(t - \sigma_q) d\sigma_1 \dots d\sigma_q \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\sum_{\substack{p,q \geq 1 \\ p+q=n}} a_p(\theta_{1:p}) b_q(\sigma_{1:q}) \right] u(t - \theta_1) \dots u(t - \theta_p) \\
 &\quad u(t - \sigma_1) \dots u(t - \sigma_q) d\theta_1 \dots d\theta_p d\sigma_1 \dots d\sigma_q
 \end{aligned}$$

Résultat: Noyaux équivalents c_n

$$c_n(\tau_{1:n}) = \sum_{p=1}^{n-1} a_p(\tau_{1:p}) b_{n-p}(\tau_{p+1:n})$$

Propriétés d'approximation d'opérateurs non linéaires

Rugh (1981)

- cadre fonctionnel: $\mathcal{U} = L^2(0, T)$ $T > 0$ muni de la norme
$$\|f\| = \left(\int_0^T |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

 $\mathcal{Y} = C(0, T)$ espace des fonctions continues sur $[0, T]$,
- opérateurs de Volterra à noyaux dans $L^2(0, T)$,
- opérateurs CTI nonlinéaire $N : L^2(0, T) \rightarrow C(0, T)$,
continu sur $U \subset \mathcal{U}$

Propriétés d'approximation d'opérateurs non linéaires

Soit $U_M = \{u \in \mathcal{U} / \|u\| \leq M,$
 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall \tau, |\tau| < \delta \Rightarrow \|u(\cdot + \tau) - u\| < \varepsilon\}$

Theorème

- U_M est un sous ensemble compact de \mathcal{U} ,
- pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un opérateur de Volterra T_I tel que:

$$\forall u \in U_M, \quad \|Nu - Vu\| \leq \varepsilon.$$

Propriétés d'approximation d'opérateurs non linéaires

Travaux de S. Boyd (1985)

- cadre fonctionnel: $C_0(\mathbb{R})$ espace des fonctions continues, bornées sur \mathbb{R}
muni de la norme $\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$,
- opérateurs de Volterra à noyaux dans $L^1(\mathbb{R}^+)$,
- opérateurs CTI nonlinéaire $N : C_0(\mathbb{R}) \rightarrow C_0(\mathbb{R})$,
continus sur $C_0(\mathbb{R})$
- hypothèse cruciale: **"Fading memory"** (Volterra, Wiener, Boyd)

Propriétés d'approximation d'opérateurs non linéaires

Définition

N est à mémoire effaçable (FM) sur $K \subset C_0(\mathbb{R})$ s'il existe une fonction décroissante $w : \mathbb{R}^+ \rightarrow]0, 1]$, telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} w(t) = 0$, et

$$\forall u \in K, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 /$$

$$\forall v \in K, \sup_{t \leq 0} |u(t) - v(t)| w(-t) < \delta \Rightarrow |Nu(0) - Nv(0)| \leq \varepsilon$$

Propriétés d'approximation d'opérateurs non linéaires

Soient $(M_1, M_2) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, et K le sous ensemble

$$K = \{u \in C_0(\mathbb{R}) / \|u\| \leq M_1, \forall \tau \geq 0, \|u(\cdot - \tau) - u\| \leq M_2 \tau\}$$

Theorème (Approximation par des opérateurs de Volterra)

Soit N un opérateur TI et FM) sur K , alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un opérateur de Volterra V tel que

$$\forall u \in K, \|Nu - Vu\| \leq \varepsilon.$$

Propriétés d'approximation d'opérateurs non linéaires

Soient $(M_1, M_2) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, et K le sous ensemble

$$K = \{u \in C_0(\mathbb{R}) / \|u\| \leq M_1, \forall \tau \geq 0, \|u(\cdot - \tau) - u\| \leq M_2 \tau\}$$

Théorème (Approximation par des systèmes dynamiques de dimension finie)

Dans les conditions du théorème précédent, on peut trouver un opérateur de Volterra V qui approche N sur K à ε près tel que V est l'opérateur entrée/sortie d'un système dynamique de dimension n de la forme:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = p(x)$$

où A est une matrice $n \times n$ Hurwitz, B un vecteur de taille n et p une fonction polynomiale de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} .

Applications en modélisation

- modélisation de comportements non linéaires à partir de données par recherche de noyaux au moyen d'une décomposition sur une base fonctionnelle (p.ex polynômes orthogonaux)
- idem en excitant le système avec des entrées choisies et en filtrant la réponse pour séparer les contributions temporelles des noyaux (en acoustique/mécanique, construction de modèles de Hammerstein)[M. Rebillat et col.]
- modèle de Volterra en contrôle prédictif non linéaire [F. Doyle]

Partie II:

SYSTEMES LINEAIRES ANALYTIQUES

systèmes linéaires analytiques

N opérateur défini par un système EDO “linéaire analytique”:

$T > 0$, $r = 1$ ou ∞ ,

$y = N(u)$, où $(u, y) \in L^r([0, T], \mathbb{R}^m) \times C([0, T], \mathbb{R})^p$,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))u(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ &= h(x(t)) \quad x(0) = x_{ini}\end{aligned}$$

f , g et h analytiques en x_0 .

(restreint au cas mono-entrée, et f , g et h ne dépendent pas du temps)

Existence du développement en série de Volterra

Theorème

Si $\dot{x}(t) = f(x(t))$, $x(0) = x_{ini}$ a une solution sur $[0, T]$, alors il existe $\rho > 0$ et une unique famille de noyaux symétriques $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que pour tout u vérifiant $\|u\| < \rho$,

$$y = h_0(t) + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \cdots \int_0^t W_n(t, \tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^n u(\tau_i) [d\tau]_i$$

Brockett (1976), Gilbert (1977), Lesiak et Krener (1979)

Si $f(x_{ini}) = 0$,

$$y = h_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \cdots \int_0^t h_n(t - \tau_1, \dots, t - \tau_n) \prod_{i=1}^n u(\tau_i) [d\tau]_i$$

Résultats et Questions

- Interprétation du développement en série de Volterra?
⇒ développement en série de Taylor de $N(u)$ autour de $u = 0$ (différentielles de Fréchet) [Gilbert, 1977]
- Expression générale des noyaux [Lesiak et Krener, Fliess, Lamnabhi]
- Convergence
⇒ quelques résultats pour des classes de systèmes linéaires analytiques particuliers

Un algorithme pratique d'implémentation

Idée: considérer $y = N(\varepsilon u)$ et chercher a priori x sous la forme

$$\text{d'une série } x = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \tilde{x}_i = \sum_{i=0}^{\infty} x_i.$$

Cas stationnaire: $x(0) = x_{ini}$ est un équilibre, on peut supposer que $x_{ini} = 0$, donc $f(0) = 0$.

$$\dot{x} = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{+\infty} A_k(\underbrace{x, \dots, x}_{k \text{ termes}}) \right)}_{f(x)} + \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{+\infty} B_k(\underbrace{x, \dots, x}_{k-1 \text{ termes}}) \right)}_{g(x)} u, \text{ sur } [0, T],$$

- $A_k \in \mathcal{ML}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $B_k \in \mathcal{ML}_{k-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$,
- Reclassement sur les puissances de ε

Un algorithme pratique d'implémentation

Idée: considérer $y = N(\varepsilon u)$ et chercher a priori x sous la forme

$$\text{d'une série } x = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \tilde{x}_i = \sum_{i=0}^{\infty} x_i.$$

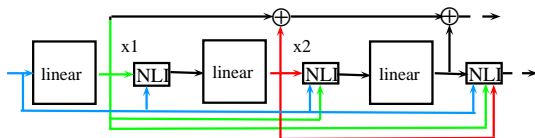
Cas stationnaire: $x(0) = x_{ini}$ est un équilibre, on peut supposer que $x_{ini} = 0$, donc $f(0) = 0$.

$$\dot{x} = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{+\infty} A_k(\underbrace{x, \dots, x}_{k \text{ termes}}) \right)}_{f(x)} + \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{+\infty} B_k(\underbrace{x, \dots, x}_{k-1 \text{ termes}}) \right)}_{g(x)} u, \text{ sur } [0, T],$$

- $x_0 = x_{ini} = 0, \quad \dot{x}_1 = A_1(x_1) + B_0 u, \quad x_1(0) = 0$
- $\dot{x}_2 = A_1(x_2) + A_2(x_1, x_1) + B_1(x_1) u, \quad x_2(0) = 0$

Un algorithme pratique d'implémentation

- Résolution de la suite de problèmes \Rightarrow noyaux



INL=Interconnexion Non Linéaire

Réalisation de dynamiques non linéaires au moyen de filtres analogiques linéaires et de non linéarités statiques

Simulation en temps réel.

Partie III:

CALCULS DE RAYONS DE CONVERGENCE DES DSV POUR DES SYSTEMES EDO ET EDP

Notations

- T désigne soit $[0, T]$ où $T > 0$, soit \mathbb{R}_+ .
- U and X espaces de Banach sur \mathbb{R} .
- $\mathcal{L}(U, X)$ et $\mathcal{L}(X)$: opérateurs linéaires bornés.
- $\mathcal{ML}_j(X, X)$ ($j \geq 2$): opérateurs multilinéaires bornés de $\underbrace{X \times \cdots \times X}_j$ dans X , $\|E\| = \sup_{\substack{(x_1, \dots, x_j) \in X^j \\ \|x_1\| = \cdots = \|x_j\| = 1}} \|E(x_1, \dots, x_j)\|$.
- $\mathcal{ML}_{j,k}(X, U, X)$ ($j \geq 1, k \geq 1$): opérateurs multilinéaires bornés de $\underbrace{X \times \cdots \times X}_j \times \underbrace{U \times \cdots \times U}_k$ dans X ,
 $\|E\| = \sup_{\substack{(x_1, \dots, x_j, u_1, \dots, u_k) \in X^j \times U^k \\ \|x_1\| = \cdots = \|u_k\| = 1}} \|E(x_1, \dots, x_j, u_1, \dots, u_k)\|$.
- $\mathcal{U} = L^\infty(T, U)$, $\mathcal{X} = L^\infty(T, X)$.

Systeme analytique contrôlé

Problème considéré:

$$\dot{x} = Ax + Bu + P(x) + Q(x, u), \text{ sur } \mathbb{T}, \quad (1)$$

$$x(0) = x_{\text{ini}} \in \mathbb{X}. \quad (2)$$

- A génère un semi-groupe C_0 sur \mathbb{X} , S , borne de croissance α (< 0 si $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$).
- $\beta > 0$ plus petit réel / pour $t \in \mathbb{T}$, $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{X})} \leq \beta \exp(\alpha t)$.
- $B \in \mathcal{L}(\mathbb{U}, \mathbb{X})$, $u \in \mathcal{U}$

Système analytique contrôlé

Problème considéré:

$$\dot{x} = Ax + Bu + P(x) + Q(x, u), \text{ sur } \mathbb{T}, \quad (1)$$

$$x(0) = x_{\text{ini}} \in \mathbb{X}. \quad (2)$$

$$\blacksquare P(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} A_k \underbrace{(x, \dots, x)}_k, \quad Q(x, u) = \sum_{k=2}^{+\infty} B_k \underbrace{(x, \dots, x, u)}_{k-1},$$

$$\blacksquare A_k \in \mathcal{ML}_j(\mathbb{X}, \mathbb{X}) \text{ et } B_k \in \mathcal{ML}_{k-1,1}(\mathbb{X}, \mathbb{U}, \mathbb{X}),$$

$$\blacksquare \sum_{k=2}^{+\infty} \|A_k\|_{\mathcal{ML}_k(\mathbb{X}, \mathbb{X})} z^k, \quad \sum_{k=2}^{+\infty} \|B_k\|_{\mathcal{ML}_{k-1,1}(\mathbb{X}, \mathbb{U}, \mathbb{X})} z^{k-1}$$

analytiques en $z = 0$.

Mise sous forme perturbative

- On introduit un paramètre de perturbation η

$$u = \eta \tilde{u} \quad , \quad x_{\text{ini}} = \eta \tilde{x}_{\text{ini}},$$

- Le problème s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (Ax + P(x)) + \eta(B\tilde{u} + Q(x, \eta u)), \\ x(0) &= \eta \tilde{x}_{\text{ini}} \end{aligned}$$

- Solution sous la forme

$$x = \sum_{m=0}^{\infty} \eta^m \tilde{x}_m = \sum_{m=0}^{\infty} x_m, \quad \text{où } x_m = \eta^m \tilde{x}_m.$$

Construction formelle

Substitution et reclassement sur les puissances de η :

$$x_0 = 0,$$

$$\forall t \in \mathbb{T}, \quad x_1(t) = S(t)x_{\text{ini}} + \int_0^t S(t-\tau) B u(\tau) d\tau,$$

$$x_m(t) = \int_0^t S(t-\tau) \chi_m(\tau) d\tau, \quad m \geq 2,$$

$$\begin{aligned} \chi_m(\tau) = & \sum_{k=2}^m \sum_{p \in \mathbb{M}_m^k} A_k(x_{p_1}(\tau), \dots, x_{p_k}(\tau)) \\ & + \sum_{k=2}^m \left\{ \begin{array}{l} \sum_{q \in \mathbb{M}_m^k} B_k(x_{q_1}(\tau), \dots, x_{q_{k-1}}(\tau), u(\tau)), \\ q_k = 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

\mathbb{M}_m^K ensemble des multi-index défini pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $K \in \mathbb{N}^*$ par

$$\mathbb{M}_m^K = \left\{ p \in (\mathbb{N}^*)^K \mid p_1 + \dots + p_K = m \right\}.$$

Majoration des $\|x_m\|_{\mathcal{X}}$

Lemme (1)

Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, χ_m et x_m sont dans \mathcal{X} . De plus, si $m \geq 2$:

$$\|x_m\|_{\mathcal{X}} \leq \sum_{k=2}^m \left[a_k \sum_{p \in \mathbb{M}_m^k} \prod_{i=1}^k \|x_{p_i}\|_{\mathcal{X}} + b_k \sum_{\left\{ \begin{array}{l} q \in \mathbb{M}_m^k \\ q_k = 1 \end{array} \right.} \left(\prod_{i=1}^{k-1} \|x_{q_i}\|_{\mathcal{X}} \right) \|u\|_{\mathcal{U}} \right], \quad (3)$$

avec $a_k = \gamma \|A_k\|_{\mathcal{M}\mathcal{L}_k(\mathbb{X}, \mathbb{X})}$, $b_k = \gamma \|B_k\|_{\mathcal{M}\mathcal{L}_{k-1,1}(\mathbb{X}, \mathbb{U}, \mathbb{X})}$ et

$$\int_{\mathbb{T}} \|S(\theta)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{X})} d\theta \leq \gamma < \infty.$$

Résultat de convergence I

Soit $\varepsilon > 0$,

(i) notons $a(z) = \sum_{k=2}^{+\infty} a_k z^{k-1}$, $b(z) = \sum_{k=2}^{+\infty} b_k z^{k-1}$,
(où les a_k et b_k sont définis dans le lemme 1),

(ii) et définissons la fonction

$$F_\varepsilon(z) = \frac{1 + \varepsilon b(z)}{1 - a(z)},$$

de rayon de convergence en $z = 0$ égal à $r \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$.

Résultat de convergence II

Theorème (Un résultat d'inversion)

L'équation

$$x F'_\varepsilon(x) - F_\varepsilon(x) = 0$$

a soit une unique solution σ (cas 1) ou aucune solution (cas 2) dans l'intervalle $]0, r[$. On définit $\rho_\varepsilon^* > 0$ par

$$\text{(cas 1)} \quad \rho_\varepsilon^* = \frac{\sigma}{F(\sigma)}, \quad (4)$$

$$\text{(cas 2)} \quad \rho_\varepsilon^* = \lim_{x \rightarrow r^-} \frac{x}{F(x)}. \quad (5)$$

Alors il existe une unique $z \mapsto \Phi_\varepsilon(z)$ analytique en $z = 0$ tq:

$$\Phi_\varepsilon(z) = z F_\varepsilon(\Phi_\varepsilon(z)).$$

Son rayon de convergence est $= \rho_\varepsilon^*$ (cas 1) ou $\geq \rho_\varepsilon^*$ (cas 2).

Résultat de convergence III

Theorème

Soient $u \in \mathcal{U}$ et $x_{\text{ini}} \in \mathbb{X}$, et $x_1 =$ défini par
 $x_1(t) = S(t)x_{\text{ini}} + \int_0^t S(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$. Si

$$\begin{aligned}\|u\|_{\mathcal{U}} &\leq \varepsilon \|x_1\|_{\mathcal{X}}, \\ \|x_1\|_{\mathcal{X}} &< \rho_\varepsilon,\end{aligned}$$

alors la série $x = \sum_{m \in \mathbb{N}^*} x_m$ est normalement convergente dans \mathcal{X} avec

$$\|x\|_{\mathcal{X}} \leq \Phi_\varepsilon \left(\|x_1\|_{\mathcal{X}} \right).$$

(i.e: $z \mapsto \Phi_\varepsilon \left(z \|x_1\|_{\mathcal{X}} \right)$ domine $z \mapsto \sum_{m \in \mathbb{N}^*} \|x_m\|_{\mathcal{X}} z^m$ lorsque $|z| < 1$.)

Idées de preuve

- th.II: conséquence directe des th. d'inversion régulière et singulière [Flajeolet, Sedgwick].
- th. III: on construit une suite $(\phi_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ tq $\phi_1 = 1$, et

$$\phi_m = \sum_{k=2}^m a_k \sum_{p \in \mathbb{M}_m^k} \prod_{i=1}^k \phi_{p_i} + \varepsilon \sum_{k=2}^m b_k \sum_{\substack{q \in \mathbb{M}_m^k \\ q_k = 1}} \prod_{i=1}^{k-1} \phi_{q_i}.$$

- on montre que $\|x_m\|_{\mathcal{X}} \leq \phi_m \|x_1\|_{\mathcal{X}}^m$
- on définit $\Phi_\varepsilon(X) = \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m X^m$ et on montre que $\Phi_\varepsilon(z) = z F_\varepsilon(\Phi_\varepsilon(z))$.
- le tour est joué!

Exemples: Une EDO quadratique

$$\dot{x} = -cx + dx^2 + u, \quad x(0) = x_{\text{ini}} > 0$$

$c, d > 0, \mathbb{T} = [0, +\infty[.$

Algorithme:

- $S(t) = e^{-ct}, \gamma = 1/c, a(z) = \frac{d}{c}z, b(z) = 0,$
- $F(z) = 1/(1 - \frac{d}{c}z),$ (indpt de ε)
- $r = c/d,$ et σ vérifie $\sigma = \frac{c}{2d}.$
- x_1 est la fonction $t \rightarrow x_{\text{ini}} e^{-ct} + \int_0^t e^{-c(t-\tau)} u(\tau) d\tau,$

$$\rho^* = c/4d.$$

Simulation

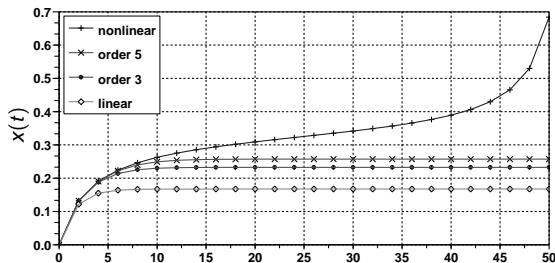


Figure: x et ses approximations pour $u = 1.03 * \rho^* / \gamma$ ($b = 1$, $x_{ini} = 0$).

Pour $u = 0$ et $x_{ini} \neq 0$, la borne trouvée ($|x_{ini}| \leq \rho^*$) est très pessimiste.

Stabilisation avec saturation

$$\dot{x} = ax - \tanh(\gamma x) + u, \quad (6)$$

où $\gamma > a > 0$ et $x(0) = 0$. On trouve pour $T = +\infty$ que

$$\rho^* = \left[(2 - \xi) \arctan \sqrt{1 - \xi} \right] - \sqrt{1 - \xi}, \quad \text{où } \xi = \frac{a}{\gamma}.$$

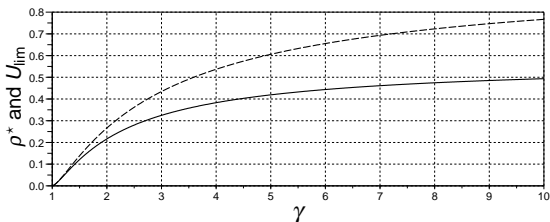


Figure: ρ^* (trait plein) et U_{lim} (trait pointillé) en fonction de γ .

EDP de réaction diffusion

Equation de réaction-diffusion 1-D conditions de Dirichlet

$$\partial_t f(t, z) = v \partial_z^2 f(t, z) - \mu f(t, z) + f(t, z) \int_0^1 f(t, x) dx + h(z) u(t) \quad (7)$$

$$f(t, 0) = f(t, 1) = 0, \quad (8)$$

$$f(0, z) = 0 \quad (9)$$

f définie sur $\mathbb{T} \times [0, 1]$ avec $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$, $h \in C([0, 1])$, v, μ constants positifs

EDP de réaction diffusion

- $U = \mathbb{R}$, $X = L^2([0, 1])$,
- Operateur A de domaine $\mathcal{D}(A) = H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)$,

$$A = v \partial_z^2 - \mu I,$$

Operateur B :

$$B(u) : z \mapsto h(z)u.$$

- $P(x) = A_2(x, x)$ avec $A_2 : (x, y) \mapsto x < y, 1 >$ et $Q = 0$.

EDP de réaction diffusion

A générateur infinitésimal de S tq

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq M \exp(\lambda_1 t),$$

avec $M = 1$ et $\lambda_1 = -(\mu + \nu\pi^2)$

$$\gamma = M \frac{1 - \exp(\lambda_1 T)}{|\lambda_1|}.$$

$$a_2 = \gamma, F_\varepsilon(X) = F(X) = \frac{1}{1-\gamma X}, \sigma = \frac{1}{2\gamma}$$

$$\rho^* = \frac{1}{4\gamma}, \text{ convergence pour } \|x_1\|_X < \rho^*.$$

Simulations numériques

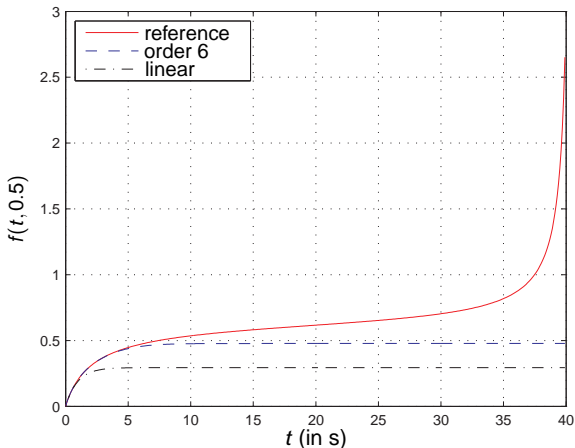


Figure: Simulation de $f(t, 0.5)$ pour $x_{\text{ini}} = 0$ et $u(t) = 1.1\rho^*$;
 $\nu = 0.005$, $\mu = 1$ et $h : z \mapsto \sin(\pi z)$ (1ere fonction propre de A).

CONCLUSION

Perspectives

Perspectives

- Convergence pour des systèmes analytiques en l'état et l'entrée

Perspectives

Perspectives

- Convergence pour des systèmes analytiques en l'état et l'entrée
- Convergence pour des classes d'EDP plus générales

Perspectives

Perspectives

- Convergence pour des systèmes analytiques en l'état et l'entrée
- Convergence pour des classes d'EDP plus générales
- Résolution d'EDP en noyaux de "Green-Poisson-Volterra"

Perspectives

Perspectives

- Convergence pour des systèmes analytiques en l'état et l'entrée
- Convergence pour des classes d'EDP plus générales
- Résolution d'EDP en noyaux de "Green-Poisson-Volterra"
- Etude des séries divergentes, troncature optimale

Perspectives

Perspectives

- Convergence pour des systèmes analytiques en l'état et l'entrée
- Convergence pour des classes d'EDP plus générales
- Résolution d'EDP en noyaux de "Green-Poisson-Volterra"
- Etude des séries divergentes, troncature optimale
- Couplage avec des techniques de réduction de modèle

Références

V. Volterra. *Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations.* Dover Publications, 1959.

Point de vue “entrée/sortie” et “réalisation”:

- **W. J. Rugh.** *Nonlinear System Theory, The Volterra/Wiener approach.* The Johns Hopkins University Press, 1981.
- **S. Boyd and L. Chua.** Fading memory and the problem of approximating nonlinear operators with Voltera series. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 32(11):1150–1161, 1985.
- **P. E. Crouch and P. C. Collingwood.** The observation space and realizations of finite volterra series. *SIAM journal on control and optimization*, 25(2):316–333, 1987.
- **M. Schetzen.** *The Volterra and Wiener theories of nonlinear systems.* Wiley-Interscience, 1989.

Références

Systèmes dynamiques analytiques et linéaires analytiques:

- **R. W. Brockett.** Volterra series and geometric control theory. *Automatica*, 12:167–176, 1976.
- **E. G. Gilbert.** Functional expansions for the response of nonlinear differential systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 22:909–921, 1977.
- **C. Lesiak, A.J. Krener.** the existence and uniqueness of Volterra series for nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 23:1090–1095, 1978.
- **M. Fliess.** Fonctionnelles causales non linéaires et indéterminées non commutatives. *Bulletin de la S.M.F.*, 109:3–40, 1981.
- **M. Fliess, M. Lamnabhi, and F. Lamnabhi-Lagarrigue.** An algebraic approach to nonlinear functional expansions. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 30(8):554–570, 1983.

Références

Convergence (algorithme de calcul de domaines)

- **R. W. Brockett.** Convergence of Volterra series on infinite intervals and bilinear approximations. In V. Lakshmikanthan, editor, *Nonlinear Systems and Applications*, pages 39–46. Academic Press, 1977.
- **F. Bullo.** Series expansions for analytic systems linear in control. *Automatica*, 38:1425–1432, 2002.
- **Z. K. Peng and Z. Q. Lang.** On the convergence of the Volterra-series representation of the Duffing's oscillators subjected to harmonic excitations. *Journal of Sound and Vibration*, 305:322–332, 2007.

Références

Convergence (algorithme de calcul de domaines), suite

- **X. J. Jing, Z. Q. Lang, and S. A. Billings.** Magnitude bounds of generalized frequency response functions for nonlinear Volterra systems described by narx model. *Automatica*, 44:838–845, 2008.
- **T. Hélie and B. Laroche.** On the convergence of volterra series of finite dimensional quadratic mimo systems. *International Journal of Control, special issue in Honor of Michel Fliess 60 th-birthday*, 81-3:358–370, 2008.
- **Thomas Hélie and Béatrice Laroche.** Computation of convergence bounds for Volterra series of analytic single input systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2010 (to appear)
- **Thomas Hélie and Béatrice Laroche.** Convergence of series expansions for some infinite dimensional nonlinear systems SSSC 2010, Ancona, Italy.

Références

Applications et Références:

- **M. Rébillat, R. Hennequin, E. Corteel, B.F.G. Katz** Identification of cascade of Hammerstein models for the description of non-linearities in vibrating devices. *Journal of Sound and Vibration*, 330:5:1018–1038, 2011.
- **F. J. Doyle, R. K. Pearson, B. A. Ogunnaike** Identification and Control Using Volterra Models. Springer, London, United Kingdom, 2001.
- **P. Flajolet, R. Sedgewick** Analytic Combinatorics. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.