

Mise au point d'un observateur-contrôleur non linéaire pour un modèle réduit de grue

Thomas DEVOS¹, Jean LÉVINE¹

¹Centre Automatique et Systèmes
35 Rue Saint Honoré, 77300 Fontainebleau, France

thomas.devos@ensmp.fr, jean.levine@ensmp.fr

Résumé— Nous étudions dans cet article la mise au point d'un observateur de l'état d'un modèle réduit de grue en vue de son utilisation pour le suivi de trajectoire et le rejet de perturbations. Le modèle réduit de grue considéré est celui étudié dans la thèse [2] (voir aussi [4], [3], [5]). Il est commandé par quatre moteurs à courant continu. Les observations disponibles sont d'une part les positions des quatre moteurs et d'autre part les coordonnées de la charge obtenues à partir d'images de deux caméras temps réel. Ces observations servent à synthétiser les observateurs proposés dans cet article. Nous étudions principalement deux observateurs, le premier étant un filtre de Kalman étendu, le second conçu à partir des moindres carrés sur une fenêtre glissante. Deux lois de bouclage sont considérées : un retour d'état complet robuste LQR sur le modèle linéaire tangent et un bouclage dynamique endogène linéarisant stabilisant l'écart à la trajectoire désirée. Des comparaisons en simulations sont présentées.

Mots-clés— commande non linéaire de grue, platitude différentielle, suivi de trajectoire, observateur-contrôleur.

I. INTRODUCTION

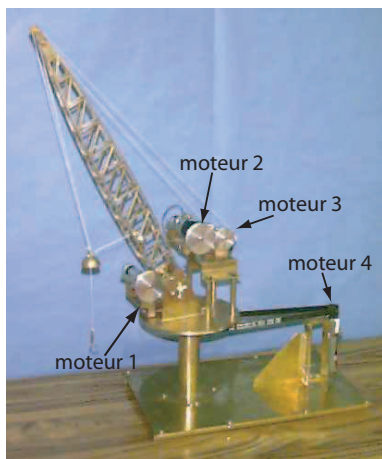


Fig. 1. Modèle réduit de la grue de la marine américaine

Les grues sont généralement utilisées dans les entreprises de construction et dans les ports de marchandises pour déplacer les charges d'une position initiale vers une position finale en évitant des obstacles. Grâce à l'assistance au pilotage du grutier par des lois de commande, on peut espérer améliorer la productivité notamment au plan du temps de transport des charges et de la sécurité du travail par conditions extérieures difficiles. On peut voir dans [3], [2] que les grues, et plus généralement toute une classe

d'engins de levage, sont des systèmes plats dont une sortie plate remarquable comprend les trois composantes de la position de la charge. Étant donnée une trajectoire désirée pour la sortie plate, on peut en déduire directement les commandes en boucle ouverte à envoyer aux différents moteurs pour générer cette trajectoire. Les oscillations autour de la position finale, que l'on observe généralement lors de déplacements de charges et qui peuvent être amplifiées par des perturbations extérieures comme les rafales de vent, peuvent donc être atténuées à la fois par le choix de trajectoires de référence arrivant au repos et du correcteur.

Lorsque seules les positions des moteurs sont mesurées, comme dans [2], [5], et sans recours à un observateur, on n'a pas accès aux vitesses et le plus commode est de considérer que la vitesse est nulle à l'origine, d'où l'utilisation de trajectoires arrêt-arrêt.

Le but de ce papier est de commander la grue en boucle fermée sur l'état complet estimé afin d'être capable de suivre les trajectoires désirées tout en annulant les perturbations extérieures, à partir de n'importe quelle condition initiale erronée. On regardera tout d'abord comment éliminer les perturbations en ayant uniquement des informations sur la longueur des différents câbles, puis dans un deuxième temps, on prendra en compte la position de la charge.

D'autres approches de la commande de grue ont été développées dans [9], [8], [1], [7].

Dans la section III, on présente un modèle dynamique simplifié de la grue. On utilisera en fait deux modèles différents de la grue, bien qu'équivalents, mais permettant un calcul de la commande plus efficace suivant la nature des mesures effectuées sur le système. Dans la section IV, dans les deux cas, on commence par créer un observateur qui servira, dans la section V, à nourrir la loi de commande en boucle fermée. On présentera des résultats de simulations pour le modèle réduit de grue de la marine américaine dans la section V.

II. DESCRIPTION DU MODÈLE RÉDUIT DE GRUE

Le modèle réduit considéré, mis au point au CAS, est la reproduction à l'échelle 1/80^e d'une grue de la marine américaine (figures 1 et 2). Il a été réalisé par un designer ¹ en 1998 dans une structure en laiton. Il est commandé par

¹Walter Rumsey : Artenciel, 24, rue le Regrattier, 75004 Paris, FRANCE. Tel : 01 43 25 73 40, Fax : 01 43 25 73 40

quatre moteurs à courant continu dont on peut répartir les tâches comme suit :

- Un moteur pour permettre la rotation de la plateforme supportant la flèche (moteur 4).
- Un autre moteur relié directement à la charge pour assurer ses mouvements verticaux (moteur 2).
- Un moteur relié à une poulie mobile qui en assure aussi les mouvements verticaux (moteur 3).
- Et enfin, un quatrième moteur qui agit sur les déplacements horizontaux de la charge par l'intermédiaire de la poulie mobile (moteur 1).

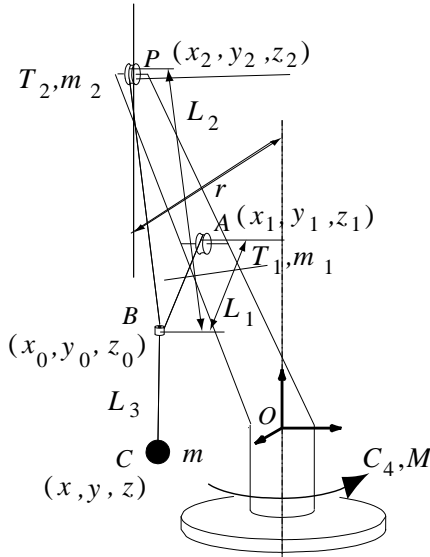


Fig. 2. Grue de l'US Navy en trois dimensions

Les moteurs possèdent des capteurs incrémentaux qui permettent ainsi à tout instant de connaître leur vitesse de rotation ainsi que leur position angulaire et donc les longueurs des différents câbles (à condition d'avoir réalisé une initialisation correcte). Nous utiliserons dans la suite les coordonnées des points importants de la grue comme la position des poulies fixes (c'est à dire les poulies en A et P de coordonnées respectives (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) , la position de la charge de coordonnées (x, y, z) (point C) et la position de la poulie mobile (x_0, y_0, z_0) (point B). Par ailleurs, les trois poulies fixes étant alignées, on a $\overrightarrow{OA} = \alpha_1 \overrightarrow{OP}$.

III. MODÈLE DE LA GRUE

Pour représenter la grue, nous utiliserons deux modèles équivalents mais présentant des caractéristiques différentes pour les simulations et l'analyse de structure. Le premier modèle est mis au point à partir du principe fondamental de la dynamique alors que le deuxième résulte de la méthode lagrangienne. Dans cette partie, nous allons modéliser la grue en négligeant la masse de la poulie mobile, très faible devant les autres masses mobiles. Cette hypothèse revient à supposer que la charge, la poulie mobile ainsi que les câbles qui les relient aux poulies fixes sont dans le même plan représenté dans la figure 3(b). On peut alors décrire la grue en repérant ce dernier plan par l'angle ξ , l'angle de rotation de la flèche de la grue (voir la figure 3(a)) et l'angle φ entre le plan vertical passant par l'axe OA et le

plan formé par les points 0, A, B, C, P, puis les positions des câbles et de la charge, dans le plan considéré, par les angles γ et β et la longueur L_3 (voir la figure 3(b)).

Voici les équations de base permettant de trouver le modèle explicite de la grue ([2]). On définit trois repères différents. Soit K^b le repère principal, K^g le repère correspondant à une rotation d'angle ξ autour de l'axe z^b et enfin, le repère K choisi pour que les points A, B, C et P appartiennent à son plan (x, z) (voir figure 3(a)). On passe d'un repère à un autre par deux matrices de rotation $\Omega_{K^b K^g}(\xi)$ et $\Omega_{K^g K}(\varphi)$ (voir VII).

On peut donc définir les coordonnées de la position du point C dans le repère K en fonction des angles γ et β , et de la longueur L_3 . En notant x_K , y_K et z_K les coordonnées de la charge dans le repère K, et α l'angle fixe entre la flèche de la grue et la verticale, nous avons les équations suivantes :

$$x_K = k \sin \alpha + L_1 \sin(\gamma + (\alpha - \beta)) + L_3 \sin(2\gamma + (\alpha - \beta)) \quad (1)$$

$$y_K = 0 \quad (2)$$

$$z_K = k \cos \alpha + L_1 \cos(\gamma + (\alpha - \beta)) + L_3 \cos(2\gamma + (\alpha - \beta)) \quad (3)$$

avec L_1 et L_2 dépendant de β et γ . En effet, on a :

$$L_1 = \frac{l \sin \beta}{\sin \gamma} \quad (4)$$

$$L_2 = \frac{l \sin(\gamma - \beta)}{\sin \gamma} \quad (5)$$

En notant x_{K^b} , y_{K^b} et z_{K^b} les coordonnées du point C dans le repère K^b , le principe fondamental de la dynamique appliqué à la charge nous donne la formule suivante :

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x}_{K^b} \\ \ddot{y}_{K^b} \\ \ddot{z}_{K^b} + g \end{bmatrix} = \Omega_{K^b K^g} \cdot \Omega_{K^g K} \begin{bmatrix} -T_3 \sin \theta \\ 0 \\ T_3 \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (6)$$

où θ est l'angle situé entre \overrightarrow{BC} et l'axe z du repère K et T_3 la valeur de la tension du câble au point C. Enfin, nous avons les trois équations supplémentaires correspondant aux dynamiques des moteurs commandant les câbles et la plateforme :

$$\begin{aligned} \frac{J_1}{\rho_1} \ddot{L}_1 &= T_1 \rho_1 - u_1 \\ \frac{J_2}{\rho_2} (\ddot{L}_2 + \ddot{L}_3) &= T_2 \rho_2 - u_2 \\ J_{pf} \ddot{\xi} &= \text{proj}_{z^b} \left(T_2 \left(\overrightarrow{OP} \times \frac{\overrightarrow{PB}}{\|\overrightarrow{PB}\|} \right) + T_1 \left(\overrightarrow{OA} \times \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} \right) \right) \\ &\quad + u_4 \end{aligned} \quad (7)$$

avec T_1 et T_2 la valeur des tensions des câbles aux points A et P, u_1 et u_2 les couples délivrés par les moteurs associés aux poulies en A et P respectivement et u_4 le couple de rotation de la plateforme.

En combinant ces différentes équations et les changements de repère, on peut écrire la dynamique de la grue sous la forme $A(x, u) \dot{x} = b(x, u)$, ce qui nous permettra ensuite en inversant la matrice $A(x, u)$ d'avoir la forme explicite $\dot{x} = f(x, u)$. Les quantités mesurées sont le vecteur $y = (\xi, L_1, L)$ où $L = L_2 + L_3$. Le vecteur d'état x de dimension 10 est donc composé des angles ξ , φ , γ et β , de la longueur L_3 ainsi que leurs dérivées premières.

Une autre méthode pour modéliser la dynamique de la grue de façon équivalente, est d'utiliser le Lagrangien. (voir [3]). Si on néglige m_0 (masse de la poulie mobile), cette dernière n'a plus de dynamique propre, sa position est entièrement connue à partir des autres équations (dynamique sur la position de la charge, sur les longueurs ...). D'après [3] considérons le Lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + M(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + m_1 \dot{L}_1^2 + m_2(\dot{L}_2 + \dot{L}_3)^2 \right) - mgz$$

ainsi que les 4 contraintes :

$$\frac{1}{2}((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - L_3^2) = 0 \quad (8)$$

$$\frac{1}{2}((x_0 - \alpha_1 x_2)^2 + (y_0 - \alpha_1 y_2)^2 + (z_0 - \alpha_1 z_2)^2 - L_1^2) = 0 \quad (9)$$

$$\frac{1}{2}((x_0 - x_2)^2 + (y_0 - y_2)^2 + (z_0 - z_2)^2 - L_2^2) = 0 \quad (10)$$

$$\frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2 - r^2) = 0 \quad (11)$$

et introduisons les multiplicateurs $(\lambda_1, \dots, \lambda_4)$ associés à ces contraintes. On obtient :

$$m\ddot{x} = \lambda_1(x - x_0) \quad (12)$$

$$m\ddot{y} = \lambda_1(y - y_0) \quad (13)$$

$$m\ddot{z} = \lambda_1(z - z_0) - mg \quad (14)$$

$$0 = -\lambda_1(x - x_0) + \lambda_2(x_0 - \alpha_1 x_2) + \lambda_3(x_0 - x_2) \quad (15)$$

$$0 = -\lambda_1(y - y_0) + \lambda_2(y_0 - \alpha_1 y_2) + \lambda_3(y_0 - y_2) \quad (16)$$

$$0 = -\lambda_1(z - z_0) + \lambda_2(z_0 - \alpha_1 z_2) + \lambda_3(z_0 - z_2) \quad (17)$$

$$0 = \lambda_1 L_3 - \lambda_3 L_2 \quad (18)$$

$$m_1 \ddot{L}_1 = -\lambda_2 L_1 - \frac{u_1}{\rho_1} \quad (19)$$

$$m_3 \ddot{L}_3 = -\lambda_1 L_3 - \frac{u_2}{\rho_2} \quad (20)$$

$$M\ddot{x}_2 = -\lambda_2 \alpha_1 (x_0 - \alpha_1 x_2) - \lambda_3 (x_0 - x_2) + \lambda_4 x_2 - \frac{u_4}{r} \frac{y_2}{r} \quad (21)$$

$$M\ddot{y}_2 = -\lambda_2 \alpha_1 (y_0 - \alpha_1 y_2) - \lambda_3 (y_0 - y_2) + \lambda_4 y_2 + \frac{u_4}{r} \frac{x_2}{r} \quad (22)$$

avec m la masse de la charge, m_1 , m_2 et M les masses équivalentes respectives des moteurs 1, 2 et de la plateforme (c'est à dire $m_i = \frac{J_i}{\rho_i^2}$ avec ρ_i le rayon des poulies et $M = \frac{J_{pf}}{r^2}$), u_1 et u_2 les couples délivrés par les moteurs associés aux poulies en A et P respectivement et u_4 le couple de rotation de la plateforme.

IV. OBSERVATEURS

Nous allons étudier dans la suite deux cas différents. Dans le premier cas, on considère que les seules mesures disponibles sont les positions incrémentales des moteurs, ou ce qui revient au même $y = (\xi, L_1, L)$ (voir equations 4 et 5). Il nous faut donc créer un observateur permettant de reconstruire le vecteur d'état pour pouvoir ensuite effectuer une commande par retour d'état, par imitation du principe de séparation du linéaire. Pour ce faire, on a fait le choix le plus courant d'un observateur de Kalman étendu.

Dans un deuxième cas, on rajoute deux caméras qui nous permettent d'obtenir les coordonnées x , y et z de la charge.

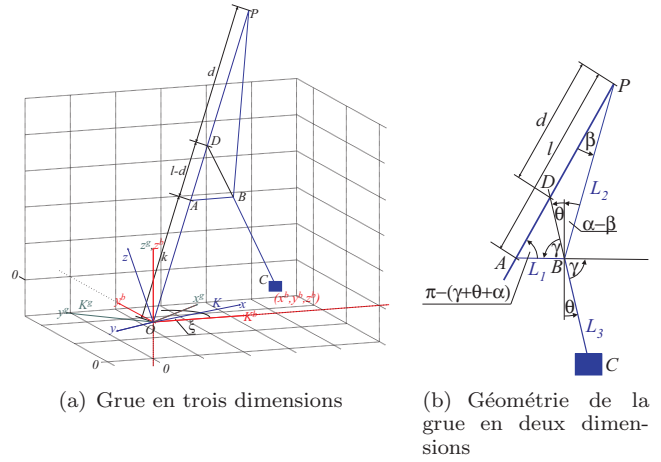


Fig. 3. Géométrie de la grue

On utilisera dans ce cas un observateur des dérivées de ces signaux pour obtenir les dérivées des coordonnées de la charge jusqu'à l'ordre trois. Ceci nous permet en utilisant la platitude de la grue d'effectuer un bouclage dynamique endogène linéarisant.

A. Kalman étendu

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (23)$$

avec le vecteur d'état $x = (\xi, \varphi, \gamma, \alpha - \beta, L_3, \dot{\xi}, \dot{\varphi}, \dot{\gamma}, -\dot{\beta}, \dot{L}_3)$ et la mesure $y = (\xi, L_1, L)$.

On commence par calculer le linéarisé tangent du système le long de la trajectoire. On obtient ainsi les matrices A_{lin} , B_{lin} et C_{lin} permettant de calculer la matrice K du filtre de Kalman. Par souci de simplicité, nous omettons ces calculs. L'équation de l'observateur est de la forme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}} = A_{lin}(\hat{X} - X_{ref}) + B_{lin}(u - u_{ref}) + K(Y - \hat{Y}) \\ \hat{Y} = h(\hat{X}) \end{cases}$$

or on peut écrire Y sous la forme

$$Y \approx C_{eq} + C_{lin}(X - X_{ref}) \approx h(X_{ref}) + \frac{\partial h}{\partial X} \Big|_{X_{ref}} (X - X_{ref})$$

avec X_{ref} correspondant à la trajectoire de référence. On utilise les matrices représentant les propriétés statistiques du bruit comme matrice de pondération pour effectuer un compromis entre les convergences des différentes variables du vecteur d'état. Lors de la convergence, ces matrices permettent également de gérer le dépassement des différents signaux qui ne doivent pas être trop importants sous peine de saturer les actionneurs en boucle fermée.

B. Obtention des dérivées successives des coordonnées de la charge

Maintenant, on considère qu'on connaît la position de la charge grâce aux deux caméras. On a besoin des dérivées successives des différentes coordonnées pour effectuer le bouclage. Comme les signaux sont bruités, on ne peut pas les dériver. On utilise les moindres carrés pour déterminer

les coefficients d'une approximation polynômiale du signal. On considère que notre signal peut s'écrire localement sous la forme $x_N(t) = \sum_{\nu}^N x^{(\nu)}(0) \frac{t^\nu}{\nu!}$ grâce à son développement de Taylor. La méthode utilisée dans la suite nous permet de calculer les différents coefficients du polynôme et donc d'obtenir les dérivées des coordonnées de la charge.

On considère le vecteur :

$\Theta = (x_N(0), \dot{x}_N(0), \ddot{x}_N(0), x_N^{(3)}(0), x_N^{(4)}(0))^T$ comprenant les coefficients du polynôme. On utilise une fenêtre glissante comprenant n points (dépendant de la période d'échantillonnage), ce qui donne l'équation suivante :

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & T & \dots & T^4 \\ 1 & 2T & \dots & (2T)^4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & nT & \dots & (nT)^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_N(0) \\ \dot{x}_N(0) \\ \ddot{x}_N(0) \\ x_N^{(3)}(0) \\ x_N^{(4)}(0) \end{pmatrix} + \epsilon \quad (24)$$

$$\stackrel{\Delta}{=} M\Theta + \epsilon$$

$$\Rightarrow \Theta = (M^T M)^{-1} M^T Y$$

On reconstitue les dérivées successives du signal de départ en reportant les composantes du vecteur Θ dans le polynôme considéré.

C. Résultats des simulations

Voici les résultats obtenus en simulation avec sur chaque figure la dérivée théorique et la dérivée obtenue par la méthode de la section IV-B. Les simulations de la figure 4 représentent la coordonnée x de la position de la charge ainsi que ses trois premières dérivées. Chaque figure contient deux courbes : le signal théorique, le signal estimé par moindres carrés. Les deux courbes sont très proches pour les premières dérivées. Pour la dérivée troisième de x , on sépare les deux signaux sur des figures différentes. Le pas d'échantillonnage est 0.0005s pour une fenêtre glissante de 0.4s. L'amplitude du bruit de sortie ajouté à x est compris dans l'intervalle $[-1e^{-3}, 1e^{-3}]$.

V. OBSERVATEUR-CONTRÔLEUR

Maintenant, à partir des variables obtenues par les différents observateurs vus précédemment, nous allons choisir et régler le correcteur permettant d'avoir un bon suivi de trajectoire et de rejeter les perturbations efficacement. À partir du vecteur d'état obtenu par le filtre de Kalman, on choisit une commande robuste LQ pour boucler le système. Dans une deuxième partie, nous verrons le choix des gains du bouclage dynamique endogène linéarisant obtenu à partir des coordonnées de la charge et de leurs dérivées successives.

A. Bouclage LQR

Comme dans la partie IV-A, on utilise le linéarisé tangent du système pour choisir les gains de la matrice de retour d'état. De la même façon, on utilise des matrices des propriétés statistiques du bruit comme pondération pour effectuer un compromis entre les temps de réponse des différentes variables ainsi que la puissance des commandes. En effet, dans la pratique, il faut éviter de saturer les actionneurs. La figure 5 nous montre les résultats obtenus en simulation à partir de cette méthode.

e-STA copyright © 2007 by see

Volume 4 (2007), N°1 pp 13-18

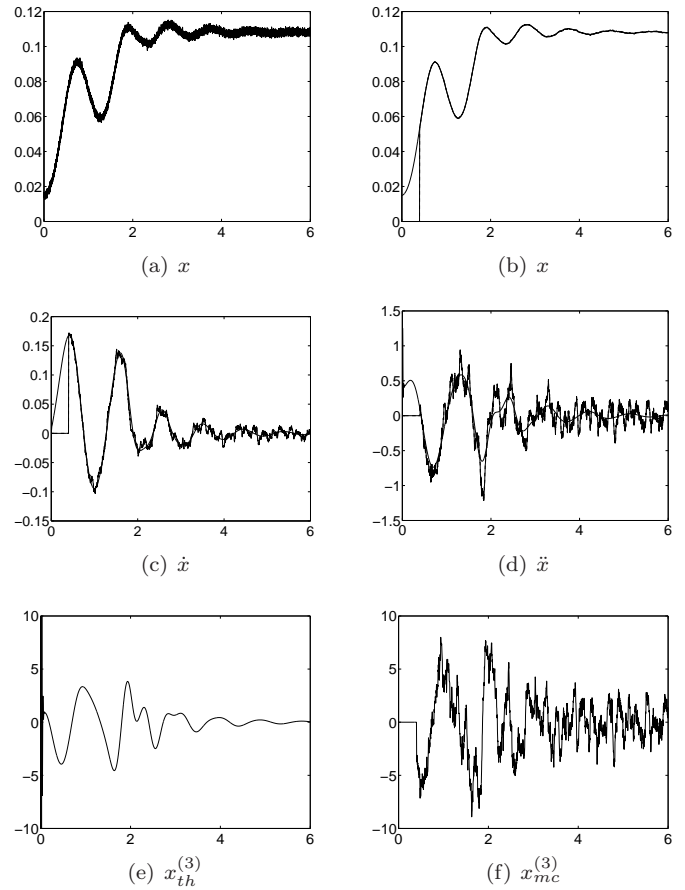


Fig. 4. Simulations : estimation des dérivées jusqu'à l'ordre 3 pour un bruit blanc de variance $1e^{-6}$; (a) : Coordonnée x réelle; (b) : Coordonnées x théorique et estimée; (c) : dérivées de x théorique et estimée; (d) : dérivées secondes de x théorique et estimée; (e) : dérivée troisième de x théorique; (f) : dérivée de x estimée par moindres carrés;

B. Bouclage dynamique endogène linéarisant

La grue est un système plat de sortie plate x , y et z , les coordonnées de la position de la charge. Nous avons vu précédemment deux méthodes pour obtenir les dérivées successives de cette position. Mais lors de la fermeture de la boucle, il faut au besoin redéfinir certains paramètres (taille de la fenêtre, ordre du polynôme ...) et bien définir les gains de la boucle fermée à cause des changements de dynamiques des différents signaux bouclés. Comme les dérivées de x , y et z jusqu'à l'ordre quatre sont utilisées, nous pouvons réécrire le système sous la forme :

$$\begin{cases} x^{(4)} = v_1 \\ y^{(4)} = v_2 \\ z^{(4)} = v_3 \end{cases}$$

avec v_1 , v_2 et v_3 les nouvelles commandes stabilisant la grue autour de la trajectoire de référence. On peut écrire le vecteur de commande $v = (v_1, v_2, v_3)$ sous la forme :

$$v = (x_{ref}^{(4)}, y_{ref}^{(4)}, z_{ref}^{(4)}) - \gamma_4((\tilde{x}^{(3)}, \tilde{y}^{(3)}, \tilde{z}^{(3)}) - (x_{ref}^{(3)}, y_{ref}^{(3)}, z_{ref}^{(3)})) - \gamma_3((\tilde{\ddot{x}}, \tilde{\ddot{y}}, \tilde{\ddot{z}}) - (\ddot{x}_{ref}, \ddot{y}_{ref}, \ddot{z}_{ref})) - \gamma_2((\tilde{\dot{x}}, \tilde{\dot{y}}, \tilde{\dot{z}}) - (\dot{x}_{ref}, \dot{y}_{ref}, \dot{z}_{ref})) - \gamma_1((\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) - (x_{ref}, y_{ref}, z_{ref}))$$

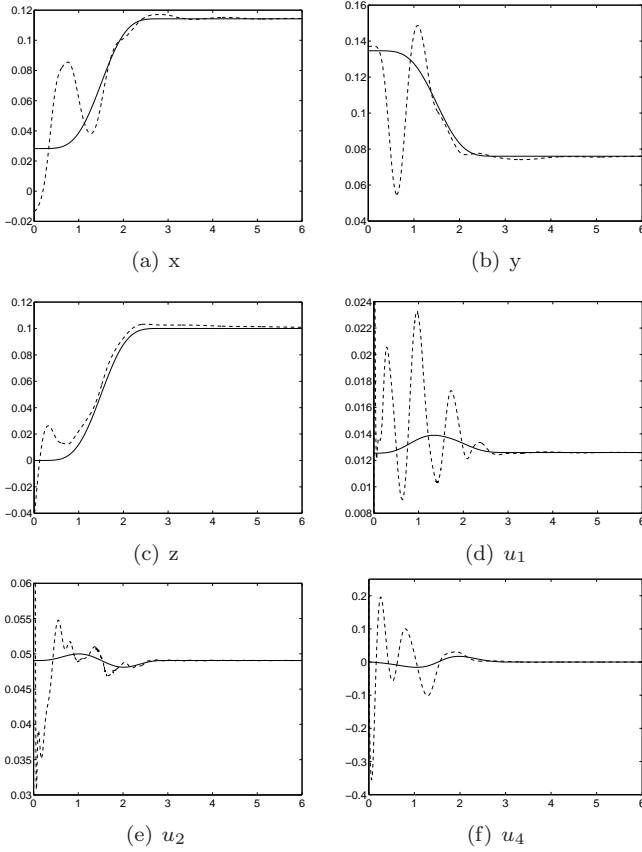


Fig. 5. Simulations : Bouclage LQR; (a) Coordonnée x réelle et référence; (b) Coordonnée y réelle et référence; (c) Coordonnée z réelle et référence; (d) Commande u_1 réelle et référence; (e) Commande u_2 réelle et référence; (f) Commande u_4 réelle et référence.

où \tilde{x}, \tilde{y} et \tilde{z} sont les estimées de x, y et z respectivement, précédemment calculées. Le choix des valeurs de $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ et γ_4 nous permet de régler les dynamiques du système en boucle fermée. Les simulations de la figure 6 sont obtenues avec les valeurs : $\gamma_1 = 625$, $\gamma_2 = 250$, $\gamma_3 = 150$ et $\gamma_4 = 20$.

VI. CONCLUSION

Deux méthodes permettant de contrôler une grue en boucle fermée ainsi que les résultats de simulations ont été présentés dans ce papier. Une fois la trajectoire arrêt-arrêt déterminée, les observateurs-contrôleurs mis en place permettent d'atténuer les oscillations de la charge et de rejoindre la trajectoire de référence. Le fait d'observer la sortie plate, qui implique d'ajouter deux caméras, permet de meilleurs résultats.

VII. ANNEXES

Les matrices de rotation pour les changements de repères sont les suivantes :

$$\Omega_{K^b K^g} = \begin{pmatrix} \cos \xi & -\sin \xi & 0 \\ \sin \xi & \cos \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$\Omega_{K^g K} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_4 & \sigma_5 & \sigma_6 \\ \sigma_7 & \sigma_8 & \sigma_9 \end{pmatrix} \quad (26)$$

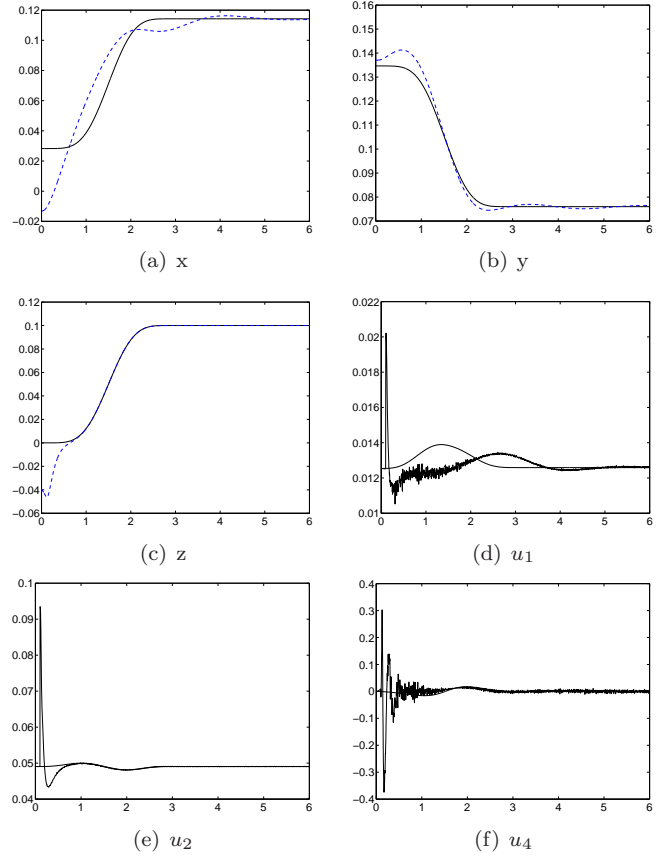


Fig. 6. Simulations : Bouclage dynamique endogène linéarisant; (a) Coordonnée x réelle et référence; (b) Coordonnée y réelle et référence; (c) Coordonnée z réelle et référence; (d) Commande u_1 réelle et référence; (e) Commande u_2 réelle et référence; (f) Commande u_4 réelle et référence.

avec

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sin^2 \alpha (1 - \cos \varphi) + \cos \varphi \\ \sigma_2 &= -\cos \alpha \sin \varphi \\ \sigma_3 &= \sin \alpha \cos \alpha (1 - \cos \varphi) \\ \sigma_4 &= \cos \alpha \sin \varphi \\ \sigma_5 &= \cos \varphi \\ \sigma_6 &= -\sin \alpha \sin \varphi \\ \sigma_7 &= \sin \alpha \cos \alpha (1 - \cos \varphi) \\ \sigma_8 &= \sin \alpha \sin \varphi \\ \sigma_9 &= \cos^2 \alpha (1 - \cos \varphi) + \cos \varphi \end{aligned}$$

RÉFÉRENCES

- [1] K. S. Hong, J. H. Kim, et K.I.Lee, « Control of a container crane : fast traversing, and residual sway control from the perspective of controlling an underactuated system ». In *Proceedings of the American Control Conference*, pp 1294-1298, Philadelphia, PA, June 1998.
- [2] B. Kiss, *Planification de trajectoires et commande d'une classe de systèmes mécaniques plats et liouvilliens*. Thèse, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2001.
- [3] B. Kiss, J. Lévine et Ph. Mullhaupt, « Modelling and motion planning for a class of weight handling equipment ». *System Science Journal*, Vol. 26., No. 4, 2000.
- [4] B. Kiss, J. Lévine et Ph. Mullhaupt, « Modelling, flatness and simulation of a class of cranes ». *Periodica Polytechnica*, 43(3) :215-225, 1999.
- [5] B. Kiss, J. Lévine et Ph. Mullhaupt, « A simple output feedback PD controller for non linear cranes ». In *Proceedings of the 39th*

Conference on Decision and Control, Sydney, Australia, 12-15 December 2000.

- [6] B. Kiss, J. Lévine et Ph. Mullhaupt, « Control of a reduced size model of US Navy crane using only motor position sensors ». A. Isodori, F. Lamnabhi-Lagarrigue, et W. Respondek (eds.), *Nonlinear Control in the Year 2000*, Vol. 2, Springer, 2000, 1-12.
- [7] Z. N. Masoud, A.H. Neyfeh et A. Al-Mousa, « Delayed position feedback controller for the reduction of payload pendulations of rotary cranes ». *Journal of Vibration and Control*, vol. 9, No. 1-2, pp. 257-277, January 2003.
- [8] R. H. Overton, « Anti-sway control system for cantilever cranes ». United States Patent, June 1996. Patent No. 5,526,946.
- [9] G. G. Parker, B. Petterson, C. Dohrman, et R. D. Robinett, « Command shaping for residual vibration free crane maneuvers ». *In Proceedings of the American Control Conference*, vol. 1, pp 934-938, Seattle, WA, June 21-23, 1995.
- [10] E.T. Whittaker, *A treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*. Cambridge University Press, 1993.