

# Estimation Active de la Phase Initiale des Moteurs Synchrones

Jérémy MALAIZÉ<sup>1,2</sup>, Jean LÉVINE<sup>1</sup>, Roger DESAILLY<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Centre Automatique et Systèmes

École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 35 rue Saint-Honoré, 77300 Fontainebleau, France

<sup>2</sup> Micro-Contrôle

Z.I. de Beaune-la-Rolande , 45340 Beaune-la-Rolande, France

jeremy.malaize@newport.com, jean.levine@ensmp.fr, roger.desailly@newport.com

*Résumé*— On considère le problème d'estimation de la phase initiale (ou angle de calage) à partir de mouvements micrométriques pour les moteurs synchrones. La méthode n'utilise que des mesures de déplacement et le gain du moteur, sa charge et les frottements sont inconnus. Le modèle utilisé est à second membre discontinu en raison des frottements. On génère une famille de trajectoires (méthode active) permettant d'obtenir la phase initiale comme fonction de l'amplitude des déplacements en séparant les contributions de la phase initiale, des frottements et de la masse. Cette séparation est obtenue grâce à une classification des comportements dynamiques du système à second membre discontinu en réponse à des entrées périodiques. Une formule approchée de l'estimée est proposée et des résultats expérimentaux présentés. On compare ces résultats avec ceux d'une méthode classique, implémentable dans les mêmes conditions.

*Mots-clés*— moteurs synchrones, phase initiale, angle de calage, estimation, planification de trajectoires, classification d'orbites périodiques.

## I. INTRODUCTION

On s'intéresse aux moteurs synchrones linéaires et rotatifs utilisés dans des applications de positionnement haute précision, telles que la fabrication des micro-processeurs ([1] et [2]). La suppression du système collecteur-balai permet d'atteindre un niveau de performance supérieur tout en garantissant une meilleure fiabilité. En présence de balais, les commutations de courant, ainsi que l'initialisation du moteur, sont réalisées mécaniquement. Par contre, en l'absence de contact, pour réaliser les commutations en phase avec le champ magnétique, des mesures supplémentaires et un algorithme sont nécessaires. C'est cette synchronisation du courant avec la position des bobines au sein du champ magnétique que l'on appelle initialisation. Cet article propose une méthode pour estimer la position initiale (modulo la période magnétique) du rotor des moteurs synchrones en n'utilisant que des mesures de déplacement<sup>1</sup>.

Pour certaines applications industrielles, on cherche à piloter les moteurs synchrones avec un minimum de capteurs. Les capteurs de courant sont préférés à ceux de position qui sont nettement plus onéreux et délicats à installer et mettre en œuvre. De nombreuses contributions permettent de déterminer la position initiale du rotor (par

rapport au champ magnétique) à partir de mesures de courant. On distingue principalement deux méthodes dont la première consiste à estimer la force contre-électromotrice induite dans le moteur à l'aide d'un observateur ([3] et [4]), et la seconde à évaluer la valeur de l'inductance des phases électriques du moteur en envoyant des signaux spécifiques ([5], [6] ou [7]), ou aucun signal ([8] ou [9]).

Pour atteindre des précisions micrométriques, voire inférieures, il est indispensable d'ajouter des capteurs optiques de position. Les résolveurs, ou capteurs absolus sont très onéreux et difficiles à mettre en place. Dans cet article, les capteurs utilisés sont des codeurs optiques incrémentaux qui mesurent le déplacement relatif autour de la position initiale. Pour des raisons technologiques qui sortent du cadre de cet article, les mesures électriques ne sont pas utilisées ici. La figure 1 montre le schéma bloc de l'ensemble moteur, contrôleur, initialisation. Insistons sur le fait que, dans les conditions de la figure 1, il n'est pas nécessaire d'ajouter des capteurs à effet Hall redondants et qui seraient uniquement dédiés à l'initialisation. A cette solution technologique, on oppose une méthode algorithmique utilisant des capteurs de toutes façons indispensables pour les applications de haute précision considérées.

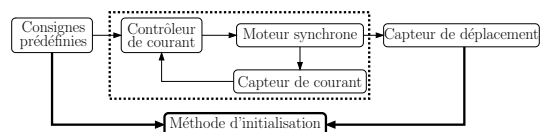


Fig. 1. Procédure d'estimation.

Dans le contexte de la figure 1, on peut envisager une première solution (dite « classique » par la suite) qui consiste à maintenir un courant constant sur une des phases du moteur jusqu'au repos mécanique. Il est alors possible de relier les informations fournies par les codeurs incrémentaux au champ magnétique. Cette méthode présente cependant l'inconvénient de générer des déplacements dont l'amplitude est comparable à la période spatiale du champ magnétique, c'est-à-dire plusieurs millimètres. Cet aspect n'est pas acceptable pour les applications considérées.

Dans ce travail, les déplacements générés peuvent être

<sup>1</sup>La méthode fait l'objet d'un dépôt de brevet en cours aux USA.

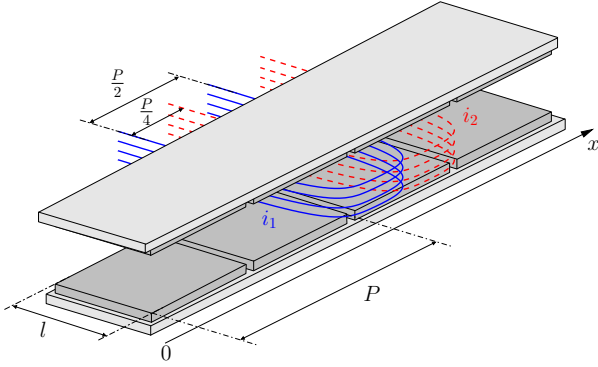


Fig. 2. Moteur linéaire biphasé.

choisis arbitrairement faibles (typiquement quelques centaines de microns). L'originalité des résultats provient d'une part de l'utilisation d'un capteur de déplacement pour déterminer la position initiale (modulo le pas des aimants) sans mesurer le champ magnétique, ni utiliser les mesures de courant, et, d'autre part, du fait que les paramètres du moteur (gain, masse embarquée et frottements) ne sont pas connus. Dans ces conditions, la méthode proposée estime la phase initiale tout en ne nécessitant que peu de calculs.

Dans la suite, on modélise la dynamique des moteurs synchrones tout en mettant en évidence les enjeux relatifs à la détermination de la phase initiale avec précision : garantir un positionnement stable et précis tout en ayant une efficacité énergétique maximale (section II). On établit ensuite le lien existant entre la phase initiale et l'amplitude des déplacements en réponse à une sollicitation périodique (section III). Cette analyse s'appuie notamment sur une classification complète des orbites périodiques du système soumis à des oscillations forcées. En particulier, on montre comment l'amplitude des frottements, modélisés par une fonction du signe de la vitesse et donnant lieu à un système à second membre discontinu au sens de Filippov [10], modifie les trajectoires suivies par le système. On compare alors le déplacement mesuré à celui prédit par cette classification pour en extraire la phase initiale en s'appuyant de plus sur une approximation. Dans la section IV, des résultats expérimentaux valident les différentes hypothèses et illustrent la supériorité de notre méthode par rapport à la méthode « classique ».

## II. LE PROBLÈME D'ESTIMATION

### A. Modèle des moteurs synchrones

Par souci de simplicité, on ne considère que les moteurs linéaires synchrones biphasés (figure 2), la transposition au cas général étant immédiate. Une voie magnétique crée un champ sinusoïdal d'amplitude inconnue  $B_0$  et de période spatiale connue  $P$ . En notant  $l$  la longueur des enroulements actifs, la force  $F_1$  créée par la première phase est donnée par :

$$\begin{aligned} F_1 &= i_1 l B_0 \sin\left(\frac{2\pi}{P}x\right) + (-i_1) l B_0 \sin\left(\frac{2\pi}{P}(x - \frac{P}{2})\right) \\ &= K_m i_1 \sin\left(\frac{2\pi}{P}x\right) \\ &= K_m i_1 \sin\left(\frac{2\pi}{P}(x_0 + d)\right), \end{aligned} \quad (1)$$

avec  $K_m = 2l B_0$  le gain du moteur,  $x_0$  la position initiale,  $x$  la position instantanée et  $d = x - x_0$  le déplacement. Un calcul analogue à (1) conduit à l'expression de la force  $F_2$  engendrée par la seconde phase :

$$F_2 = K_m i_2 \cos\left(\frac{2\pi}{P}(x_0 + d)\right). \quad (2)$$

Dans (1) et (2), les courants  $i_1$  et  $i_2$  sont supposés en régime établi. En réalité, leur dynamique est stable et rapide par rapport à la dynamique mécanique grâce à un contrôleur de courant, déjà mentionné figure 1. Le fonctionnement complet du moteur se résume alors à :

$$\ddot{x} = \frac{K_m}{m} \left( i_1 \sin\left(\frac{2\pi}{P}(x_0 + d)\right) + i_2 \cos\left(\frac{2\pi}{P}(x_0 + d)\right) \right) - \frac{f}{m} \text{sign}(\dot{x}) \quad (3)$$

où les frottements secs sont modélisés par la fonction  $f \text{sign}(\dot{x})$ . Leur intensité  $f$ , tout comme le gain  $K_m$  et la charge  $m$  sont inconnus.

Pour piloter (3), puisque  $x_0$  est inconnu, supposons connue une estimée  $\hat{x}_0$  (rappelons que sa détermination est l'objet de cet article). On propose de choisir les courants  $i_1$  et  $i_2$  comme suit :

$$\begin{aligned} i_1 &= I(t) \sin\left(\frac{2\pi}{P}(\hat{x}_0 + d) + \varphi\right) \\ i_2 &= I(t) \cos\left(\frac{2\pi}{P}(\hat{x}_0 + d) + \varphi\right), \end{aligned} \quad (4)$$

avec  $I(t)$  une consigne de courant et  $\varphi$  un degré de liberté supplémentaire.

L'équation (3) avec ces consignes s'écrit :

$$\ddot{x} = \frac{K_m}{m} \cos(\varphi_0 - \hat{\varphi}_0 - \varphi) I(t) - \frac{f}{m} \text{sign}(\dot{x}),$$

avec  $\varphi_0 = \frac{2\pi}{P} x_0$  la phase initiale et  $\hat{\varphi}_0 = \frac{2\pi}{P} \hat{x}_0$ .

On note  $\hat{K}_m$  et  $\hat{m}$  des estimées de  $K_m$  et  $m$  respectivement. Comme  $\frac{\hat{K}_m}{\hat{m}} I$  est homogène à une accélération, on note dans la suite :

$$\frac{\hat{K}_m}{\hat{m}} I(t) = \ddot{x}_{ref}(t) \quad (5)$$

ce qui, avec  $\alpha = \left(\frac{K_m}{m}\right) \times \left(\frac{\hat{m}}{\hat{K}_m}\right)$ , donne :

$$\ddot{x} = \alpha \cos(\varphi_0 - \hat{\varphi}_0 - \varphi) \ddot{x}_{ref}(t) - \frac{f}{m} \text{sign}(\dot{x}). \quad (6)$$

### B. Rôle de la phase initiale

Dans l'équation (6), seules la consigne  $\ddot{x}_{ref}(t)$  et la variable  $\varphi$  sont à la disposition de l'utilisateur. Grâce à ces degrés de liberté, on cherche une estimée  $\hat{\varphi}_0$  de la phase initiale  $\varphi_0$  malgré la méconnaissance des autres paramètres du système.

Quand on fixe  $\varphi = 0$ , la force développée par le moteur se met sous la forme :

$$F = F_1 + F_2 = K_m \cos(\varphi_0 - \hat{\varphi}_0) I(t),$$

soit

$$|F| \leq |K_m I(t)| = m \alpha |\ddot{x}_{ref}(t)|.$$

Ainsi, pour une consigne  $\ddot{x}_{ref}(t)$  donnée, la force développée est inférieure en norme à la valeur désirée dès

que  $\widehat{\varphi}_0$  est erroné. En raison de la dissipation thermique qui en résulte, l'efficacité énergétique n'est donc optimale que si  $\widehat{\varphi}_0$  est précisément déterminé.

De plus, le gain de la boucle ouverte entre  $x$  et  $\ddot{x}_{ref}$  dépend de  $\cos(\varphi_0 - \widehat{\varphi}_0)$ . La qualité de l'estimation est également nécessaire pour assurer précision et stabilité du positionnement des moteurs synchrones.

### III. LA MÉTHODE D'ESTIMATION

#### A. Choix des trajectoires

On va proposer des consignes particulières générant des déplacements aussi petits que possible (à la différence de la méthode « classique ») et permettant de séparer les contributions des différents paramètres du modèle (6).

Observons que dans les conditions particulières suivantes :

$$\alpha = 1, \quad \widehat{\varphi}_0 = 0, \quad f = 0,$$

le système (6) est un simple double intégrateur. Ainsi, si  $\ddot{x}_{ref}$  est la dérivée seconde d'une trajectoire  $x_{ref}$  oscillante d'amplitude  $\xi_1 - \xi_0$ , l'amplitude des déplacements mesurés est donnée par  $\cos(\varphi_0 - \varphi)$  ( $\xi_1 - \xi_0$ ). En choisissant successivement  $\varphi = 0$  et  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , on estime facilement  $\cos(\varphi_0)$  et  $\sin(\varphi_0)$ . Par ailleurs, on génère des déplacements d'amplitude aussi faible que voulu en réglant  $\xi_1 - \xi_0$  en fonction de la résolution du capteur.

On construit une trajectoire oscillante de ce type en deux étapes. Tout d'abord, on définit  $x_{elem}(t)$ , trajectoire allant de  $\xi_0$  au repos à  $\xi_1$  au repos en un temps  $T > 0$  :

1. On se donne les conditions initiales

$$x_{elem}(0) = \xi_0, \quad \dot{x}_{elem}(0) = 0, \quad \ddot{x}_{elem}(0) = 0.$$

2. On fixe aussi les conditions finales

$$x_{elem}(T) = \xi_1, \quad \dot{x}_{elem}(T) = 0, \quad \ddot{x}_{elem}(T) = 0.$$

3. Une interpolation polynômiale de degré 5 pour  $x_{elem}(t)$ , avec les conditions précédentes est donnée par :

$$x_{elem}(t) = \xi_0 + (\xi_1 - \xi_0) \sum_{i=1}^5 a_i \left(\frac{t}{T}\right)^i. \quad (7)$$

4. Les coefficients  $\{a_i\}_{1 \leq i \leq 5}$  sont obtenus par identification du polynôme précédent avec les conditions initiales et finales :

$$a_1 = a_2 = 0, \quad a_3 = 10, \quad a_4 = -15, \quad a_5 = 6.$$

De la même façon, on détermine la trajectoire arrêt-arrêt de  $\xi_1$  à  $\xi_0$  en un même temps  $T$ . Grâce à l'interpolation polynômiale (7), on définit  $\ddot{x}_M$ , dérivée seconde d'une trajectoire oscillante composée de  $M$  allers-retours de  $\xi_0$  à  $\xi_1$  :

$$\forall k \in \{0, \dots, 2M - 1\}, \quad \forall t \in [kT, (k+1)T], \quad (8)$$

$$\ddot{x}_M(t) = (-1)^k \ddot{x}_{elem}(t - kT).$$

Comme suggéré précédemment, si  $\ddot{x}_{ref} = x_M$ , en l'absence de frottements ( $f = 0$ ) et si le gain et la charge du moteur sont connus ( $\alpha = 1$ ), on estime aisément la phase initiale à partir de l'amplitude des déplacements effectués. Remarquons que si  $\alpha \neq 1$ , l'amplitude des mouvements avec  $\varphi = 0$ , puis  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  rend toujours possible

la détermination de la phase initiale facilement en l'absence de frottement. En revanche, en prenant en compte les frottements secs ( $f \neq 0$ ), on ne lie plus aussi aisément la mesure des déplacements aux paramètres du système, notamment à la phase initiale. La partie suivante explicite cette relation.

#### B. Classification des comportements dynamiques

L'idée sous-jacente de ce travail est d'intégrer (6) deux fois avec  $\ddot{x}_{ref} = \ddot{x}_M$ , pour lier l'amplitude des déplacements mesurés aux différents paramètres du modèle (6), qui est à second membre discontinu dès que  $f \neq 0$ . Au voisinage de la surface de discontinuité  $\dot{x} = 0$ , le système peut soit glisser sur cette surface, soit la traverser, ces comportements étant illustrés dans [10]. Pour intégrer (6), il est nécessaire de connaître le comportement du système en fonction des paramètres inconnus.

Pour faire cette distinction, on introduit le paramètre  $\mu$  :

$$\mu = \alpha m |\cos(\varphi_0 - \widehat{\varphi}_0 - \varphi)| \ddot{x}_{max} / f, \quad (9)$$

où  $\ddot{x}_{max}$  est la valeur maximale de la consigne d'accélération :

$$\ddot{x}_{max} = \max_{0 \leq t \leq T} |\ddot{x}_{elem}(t)|. \quad (10)$$

Ce paramètre permet de réaliser une classification complète des comportements dynamiques du système (6) en réponse à la sollicitation périodique  $\ddot{x}_M$ , notamment en ce qui concerne l'occurrence ou non de glissement sur la surface de discontinuité.

*Théorème 1:* Pour tout  $\mu > 1$ , le système (6) commandé par  $\ddot{x}_{ref} = \ddot{x}_M$ , initialement au repos, admet une unique orbite périodique attractive de période  $2T$ . Il existe deux réels  $\mu_1$  et  $\mu_2$ ,  $1 < \mu_1 \leq \mu_2$ , qui dépendent uniquement de  $x_M$  et qui déterminent trois et seulement trois comportements possibles :

- (i)  $1 < \mu \leq \mu_1 \approx 1.4$  : Le système atteint une orbite périodique instantanément et des phases de glissement sur la surface  $\dot{x} = 0$  se produisent (voir résultats de simulation figure 3).
- (ii)  $\mu_1 < \mu \leq \mu_2 \approx 1.7$  : Le système atteint une orbite périodique en un temps inférieur à  $2T$  et des phases de glissement sur la surface  $\dot{x} = 0$  se produisent (voir résultats de simulation figure 4).
- (iii)  $\mu > \mu_2$  : L'orbite est atteinte en temps infini et aucune phase de glissement ne se produit (voir résultats de simulation figure 5).

En outre, si  $\mu \leq 1$ , le système reste au repos.

*Preuve:* On se contente d'indiquer l'idée de la preuve en notant  $y = m \mu^{-1} x / f$  et  $u = \pm \ddot{x}_{ref} / \ddot{x}_{max}$ , de sorte que :

$$\ddot{y} = u - \mu^{-1} \text{sign}(\dot{y}), \quad \dot{y}_0 = \ddot{y}_0 = 0, \quad |u| \leq 1. \quad (11)$$

Si la vitesse s'annule en  $t$  tel que  $\mu |u(t)| < 1$ , on vérifie que la surface de discontinuité est attractive et qu'il y a glissement jusqu'à  $t'$ , tel que  $\mu |u(t')| = 1$ . Si  $\mu \gg 1$ , quand la vitesse s'annule, la commande est supérieure aux frottements et le système traverse la surface de discontinuité. A partir d'une valeur  $\mu_2$ , dès que  $\dot{x} = 0$ , la surface de discontinuité est attractive. La mémoire du système étant alors effacée, un cycle limite est établi en temps fini. Pour  $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$ ,

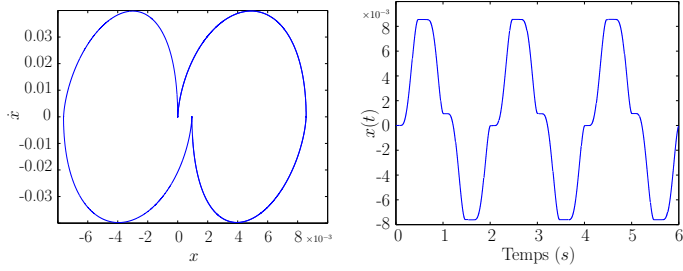


Fig. 3.  $1 < \mu \leq \mu_1$  : trajectoires dans l'espace d'état (à gauche) et temporelles (à droite).

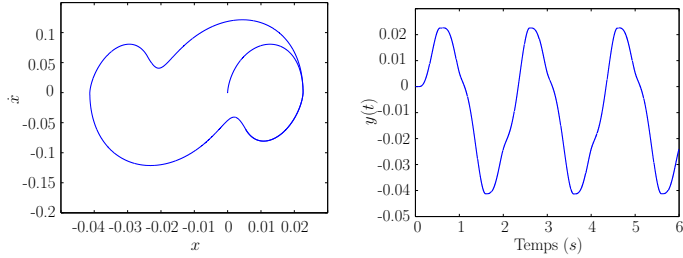


Fig. 4.  $\mu_1 < \mu \leq \mu_2$  : trajectoires dans l'espace d'état (à gauche) et temporelles (à droite).

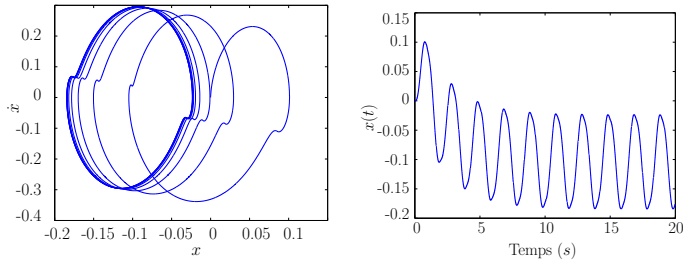


Fig. 5.  $\mu > \mu_2$  : trajectoires dans l'espace d'état (à gauche) et temporelles (à droite).

il y a deux phases de glissement sur les intervalles de temps  $[kT, (k+2)T]$ , puis quatre pour  $1 < \mu \leq \mu_1$ . ■

### C. Intégration de l'équation (6)

D'après le théorème 1, un régime permanent étant atteint quelle que soit la valeur de  $\mu$ , on note  $\delta$  l'amplitude des déplacements le long de l'orbite périodique :

$$\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \max_{0 \leq \tau \leq T} |x(kT + \tau) - x(kT)| \right). \quad (12)$$

$\delta$  dépend de l'ensemble des paramètres physiques, rassemblés dans  $\mu$ , et donc de la phase initiale recherchée. Le théorème 2 explicite cette relation.

*Théorème 2:* Pour le système (6) initialement au repos et la consigne  $\ddot{x}_{ref} = \ddot{x}_M$ , il existe une fonction  $\Delta$  définie de  $\mathbb{R}^+$  dans  $[0, 1[$  telle que

$$\delta = \alpha |\cos(\varphi_0 - \widehat{\varphi}_0 - \varphi)| (x_1 - x_0) \Delta(\mu), \quad (13)$$

$\mu$  étant défini par (9). Par ailleurs, la fonction  $\Delta$  (représentée figure 6(a)) dépend uniquement de la consigne  $\ddot{x}_M$ .

*Preuve:* D'après le théorème 1, en régime permanent, il est possible de faire la distinction entre les orbites avec ou sans phase de glissement et de connaître les instants

de début et de fin de ces éventuelles phases, pour tout  $\mu$ . A tout instant, on connaît la partition de l'espace d'état ( $\dot{x} < 0$ ,  $\dot{x} = 0$  ou  $\dot{x} > 0$ ) dans laquelle le système se situe, ce qui rend la double intégration de (6) avec  $\ddot{x}_{ref} = \ddot{x}_M$  possible. La formule (13) s'en déduit immédiatement. ■

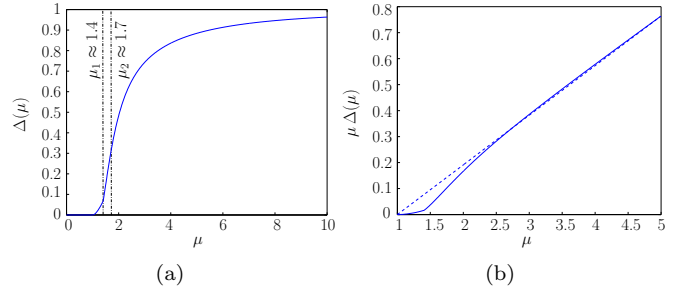


Fig. 6. Fonctions  $\Delta(\mu)$  (à gauche) et  $\mu \Delta(\mu)$  (à droite).

### D. Formule d'estimation

On veut estimer la phase initiale, et donc, à partir de maintenant, on fixe  $\widehat{\varphi}_0 = 0$ . Soit  $\{\varphi_i\}_{1 \leq i \leq N}$  un ensemble de  $N$  réels avec lesquels, conformément à (13), on obtient  $N$  valeurs  $\delta_i$  définies par :

$$\forall i, \delta_i = \varepsilon_i \cos(\varphi_0 - \varphi_i) \alpha (x_1 - x_0) \Delta(\mu_i), \quad (14)$$

où l'on note :

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \alpha \ddot{x}_{max} m / f \\ \varepsilon_i &= \text{sign}(\cos(\varphi_0 - \varphi_i)) \\ \mu_i &= \varepsilon_i \mu_0 \cos(\varphi_0 - \varphi_i). \end{aligned} \quad (15)$$

Soit  $(i, j) \in \{1, \dots, N\}^2$  et  $i \neq j$ , avec les notations précédentes, on a la relation :

$$\delta_i \mu_j \Delta(\mu_j) = \delta_j \mu_i \Delta(\mu_i).$$

On définit la fonction  $J_{ij}(\mu_0, \varphi_0)$  par :

$$J_{ij}(\varphi_0, \mu_0) = \left( \delta_i \mu_j \Delta(\mu_j) - \delta_j \mu_i \Delta(\mu_i) \right)^2, \quad (16)$$

en rappelant que  $\mu_i$  est une fonction de  $\varphi_0$  et  $\mu_0$  définie par (15).

Au final, estimer la phase initiale revient à résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\left( \widehat{\varphi}_0, \widehat{\mu}_0 \right) = \arg \min_{\substack{\varphi_0 \in \mathbb{R} \\ \mu_0 \in \mathbb{R}^+}} \left( \sum_{\substack{i, j \\ j > i}} J_{ij}(\varphi_0, \mu_0) \right) \quad (17)$$

### E. Résolution approchée

On peut résoudre (17) par des méthodes de descente itératives. Dans cette partie, à l'aide d'une approximation, on propose une solution plus directe. La pertinence de cette approche sera illustrée par les résultats expérimentaux.

L'idée est d'obtenir un problème d'optimisation proche de (17) mais dont la résolution ne soit pas numérique. Pour cela, on linéarise la fonction  $\mu \Delta(\mu)$  en supposant qu'il existe une constante  $\gamma \in \mathbb{R}^+$  telle que :

$$\forall \mu \geq 1, \quad \mu \Delta(\mu) \approx \gamma (\mu - 1). \quad (18)$$

Remarquons que l'approximation précédente, illustrée figure 6(b), n'est valable que pour  $\mu \geq 1$ .

Avec (18), la fonction  $J_{ij}(\varphi_0, \mu_0)$ , donnée par (16), est approchée par  $J_{ij}^*(\varphi_0, \mu_0)$  défini comme suit :

$$J_{ij}^*(\varphi_0, \mu_0) = \gamma^2 \left( \delta_i (\mu_j - 1) - \delta_j (\mu_i - 1) \right)^2 \\ = \gamma^2 \left[ (\mu_i \mu_j) A_{ij} \begin{pmatrix} \mu_i \\ \mu_j \end{pmatrix} + b_{ij}^T \begin{pmatrix} \mu_i \\ \mu_j \end{pmatrix} + c_{ij}^2 \right]. \quad (19)$$

Les notations employées dans (19) sont définies par :

$$- A_{ij} = \begin{pmatrix} \delta_j^2 & -\delta_i \delta_j \\ -\delta_i \delta_j & \delta_i^2 \end{pmatrix}, \\ - b_{ij}^T = -2 (\delta_i - \delta_j) (-\delta_j \quad \delta_i), \\ - c_{ij} = (\delta_i - \delta_j)^2.$$

Le critère à minimiser dans (17) est approché par  $J^*(\varphi_0, \mu_0)$ , fonction quadratique en  $\bar{\mu} = (\mu_1 \dots \mu_N)^T$  :

$$J^*(\varphi_0, \mu_0) = \gamma^2 \left( \bar{\mu}^T A \bar{\mu} + b^T \bar{\mu} + c \right). \quad (20)$$

$A$  est une matrice  $N \times N$ ,  $b$  un vecteur de dimension  $N$  et  $c$  un scalaire. On définit ces grandeurs par :

$$- \forall (i, j) \quad \begin{cases} i = j & , \quad A(i, i) = \sum_{j \neq i} \delta_j^2 \\ j > i & , \quad A(i, j) = A(j, i) = -\delta_i \delta_j \end{cases} \\ - \forall i \quad , \quad b(i) = 2 \sum_{j \neq i} (\delta_j (\delta_i - \delta_j)) \\ - c = \sum_{i, j} c_{ij}.$$

Remarquons que, d'après (20),  $\gamma$  n'intervient pas dans l'argument du minimum de  $J^*$ .

Pour tirer parti du fait que  $J^*$  est une forme quadratique en  $\bar{\mu}$ , on exprime  $\mu_i$  en coordonnées cartésiennes :

$$\mu_i = \mu_0 \begin{pmatrix} \varepsilon_i \cos(\varphi_i) & \varepsilon_i \sin(\varphi_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\varphi_0) \\ \sin(\varphi_0) \end{pmatrix}.$$

Définissons alors  $\theta \in \mathbb{R}^2$  et  $M$  matrice  $N \times 2$  par :

$$\theta = \mu_0 \begin{pmatrix} \cos(\varphi_0) \\ \sin(\varphi_0) \end{pmatrix} \\ M = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \cos(\varphi_1) & \varepsilon_1 \sin(\varphi_1) \\ \vdots & \vdots \\ \varepsilon_N \cos(\varphi_N) & \varepsilon_N \sin(\varphi_N) \end{pmatrix},$$

de manière à exprimer  $\bar{\mu} = M\theta$  comme combinaison linéaire des nouvelles variables d'optimisation. Notons que  $\varphi_0$  est la phase du vecteur  $\theta$  et  $\mu_0$  sa norme.

Avec ce changement de variable, on obtient une approximation de  $J$  avec  $\tilde{J}(\theta) = J^*(\varphi_0(\theta), \mu_0(\theta))$ , dont l'expression est donnée par :

$$\tilde{J}(\theta) = \theta^T M^T A M \theta + b^T M \theta + c.$$

Comme l'approximation (18) n'est valable que pour  $\mu \geq 1$ , il faut minimiser la forme quadratique  $\tilde{J}(\theta)$  tout en satisfaisant  $N$  contraintes du type

$$\varepsilon_i (\cos(\varphi_i) \quad \sin(\varphi_i)) \theta \geq 1.$$

On appelle  $\hat{\theta}$  la solution du problème d'optimisation correspondant, donné par :

$$\begin{cases} \hat{\theta} = \arg \min_{\theta \in \mathbb{R}^2} \tilde{J}(\theta) \\ \text{soumis à :} \\ \forall i, \quad \varepsilon_i (\cos(\varphi_i) \quad \sin(\varphi_i)) \theta \geq 1 \end{cases} \quad (21)$$

On obtient la solution de façon simple en exprimant les contraintes d'optimalité de Kuhn et Tucker (voir [11] pour plus de détails) et la phase du vecteur  $\hat{\theta}$  est  $\hat{\varphi}_0$ , la valeur estimée de la phase initiale.

#### IV. RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX ET COMPARAISON

##### A. Mise en œuvre

Afin de résoudre le problème approché (21), pour chaque déphasage  $\varphi_i$ , on détermine  $\delta_i$  et  $\varepsilon_i$ . Pour cela, en pratique, on choisit  $M$ , le nombre d'allers-retours de  $\ddot{x}_M$ , suffisamment grand pour que le régime permanent soit atteint dans tous les cas. Soit alors  $n_0 < 2M$ , on évalue  $\delta$  défini par (13) par la relation suivante :

$$\delta \approx \frac{1}{2M - n_0 + 1} \sum_{k=n_0}^{2M} \max_{0 \leq \tau \leq T} |x(kT + \tau) - x(kT)|. \quad (22)$$

Grâce à (22), on détermine l'ensemble  $\{\delta_i\}_{1 \leq i \leq N}$ .

Par ailleurs, pour  $\varphi_i$  donné, le système (6) (pour lequel on fixe  $\hat{\varphi}_0 = 0$  et  $\varphi = \varphi_i$ ) étant initialement au repos, si  $\cos(\varphi_0 - \varphi_i) > 0$ ,  $x$  est croissant de 0 à  $T$  (si  $\xi_1 > \xi_0$ ). En revanche, quand  $\cos(\varphi_0 - \varphi_i) < 0$ ,  $x$  décroît de 0 à  $T$  (si  $\xi_1 > \xi_0$ ). Ainsi, on obtient  $\varepsilon_i$  avec :

$$\varepsilon_i = \text{sign} \left( (\xi_1 - \xi_0) (x(T) - x(0)) \right). \quad (23)$$

##### B. Méthode « classique »

On compare la méthode exposée précédemment avec une procédure « classique » qui est utilisable dans le contexte de la figure 1. Elle consiste à choisir les courants apparaissant dans (3) de la façon suivante :

$$i_1 = \frac{\hat{m}}{\hat{K}_m} \ddot{x}_0, \quad i_2 = 0,$$

où  $\ddot{x}_0$  est une constante homogène à une accélération (la démarche est analogue à (5)). Avec les notations précédentes, l'évolution du système est donnée par :

$$\ddot{x} = \alpha \sin \left( \frac{2\pi}{P} d + \varphi_0 \right) \ddot{x}_0 - \frac{f}{m} \text{sign}(\dot{x}).$$

Après un régime oscillant amorti (l'amortissement étant dû aux frottements), le système atteint l'équilibre en  $x_\infty$ . On mesure alors un déplacement noté  $d_\infty$  :

$$\varphi_0 = \frac{2\pi}{P} x_\infty - \frac{2\pi}{P} d_\infty \quad \text{mod } 2\pi.$$

Si les frottements ne sont pas trop importants, la relation suivante est vérifiée :

$$x_\infty \approx \hat{x}_\infty = \frac{P}{2} + k_\infty P, \quad k_\infty \in \mathbb{Z}.$$

En l'absence d'information complémentaire, la méthode « classique » consiste à estimer  $\varphi_0$  par :

$$\hat{\varphi}_0 = \frac{2\pi}{P} \hat{x}_\infty - \frac{2\pi}{P} d_\infty = \pi - \frac{2\pi}{P} d_\infty \quad \text{mod } 2\pi. \quad (24)$$

En réalité,  $x_\infty$  est d'autant plus éloigné de  $\hat{x}_\infty$  que les frottements sont importants. On montre que l'erreur commise dépend du paramètre  $\mu' = \alpha m \ddot{x}_0/f$  et, plus  $\mu'$  est petit, plus cette méthode est biaisée.

### C. Résultats

On compare les deux méthodes à l'aide de deux moteurs différents dont les caractéristiques sont inconnues, bien que le second présente des frottements beaucoup plus importants que le premier, même si cette information n'est pas utilisée par les algorithmes. En accord avec les notations précédentes, le premier est caractérisé par  $\alpha_1$ ,  $m_1$ ,  $f_1$  et le second par  $\alpha_2$ ,  $m_2$  et  $f_2$ . La comparaison est effectuée en assurant que  $\mu_0 = \mu'$ , ce qui implique que  $\ddot{x}_0 = \ddot{x}_{max}$ . On s'intéresse à l'erreur moyenne d'estimation  $\hat{\varphi}_0 - \varphi_0$  en fonction de la phase initiale  $\varphi_0$  que l'on fait varier de 0 à  $2\pi$ .

On sait que les performances de la méthode « classique » se détériorent à mesure que  $\mu' = \alpha_1 m_1 \ddot{x}_0/f_1$  diminue alors que notre méthode est conçue pour être indépendante de  $\mu_0 = \alpha_1 m_1 \ddot{x}_{max}/f_1$ . On propose de le vérifier expérimentalement sur le premier moteur en évaluant l'erreur moyenne d'estimation successivement avec  $\ddot{x}_0 = \ddot{x}_{max} = 1000\text{mm/s}^2$  et  $\ddot{x}_0 = \ddot{x}_{max} = 500\text{mm/s}^2$ .

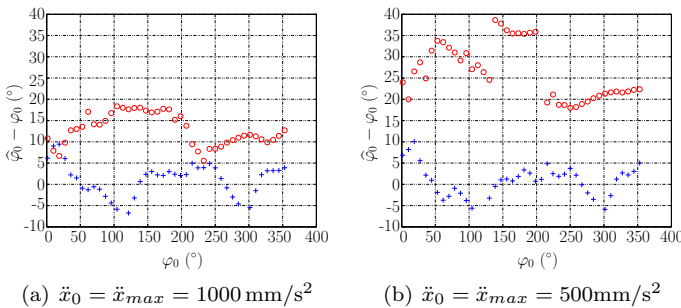


Fig. 7. Erreur moyenne d'estimation  $\hat{\varphi}_0 - \varphi_0$  pour des valeurs discrètes de  $\varphi_0$ . Notre méthode (+) et méthode « classique » (o).

Pour ce moteur, la précision obtenue par la procédure issue de ce travail est inférieure à  $10^\circ$ , ce qui correspond à une efficacité d'au moins 98%. Pour de fortes accélérations (figure 7(a)), la méthode « classique » atteint des performances comparables (en léger retrait cependant), tout en générant des déplacements brusques (d'autant plus violents que  $\ddot{x}_0$  est important) et de forte amplitude (environ la période magnétique). Comme pressenti, si  $\mu'$  diminue (figure 7(b)), les résultats de la seconde méthode se détériorent, avec une erreur moyenne de l'ordre de  $30^\circ$  à laquelle correspond une efficacité du moteur de 87% contre 98% obtenue avec la méthode de cet article. Pour conclure quant à la figure 7 et au moteur avec peu de frottements, notre méthode donne effectivement des résultats qui ne dépendent pas de  $\mu_0$  alors que la méthode « classique » s'avère de moins bonne qualité quand  $\mu'$  diminue.

Avec le second moteur, la consigne d'accélération choisie est de  $4000\text{mm/s}^2$  pour vaincre les frottements secs qui sont plus importants. Comme précédemment, on évalue l'erreur moyenne d'estimation figure 8. Notre méthode est très ro-

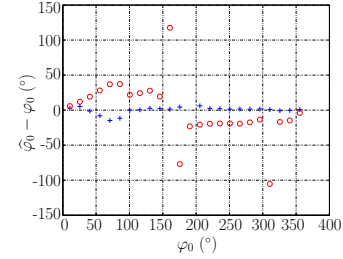


Fig. 8. Erreur moyenne d'estimation  $\hat{\varphi}_0 - \varphi_0$  pour des valeurs discrètes de  $\varphi_0$ . Notre méthode (+) et méthode « classique » (o).

buste aux frottements secs, puisque la précision est toujours de l'ordre de  $10^\circ$  alors que la méthode « classique » donne des résultats dégradés. On a ainsi illustré l'indépendance de la méthode de ce travail vis à vis de  $\mu_0$  ce qui traduit l'insensibilité de la méthode à la valeur des frottements secs, et à la méconnaissance de la masse et du gain du moteur. Quelles que soient ces valeurs, la précision de la phase estimée est de  $\pm 10^\circ$  pour les moteurs considérés.

### V. CONCLUSION

Cet article présente une méthode pour déterminer la phase initiale des moteurs synchrones sans utiliser de capteurs à effet Hall. Des mesures de courant sont nécessaires mais pas directement utilisées par l'algorithme, uniquement basé sur une mesure du déplacement. L'information concernant la phase initiale est extraite de l'amplitude des mouvements en réponse à une sollicitation périodique, ceci malgré les frottements et la méconnaissance de la charge embarquée et du gain du moteur. Les résultats expérimentaux sont de meilleure qualité que ceux envisageables dans les mêmes conditions avec une méthode « classique » également présentée, tout en générant des déplacements de faible amplitude.

### RÉFÉRENCES

- [1] J. Boichot, E. Delaleau, N.V. Diep, J. Lévine, et E. Parzy. Modelling and control of a high-precision positioning system actuated by a linear synchronous motor. *Proceedings of the IFAC World Congress*, Beijing, Chine, 1999.
- [2] J. Boichot, E. Delaleau, N.V. Diep, J. Lévine, et E. Parzy. Modelling and control of a two D.O.F. high-precision positioning system. *Proceedings of the European Conference on Control*, Karlsruhe, Allemagne, 1999.
- [3] R. Dhaouadi, N. Mohan, et L. Norum. Design and implementation of an extended kalman filter for the state estimation of a permanent magnet synchronous motor. *IEEE, Transactions on Power Electronics*, 6 :491 – 497, 1991.
- [4] K.W. Lim, K.S. Low, et M.F. Rahman. Observers for sensorless control of permanent magnet synchronous motor drive. *Proceedings of the IFAC World Congress*, pages 431 – 434, Sydney, Australia, 1993.
- [5] S. Ostlund et M. Brokemper. Sensorless rotor-position detection from zero to rated speed for an integrated PM synchronous motor drive. *IEEE, Transactions on Industry Applications*, 32 :1158 – 1165, 1996.
- [6] P.B. Schmidt, M.L. Gasperi, G. Ray, et A.H. Wijenayake. Initial rotor angle detection of a non-salient pole permanent magnet synchronous machine. *IEEE, Proceedings of the Industry Applications Society Annual Meeting*, pages 459 – 463, 1997.

- [7] T. Noguchi, K. Yamada, S. Kondo, et I. Takahashi. Initial rotor position estimation method of sensorless PM motor with no sensitivity to armature resistance. *IEEE, Transactions on Industrial Electronics*, 45 :118 – 125, 1998.
- [8] A.B. Kulkarni et M. Ehsani. A noval position sensor elimination technique for the interior permanent magnet synchronous motor drive. *IEEE, Transactions on Industry Applications*, pages 144 – 150, 1992.
- [9] S. Ogasawara et H. Agaki. An approach to real time position estimation at zero and low speed for a PM motor based on saliency. *IEEE, Proceedings of the Industry Applications Society Annual Meeting*, pages 29 – 35, 1996.
- [10] A.F. Filippov. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [11] J.C. Culioli. *Introduction à l'Optimisation*. Ellipses, 1994.