

CALCUL RÉCURSIF DE FRAME INVERSE SUR LA TRANSFORMÉE EN ONDELETTES DYADIQUE

BOURREL BENOÎT

RÉSUMÉ

La transformée en ondelettes dyadique permet d'analyser des propriétés importantes du signal. Elle présente l'intérêt d'être invariante par translation: les résultats produits ne dépendent pas de l'instant courant. Malheureusement, une suite quelconque de nombres ne s'interprète pas forcément comme la transformée d'un signal. Par conséquent, un certain nombre d'opérations fort utiles (régularisation, débruitage) effectuées sur la transformée en ondelettes peuvent aboutir à un objet qui ne s'interprète pas directement comme la représentation d'un signal. Pour récupérer malgré tout un signal, on cherche le signal dont la transformée en ondelettes est la plus proche des données. Cette opération s'appelle "frame inverse"; Elle s'effectue en résolvant un problème de moindres carrés. Habituellement, cette solution est calculée sur l'ensemble du signal. Cela n'est pas adapté à un environnement temps réel, où les données ne cessent d'arriver et doivent être traitées au fur et à mesure. Or de nombreuses applications du traitement du signal nécessitent de traiter les données au fur et à mesure de leur arrivée.

Ce rapport présente une méthode de calcul de frame inverse qui est à la fois récursive en temps et en échelle. L'algorithme fournit à chaque instant et à chaque échelle l'estimation optimale du signal pour l'horizon et la profondeur d'échelles correspondant. Il a été implémenté sous Simulink et des exemples appliqués à des signaux académiques et réels sont présentés ici.

Dyadic wavelets transform allows to analyse important properties of a signal. One of its advantages is to remain unchanged after a translation : results do not depend on the current time. However, a random series of numbers can not be directly converted into a signal. Thus, the result of some useful operations (like régularisation or noise removal) on the converted signal, may not be interpreted directly itself as the image of a signal. To recover (retrieve ?) the original signal, we look for the signal whose conversion into dyadic waves is closest to the data. This operation is called "frame inverse". Basically, it consists in solving a least-square problem. This operation usually needs a computation on the whole signal. This is not suitable for a real-time processing system, where the flow of data is continuous and has to be processed as it arrives. However, many applications of signal processing need the data to be processed as their arrive.

The report presents a frame inverse computation method which is recursive with respect to both time and scale. At every time and scale, the algorithm provides the optimal signal estimate for the related time horizon and scales depth. It has been implemented in Simulink, and examples which use both academic and real life signals are presented here.

CONTENTS

Résumé	1
1. Introduction	3
2. Ondelettes à une échelle	4
2.1. Décomposition en ondelettes	4
2.2. Reconstruction	4
2.3. Propriétés	7
3. Frame inverse à une échelle	8
3.1. Signaux de taille infinie	8
3.2. Signaux de taille finie et connue	10
4. Ondelettes multi-échelle	13
4.1. Définition	13
4.2. Propriété	13
4.3. Étude de la décomposition de $\mathbf{1}_l$ (réponse impulsionnelle)	15
4.4. Reconstruction inverse	16
5. Frame inverse optimale par récurrence sur les échelles	19
5.1. Cas des signaux infinis	19
5.2. Cas des signaux de taille finie	19
6. Implémentation des calculs sous Matlab et Simulink	24
6.1. Reconstruction parfaite	24
6.2. Sensibilité au bruit	26
6.3. Exemple d'utilisation, le débruitage	28
7. Conclusion	33
Appendix A. Démonstration du lemme 3.3	34
A.1. On exprime le coût d'une première manière	34
A.2. On souhaite simplifier encore l'expression de ϵ^2	36
A.3. Conclusion	42
Appendix B. Démonstration du théorème 5.1 et de la proposition 5.2	44
B.1. Démonstration de la récurrence	44
B.2. Conclusion et résultat	48
B.3. Égalité entre la moyenne des 2^p reconstructions directes et l'algorithme à trou.	48
Appendix C. Démonstration du théorème 5.3	49
C.1. Hypothèses de récurrence	49
C.2. Échelle p	49
C.3. Démonstration de $j - 1$ à partir de j	49
C.4. Récapitulatif	62

1. INTRODUCTION

Cette étude sur les ondelettes propose, par des calculs simples, de reconstituer un signal d'après des signaux considérés comme ses transformées en ondelettes dyadiques. Celles-ci n'étant pas forcément l'image d'un signal d'entrée exact, on définit une erreur que l'on cherche à minimiser.

$$\min_x (|Tx - y|^2)$$

La solution doit être donnée à partir des 2 paramètres que sont le temps courant K_+ et la profondeur j . On cherche donc une récurrence sur les échelles, la récurrence en temps étant implicite d'après les résultats.

En effet, l'étude permet de définir l'intervalle où la solution est connue et stationnaire, ainsi que les intervalles de bord où on peut avoir une estimée du signal.

J'étudie dans la première partie, le cas d'une décomposition à une échelle. Je rappelle les résultats sur la décomposition et la reconstruction exacte puis j'étudie le problème de la frame inverse sur des signaux de taille infinie puis sur un intervalle fini quelconque.

En seconde partie, je reprend les résultats de décomposition et recombinaison, puis j'étudie la frame inverse par récurrence sur les échelles afin de pouvoir contrôler et traiter le signal à chaque échelle.

Enfin, je donne des exemples où ces résultats sont implémentés sous Matlab et Simulink. J'utilise la reconstruction pour des transformés exactes puis pour des transformées bruitées. Enfin, j'utilise la frame inverse pour le débruitage de 3 signaux réels.

2. ONDELETTES À UNE ÉCHELLE

2.1. Décomposition en ondelettes. On rappelle les résultats de décomposition et de reconstruction sur les transformées en ondelettes dyadiques d'un signal a_0 défini sur \mathbb{Z} .

Définition 2.1. a_0 est un signal défini sur \mathbb{Z}

h et g sont des filtres miroirs conjugués, $g[1-n] = (-1)^n h[n]$

La décomposition est donnée par:

$$(2.1) \quad a_1[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n-k]a_0[n]$$

$$(2.2) \quad d_1[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[n-k]a_0[n]$$

La représentation est faite figure 1

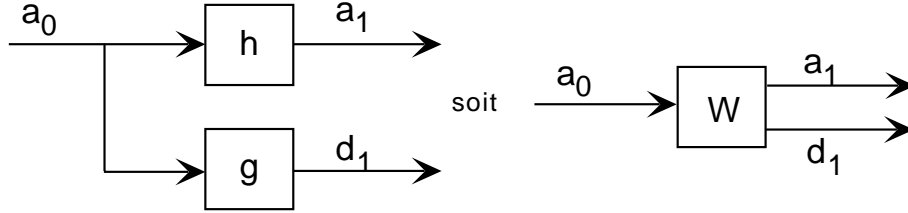


FIGURE 1. Décomposition à une échelle

Définition 2.2. On définit les transformations

$$W : a_0 \rightarrow (a_1, d_1)$$

$$W_a : a_0 \rightarrow a_1$$

$$W_d : a_0 \rightarrow d_1$$

Définition 2.3. On définit l'extraction paire EP et l'extraction impaire EI par

$$EP(s) = u \text{ avec } u[k] = s[2k]$$

$$EI(s) = v \text{ avec } v[k] = s[2k+1]$$

2.2. Reconstruction. La reconstruction exacte de a_0 est possible après un sous-échantillonnage de a_1 et d_1 .

Théoreme 2.4. (Mallat) La recombinaison exacte du signal a_0 peut-être faite à partir des extractions paires des signaux a_1 et d_1

$$(2.3) \quad a_0[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[k-2n]EP(a_1)[n] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[k-2n]EP(d_1)[n]$$

La figure 2 représente cette transformation inverse.

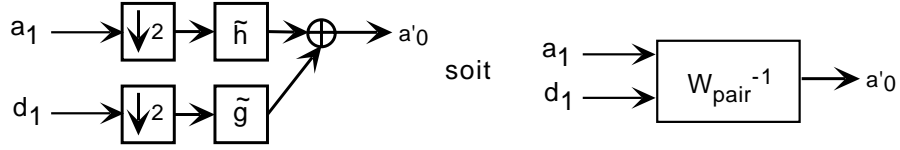


FIGURE 2. Reconstruction avec les échantillons pairs

Corollaire 2.5. *La reconstruction de a_0 peut aussi être effectuée avec les extractions impaires des signaux a_1 et d_1*

$$(2.4) \quad a_0[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[k-2n-1]EI(a_1)[n] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[k-2n-1]EI(d_1)[n]$$

Proof. Soit le signal a'_0 translaté de 1 de a_0 :

$$\forall k, a'_0[k] = a_0[k+1].$$

On note $(a'_1, d'_1) = W(a'_0)$. Alors

$$\begin{aligned} a'_1[k] &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n-k]a'_0[n] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n-k]a_0[n+1] \\ &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h[l-1-k]a_0[l] \\ &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h[l-(k+1)]a_0[l] \\ &= a_1[k+1] \end{aligned}$$

On en déduit que l'extraction paire de a'_1 est égale à l'extraction impaire de a_1 :

$$EP(a'_1)[k] = a'_1[2k] = a_1[2k+1] = EI(a_1)[k]$$

$$\begin{aligned} d'_1[k] &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[n-k]a'_0[n] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[n-k]a_0[n+1] \\ &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} g[l-1-k]a_0[l] \\ &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} g[l-(k+1)]a_0[l] \\ &= d_1[k+1] \end{aligned}$$

On en déduit que l'extraction paire de d'_1 est égale à l'extraction impaire de d_1 :

$$EP(d'_1)[k] = d'_1[2k] = d_1[2k+1] = EI(d_1)[k]$$

On reconstruit a'_0 par le théorème de Mallat 2.3:

$$\begin{aligned} a'_0[k] &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[k-2n]EP(a'_1)[n] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[k-2n]EP(d'_1)[n] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[k-2n]EI(a_1)[n] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[k-2n]EI(d_1)[n] \\ &= a_0[k+1] \text{ par définition} \end{aligned}$$

$$a_0[l] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[(l-1)-2n]EI(a_1)[n] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[(l-1)-2n]EI(d_1)[n]$$

L'égalité (2.4) est bien obtenue □

Corollaire 2.6. *La reconstruction de a_0 peut aussi s'écrire:*

$$\begin{aligned} (2.5) \quad a_0[k] &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (h[k-n]a_1[n] + g[k-n]d_1[n]) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n \in [k-\max(p_+, q_+), k-\min(p_-, q_-)]} h[k-n]a_1[n] + g[k-n]d_1[n] \end{aligned}$$

La figure 3 monte cette représentation moyenne.

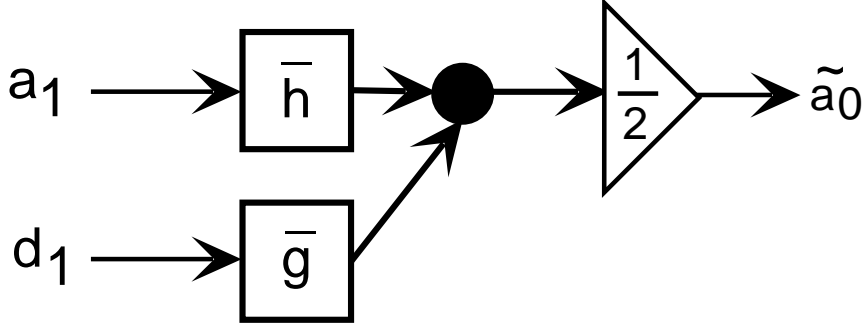


FIGURE 3. Recombinaison moyenne

Proof. En effet, on écrit:

$$a_0 = \frac{1}{2}(W_{pair}^{-1}(a_1, d_1) + W_{impair}^{-1}(a_1, d_1))$$

□

Définition 2.7. On définit les transformations W_{moy}^{-1} , W_{pair}^{-1} et W_{impair}^{-1}

$$W_{pair}^{-1} : (a_1, d_1) \rightarrow a'_0$$

$$\text{où } a'_0[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[k-2n]EP(a_1)[n] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[k-2n]EP(d_1)[n]$$

$$W_{impair}^{-1} : (a_1, d_1) \rightarrow a_0''$$

$$\text{où } a_0''[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[k-2n-1]EI(a_1)[n] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[k-2n-1]EI(d_1)[n]$$

$$W_{moy}^{-1} : (a_1, d_1) \rightarrow \tilde{a}_0$$

$$\text{où } \tilde{a}_0[k] = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[k-n]a_1[n] + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[k-n]d_1[n]$$

2.3. Propriétés. .

2.3.1. *Linéarité.* W , W_{moy}^{-1} , W_{pair}^{-1} et W_{impair}^{-1} sont linéaires

2.3.2. *Reconstruction.*

$$(2.6) \quad W_{pair}^{-1}(W(\cdot)) = W_{impair}^{-1}(W(\cdot)) = \text{Idt}$$

2.3.3. *Inverse.* Quelque soient les signaux a_1 et d_1 :

$$(2.7) \quad EP(W(W_{pair}^{-1}(a_1, d_1))) = EP(a_1, d_1)$$

$$(2.8) \quad EI(W(W_{impair}^{-1}(a_1, d_1))) = EI(a_1, d_1)$$

En effet $EP(W(\cdot))$ et $EI(W(\cdot))$ sont des bijections orthonormales (Mallat), figure 4.

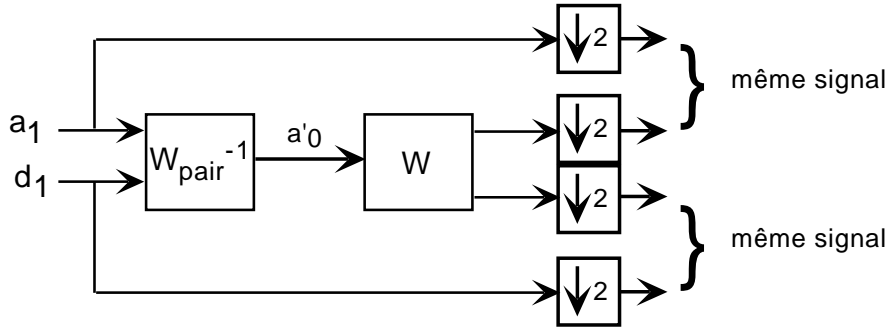


FIGURE 4. Bijection obtenue par sous-échantillonnage

3. FRAME INVERSE À UNE ÉCHELLE

Pour un signal a_0 décomposé en a_1 et d_1 , les reconstructions par W_{pair}^{-1} et W_{impair}^{-1} sont égales. Dans cette partie, a_1 et d_1 ne sont pas forcément l'image d'un signal a_0 et il se peut qu'aucun signal ne se décompose en a_1 et d_1 . En effet, des opérations non linéaires comme des seuillages pour le débruitage peuvent faire sortir les ondelettes de l'espace image. On définit alors un coût que l'on cherchera à minimiser pour obtenir une reconstruction optimale du signal.

3.1. Signaux de taille infinie. On commence l'étude par le cas le plus simple où a_1 et d_1 sont connus entièrement sur \mathbb{Z} .

3.1.1. *Problème.* On cherche à déterminer un signal initial \hat{a}_0 qui minimise le coût.

$$(3.1) \quad \epsilon^2(\hat{a}_0) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\hat{a}_1[n] - a_1[n])^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\hat{d}_1[n] - d_1[n])^2$$

$$\text{où } (\hat{a}_1, \hat{d}_1) = W(\hat{a}_0)$$

3.1.2. *Résultat.* Le coût défini de cette manière n'est rien d'autre que l'expression de la projection orthogonale sur le plan des images. Le coût est facile à exprimer à partir de l'optimum \tilde{a}_0 .

Lemme 3.1. *Le coût peut être exprimé de manière simple:*

$$(3.2) \quad \epsilon^2(\hat{a}_0) = \tilde{\epsilon}^2 + \|\hat{a}_0 - \tilde{a}_0\|^2$$

Avec

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0 &= \frac{(W_{pair}^{-1}(a_1, d_1) + W_{impair}^{-1}(a_1, d_1))}{2} \\ \tilde{a}_0[k] &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (h[k-n]a_1[n] + g[k-n]d_1[n]) \\ \tilde{\epsilon}^2 &= \frac{\|W_{pair}^{-1}(a_1, d_1) - W_{impair}^{-1}(a_1, d_1)\|^2}{4} \\ \tilde{\epsilon}^2 &= \frac{1}{4} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\begin{array}{c} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[k-2n]a_1[2n] - h[k-2n-1]a_1[2n+1] \\ + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[k-2n]d_1[2n] - g[k-2n-1]d_1[2n+1] \end{array} \right)^2 \end{aligned}$$

Proof.

$$\begin{aligned} \epsilon^2(\hat{a}_0) &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left((\hat{a}_1[n] - a_1[n])^2 + (\hat{d}_1[n] - d_1[n])^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left((EP(\hat{a}_1)[n] - EP(a_1)[n])^2 + (EP(\hat{d}_1)[n] - EP(d_1)[n])^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left((EI(\hat{a}_1)[n] - EI(a_1)[n])^2 + (EI(\hat{d}_1)[n] - EI(d_1)[n])^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \|EP(a_1, d_1) - EP(\hat{a}_1, \hat{d}_1)\|^2 + \frac{1}{2} \|EI(a_1, d_1) - EI(\hat{a}_1, \hat{d}_1)\|^2 \end{aligned}$$

Or les transformations $EP(W(\cdot))$ et $EI(W(\cdot))$ sont orthonormales, on les applique à $W_{pair}^{-1}(a_1, d_1) - \hat{a}_0$ et $W_{impair}^{-1}(a_1, d_1) - \hat{a}_0$ donc

$$\begin{aligned} \|W_{pair}^{-1}(a_1, d_1) - \hat{a}_0\|^2 &= \|EP(W(W_{pair}^{-1}(a_1, d_1) - \hat{a}_0))\|^2 \text{ par orthonormalité} \\ &= \|EP(W(W_{pair}^{-1}(a_1, d_1)) - EP(W(\hat{a}_0))\|^2 \text{ par linéarité 2.3.1} \\ &= \|EP(a_1, d_1) - EP(\hat{a}_1, \hat{d}_1)\|^2 \text{ par inversion 2.7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|W_{impair}^{-1}(a_1, d_1) - \hat{a}_0\|^2 &= \|EI(W(W_{impair}^{-1}(a_1, d_1)) - EI(W(\hat{a}_0))\|^2 \\ &= \|EI(a_1, d_1) - EI(\hat{a}_1, \hat{d}_1)\|^2 \text{ par 2.8} \end{aligned}$$

Ce qui donne:

$$\begin{aligned} \epsilon^2(\hat{a}_0) &= \frac{1}{2} \|W_{pair}^{-1}(a_1, d_1) - \hat{a}_0\|^2 + \frac{1}{2} \|W_{impair}^{-1}(a_1, d_1) - \hat{a}_0\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} ((W_{pair}^{-1}(a_1, d_1)[k] - \hat{a}_0[k])^2 + (W_{impair}^{-1}(a_1, d_1)[k] - \hat{a}_0[k])^2) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\hat{a}_0[k] - \frac{1}{2} (W_{pair}^{-1}(a_1, d_1)[k] + W_{impair}^{-1}(a_1, d_1)[k]) \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (W_{pair}^{-1}(a_1, d_1)[k] - W_{impair}^{-1}(a_1, d_1)[k])^2 \end{aligned}$$

Ceci n'est qu'une réécriture de la forme:

$$\frac{1}{2}((a-b)^2 + (a-c)^2) = (a - \frac{b+c}{2})^2 + \frac{1}{4}(b-c)^2.$$

On pose alors:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0 &= \frac{(W_{pair}^{-1}(a_1, d_1) + W_{impair}^{-1}(a_1, d_1))}{2} \\ \tilde{\epsilon}^2 &= \frac{\|W_{pair}^{-1}(a_1, d_1) - W_{impair}^{-1}(a_1, d_1)\|^2}{4} \end{aligned}$$

et le coût devient:

$$\epsilon^2(\hat{a}_0) = \tilde{\epsilon}^2 + \|\hat{a}_0 - \tilde{a}_0\|^2$$

Le lemme est montré □

Il vient immédiatement le théorème pour calculer l'optimum:

Théoreme 3.2. *Pour des signaux (a_1, d_1) de longueur infinie, la solution optimale est le signal moyen entre les deux reconstructions $W_{pair}^{-1}(a_1, d_1)$ et $W_{impair}^{-1}(a_1, d_1)$:*

$$\hat{a}_0 = \tilde{a}_0 = \frac{1}{2} (W_{pair}^{-1}(a_1, d_1) + W_{impair}^{-1}(a_1, d_1))$$

L'erreur optimale est

$$\tilde{\epsilon}^2 = \epsilon^2 = \frac{\|W_{pair}^{-1}(a_1, d_1) - W_{impair}^{-1}(a_1, d_1)\|^2}{4}$$

Proof. D'après le lemme , l'erreur minimale est obtenue pour

$$\hat{a}_0 = \tilde{a}_0 = \frac{(W_{pair}^{-1}(a_1, d_1) + W_{impair}^{-1}(a_1, d_1))}{2}$$

$$\epsilon^2 = \tilde{\epsilon}^2 = \frac{\|W_{pair}^{-1}(a_1, d_1) - W_{impair}^{-1}(a_1, d_1)\|^2}{4}$$

Le théorème est démontré. \square

3.2. Signaux de taille finie et connue. Le problème ici est que les coefficients a_1 et d_1 ne sont pas connus en dehors d'un intervalle $[K_-, K_+]$. Le coût est alors exprimé à partir des données connues.

3.2.1. Problème. On cherche à déterminer un signal initial $(\hat{a}_0[n])_{n \in \mathbb{Z}}$ qui minimise le coût:

$$(3.3) \quad \epsilon^2(\hat{a}_0) = \frac{1}{2} \sum_{n=K_-}^{K_+} (\hat{a}_1[n] - a_1[n])^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=K_-}^{K_+} (\hat{d}_1[n] - d_1[n])^2$$

où $(\hat{a}_1, \hat{d}_1) = W(\hat{a}_0)$

3.2.2. Décomposition du coût. On exprime le coût d'une manière plus simple:

Lemme 3.3. *Pour des signaux (a_1, d_1) de longueur finie, de support compris entre K_- et K_+ , et les filtres h et g de support respectivement $[p_-, p_+]$ et $[q_-, q_+]$, on peut écrire le coût $\epsilon^2(\hat{a}_0)$ sous la forme:*

$$\begin{aligned} \epsilon^2(\hat{a}_0) &= \sum_{(m,l) \in \Phi_+^2} M_+(m,l) \hat{a}_0[m+K_+] \hat{a}_0[l+K_+] - 2 \sum_{m \in \Phi_+} \hat{a}_0[m+K_+] \tilde{a}_0[m+K_+] \\ &+ \sum_{(m,l) \in \Phi_-^2} M_-(m,l) \hat{a}_0[m+K_-] \hat{a}_0[l+K_-] - 2 \sum_{m \in \Phi_-} \hat{a}_0[m+K_-] \tilde{a}_0[m+K_-] \\ &+ \sum_{n \in \Gamma} (\hat{a}_0[n]^2 - 2\hat{a}_0[n] \tilde{a}_0[n]) + \mu^2 \end{aligned}$$

Avec

$$\Phi_- = [\min(p_-, q_-), \max(p_+, q_+) - 1]$$

$$\Phi_+ = [\min(p_-, q_-) + 1, \max(p_+, q_+)]$$

$$\Gamma = [K_- + \max(p_+, q_+), K_- + \min(p_-, q_-)]$$

$$\tilde{a}_0 = W_{moy}^{-1}(a_1, d_1)$$

$$M_-(n, p) = \frac{1}{2} \sum_{k \in [0, \min(n, p) - \min(p_-, q_-)]} (h[p-k]h[n-k] + g[p-k]g[n-k])$$

$$M_+(n, p) = \frac{1}{2} \sum_{k \in [\max(n, p) - \max(p_+, q_+), 0]} (h[p-k]h[n-k] + g[p-k]g[n-k])$$

La figure 5 permet de mieux visualiser les intervalles de bord obtenus par à la diffusion de la transformée.

La preuve est en annexe A

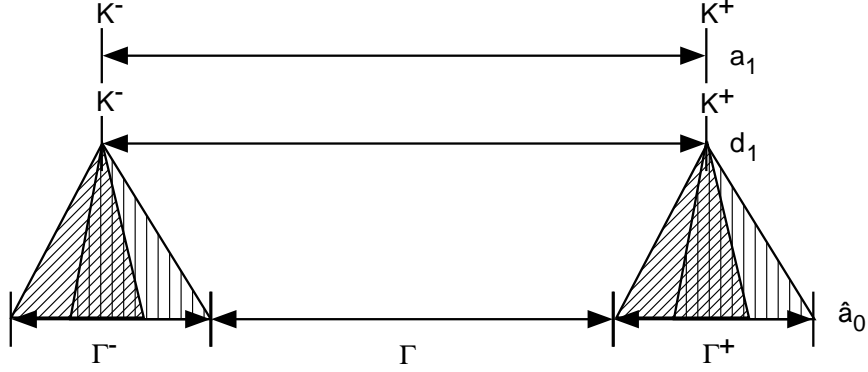


FIGURE 5. Diffusion de l'effet de bord

Lemme 3.4. *Le minimum d'un coût du type:*

$$\epsilon^2(\hat{a}_0)[n] = \hat{a}_0[n]^2 - 2\hat{a}_0[n]\tilde{a}_0[n]$$

est obtenu pour $\hat{a}_0[n] = \tilde{a}_0[n]$

et vaut $\hat{\epsilon}^2[n] = -\tilde{a}_0[n]^2$

De plus, $\hat{\epsilon}^2[n] = (\hat{a}_0[n] - \tilde{a}_0[n])^2 - \tilde{a}_0[n]^2$

Le résultat se démontre par un calcul élémentaire

Lemme 3.5. *Le minimum d'un coût matriciel du type:*

$$\hat{\epsilon}^2(\hat{a}_0) = {}^t \hat{a}_0 M \hat{a}_0 - 2 {}^t \hat{a}_0 \tilde{a}_0$$

avec M , matrice symétrique positive, est obtenu pour $\hat{a}_0 = M^{-1} \tilde{a}_0$

et $\hat{\epsilon}^2 = -{}^t \tilde{a}_0 M^{-1} \tilde{a}_0$

Proof. La dérivée matricielle est nulle au minimum. Il suffit de la calculer. \square

La nouvelle expression du coût et les deux lemmes permettent de calculer l'optimum et donnent directement le théorème suivant:

Théorème 3.6. *Les hypothèses et notations du lemme 3.3 sont repris.*

La solution optimale de ce problème est obtenue de manière différente sur trois intervalles et est indifférente en dehors de ces intervalles:

i) Sur $\Gamma_- = [K_- + \min(p_-, q_-), K_- + \max(p_+, q_+) - 1]$, on obtient un problème matriciel stationnaire par rapport au bord inférieur, de dimension $d = \max(p_+, q_+) - \min(p_- - q_-) - 1$ et dont le coût est

$$\hat{\epsilon}_-^2(\hat{a}_0) = \sum_{(m,l) \in \Phi_-^2} M_-(m,l) \hat{a}_0[m + K_-] \hat{a}_0[l + K_-] - 2 \sum_{m \in \Phi_-} \hat{a}_0[m + K_-] \tilde{a}_0[m + K_-]$$

La solution, aux notations d'indice près, est:

$$\hat{a}_0 = M_-^{-1} \tilde{a}_0$$

$$\hat{\epsilon}_-^2 = -{}^t \tilde{a}_0 M_-^{-1} \tilde{a}_0$$

ii) Sur $\Gamma = [K_- + \max(p_+, q_+), K_+ + \min(p_-, q_-)]$, le problème est analogue au problème en dimension infinie et le coût correspondant est

$$\epsilon_0^2(\hat{a}_0) = \sum_{n \in \Gamma} \hat{a}_0[n](\hat{a}_0[n] - 2\tilde{a}_0[n])$$

La solution est stationnaire et vaut

$$\begin{aligned} \hat{a}_0 &= \tilde{a}_0 \\ \hat{\epsilon}_0^2 &= - \sum_{n \in \Gamma} \tilde{a}_0[n]^2 \end{aligned}$$

iii) Sur $\Gamma_+ = [K_+ + \min(p_-, q_-) + 1, K_+ + \max(p_+, q_+)]$, on obtient un problème matriciel stationnaire par rapport au bord supérieur de dimension $d = \max(p_+, q_+) - \min(p_-, q_-) - 1$ et de coût

$$\epsilon_+^2(\hat{a}_0) = \sum_{(m,l) \in \Phi_+^2} M_+(m,l) \hat{a}_0[m + K_+] \hat{a}_0[l + K_+] - 2 \sum_{m \in \Phi_+} \hat{a}_0[m + K_+] \tilde{a}_0[m + K_+]$$

La solution, aux notations d'indice près, est:

$$\begin{aligned} \hat{a}_0 &= M_+^{-1} \tilde{a}_0 \\ \hat{\epsilon}_+^2 &= - {}^t \tilde{a}_0 M_+^{-1} \tilde{a}_0 \end{aligned}$$

iv) En dehors de ces intervalles, le signal n'a pas d'influence sur le coût.

4. ONDELETTES MULTI-ÉCHELLE

Dans cette section, on s'intéresse à la décomposition en ondelettes dyadiques multi-échelle, obtenue par récurrence. On rappelle les principaux résultats de décomposition et de reconstruction.

4.1. Définition.

Définition 4.1. a_0 est un signal défini sur \mathbb{Z} , h et g sont des filtres miroirs conjugués, $g[1-n] = (-1)^n h[n]$. Les signaux a_j et d_j sont obtenus par récurrence par décomposition de a_{j-1}

$$(4.1) \quad a_{j+1}[k] = W_{a,j}(a_j)[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_j[n-k]a_j[n]$$

$$(4.2) \quad d_{j+1}[k] = W_{d,j}(a_j)[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_j[n-k]a_j[n]$$

avec h_j et g_j , les filtres obtenus en ajoutant, $2^j - 1$ zéros entre chaque échantillons de h et g : $h_j[2^j n] = h[n]$ et $g_j[2^j n] = g[n]$

La figure 6 donne la représentation de cette transformation.

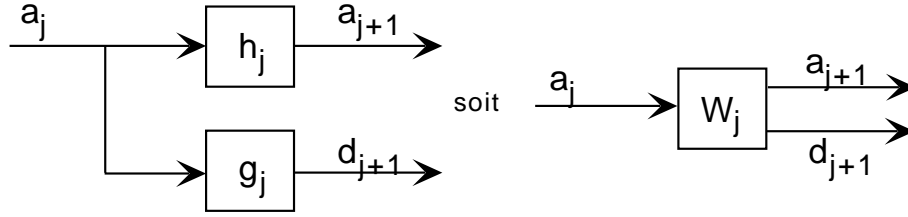


FIGURE 6. Décomposition par récurrence

4.2. Propriété.

Définition 4.2. On définit l'extraction à l'ordre j et au rang i la transformation:

$$(4.3) \quad E_{i,j} : u \rightarrow v \text{ où } v[n] = u[ni + j]$$

On retrouve $EP = E_{2,0}$ et $EI = E_{2,1}$

Proposition 4.3. Toute translation temporelle δl du signal d'entrée entraîne une translation temporelle de longueur identique δl sur les décompositions non sous-échantillonnées.

$$\text{Si } a'_0 = T_{\delta l}(a_0) = a_0[\cdot - \delta l] \text{ alors } \begin{cases} a'_p = T_{\delta l}(a_p) = a_p[\cdot - \delta l] \\ \forall j \leq p, d'_j = T_{\delta l}(d_j) = d_j[\cdot - \delta l] \end{cases}$$

Proof. La preuve est immédiate à partir de (4.1) et (4.2) □

La proposition suivante rappelle que les décompositions sur les bases d'ondelettes sont des sous-échantillonnages de W

Proposition 4.4. *La décomposition de a_j en a_{j+1} et d_{j+1} par les filtres h_j et g_j est égale aux 2^j décompositions indépendantes des signaux sous-échantillonnés $E_{2^j,i}(a_j)$ par les filtres g et h , pour $i = 0, \dots, 2^j - 1$.*

$$(4.4) \quad E_{2^j,i}(a_{j+1}) = W_{a,0}(E_{2^j,i}(a_j)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n-k]E_{2^j,i}(a_j)[n]$$

$$(4.5) \quad E_{2^j,i}(d_{j+1}) = W_{d,0}(E_{2^j,i}(a_j)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[n-k]E_{2^j,i}(a_j)[n]$$

La figure 7 illustre la correspondance entre la transformée en ondelettes et la transformée en ondelettes dyadique.

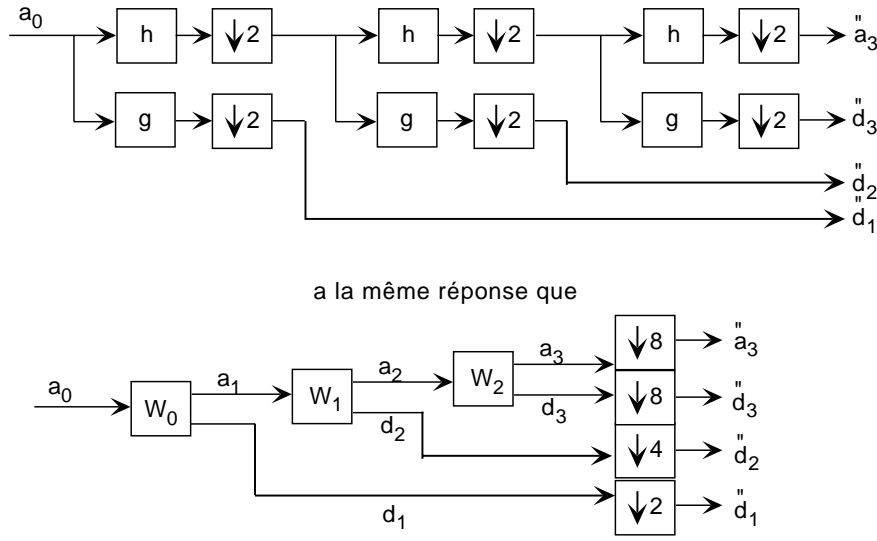


FIGURE 7. Correspondance entre les transformées

Proof. Analyse de la décomposition:

$$\begin{aligned} a_{j+1}[2^j k + i] &= W_{a,j}(a_j)[n] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_j[n - (2^j k + i)]a_j[n] \\ &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h_j[2^j(l - k)]a_j[2^j l + i] \\ &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h[l - k]a_j[2^j l + i] \\ &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h[l - k]E_{2^j,i}(a_j)[l] \\ d_{j+1}[2^j k + i] &= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} g[l - k]E_{2^j,i}(a_j)[l] \end{aligned}$$

On obtient donc 2^j décompositions à une échelle. Pour tout $i \in [0, 2^j - 1]$,

$$(4.6) \quad E_{2^j, i}(a_{j+1}, d_{j+1}) = W_0(E_{2^j, i}(a_j))$$

□

4.3. Étude de la décomposition de $\mathbf{1}_l$ (réponse impulsionnelle).

4.3.1. *Invariance par translation.* D'après la proposition 4.3:

Corollaire 4.5. *Pour tout $l \in \mathbb{Z}$:*

$$(4.7) \quad \forall j \in [0, p] \forall k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} a_j(\mathbf{1}_l)[k] = a_j(\mathbf{1}_0)[k - l] \\ d_j(\mathbf{1}_l)[k] = d_j(\mathbf{1}_0)[k - l] \end{cases}$$

4.3.2. *Étude du support de la décomposition en ondelettes de $\mathbf{1}_l$.* L'indice l et des filtres h et g (de support $[p_-, p_+]$ et $[q_-, q_+]$) sont donnés.

Soit $a_j(\mathbf{1}_l)$ et $d_j(\mathbf{1}_l)$ les transformés en ondelettes sans sous-échantillonnage de $\mathbf{1}_l$.

Lemme 4.6. $a_j(\mathbf{1}_l)$ a son support dans $[l - (2^j - 1)p_+, l - (2^j - 1)p_-]$
 $d_j(\mathbf{1}_l)$ a son support dans $[l - (2^{j-1} - 1)p_+ - 2^{j-1}q_+, l - (2^{j-1} - 1)p_- - 2^{j-1}q_-]$

Le phénomène de diffusion à travers les échelles est illustré figure 8.

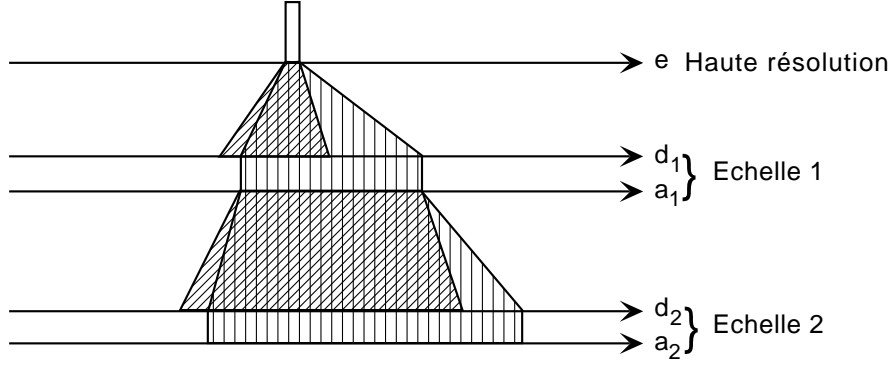


FIGURE 8. Diffusion des coefficients de $\mathbf{1}_l$ à deux échelles

Proof. On procède par récurrence avec l'hypothèse:

H_j : $a_j(\mathbf{1}_l)$ a son support dans $[l - (2^j - 1)p_+, l - (2^j - 1)p_-]$

H_1 est vrai: $a_1(\mathbf{1}_l)$ a son support dans $[l - p_+, l - p_-]$

On suppose $H_j(\mathbf{1}_l)$, on veut démontrer H_{j+1} .

Par définition $a_{j+1}(\mathbf{1}_l)[k] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_j[n - k]a_j(\mathbf{1}_l)[n]$

Et $h_j(\mathbf{1}_l)$ a son support dans $[2^j p_-, 2^j p_+]$

L'hypothèse est $a_j(\mathbf{1}_l)$ a son support dans $[l - (2^j - 1)p_+, l - (2^j - 1)p_-]$

Le support de $a_{j+1}(\mathbf{1}_l)$ est dans l'ensemble des k tels qu'il existe n tel que:

$$n - k \in [2^j p_-, 2^j p_+] \text{ et } n \in [l + (2^j - 1)p_-, l + (2^j - 1)p_-]$$

C'est à dire l'ensemble des k tels que

$$[k + 2^j p_-, k + 2^j p_+] \cap [l - (2^j - 1)p_+, l - (2^j - 1)p_-] \neq \emptyset$$

Soit encore l'ensemble

$$[l - (2^{j+1} - 1)p_+, l - (2^{j+1} - 1)p_+]$$

Le support de $a_{j+1}(\mathbf{1}_l)$ est donc dans $[l - (2^{j+1} - 1)p_-, l - (2^{j+1} - 1)p_+]$
La récurrence est démontrée.

Conclusion: $a_j(\mathbf{1}_l)$ a son support dans $[l - (2^j - 1)p_+, l - (2^j - 1)p_-]$
On montre à partir du support de $a_j(\mathbf{1}_l)$ que le support de $d_{j+1}(\mathbf{1}_l)$ est dans

$$[l - (2^j - 1)p_+ - 2^j q_+, l - (2^j - 1)p_- - 2^j q_-]$$

□

4.4. Reconstruction inverse. Les signaux décomposés en ondelettes peuvent être recomposés par trois calculs différents

Théorème 4.7. (Mallat) *La reconstruction inverse est donnée par l'algorithme à trous:*

$$(4.8) \quad a_j[n] = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (h_j[n - k]a_{j+1}[k] + g_j[n - k]d_{j+1}[k])$$

Corollaire 4.8. *La reconstruction inverse est aussi possible avec les signaux réduits aux intervalles:*

$$\Omega'_j = \cup_{m \in \mathbb{Z}} [2m2^j, (2m + 1)2^j[$$

$$\Omega''_j = \cup_{m \in \mathbb{Z}} [(2m - 1)2^j, 2m2^j[$$

Elle est donnée par:

$$(4.9) \quad a_j[n] = \sum_{p \in \Omega'_j} (h_j[n - p]a_{j+1}[p] + g_j[n - p]d_{j+1}[p])$$

$$(4.10) \quad = \sum_{p \in \Omega''_j} (h_j[n - p]a_{j+1}[p] + g_j[n - p]d_{j+1}[p])$$

Les intervalles Ω' et Ω'' sont représentés figure 9 pour $j = 3$

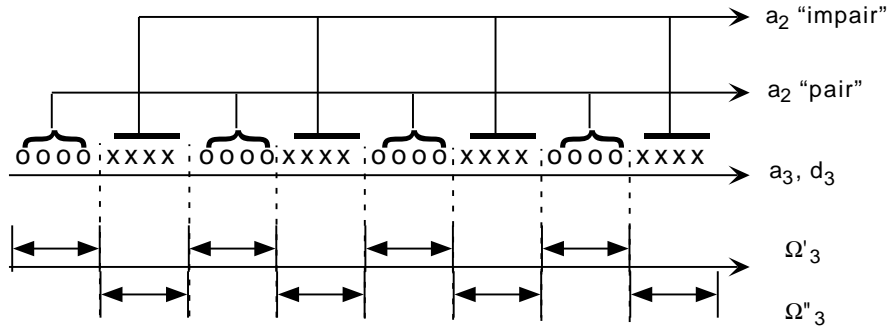


FIGURE 9. Reconstruction à partir des sous-échantillons de a_3 et d_3
Pour un signal décomposé, ces reconstructions a_2 "pair" et a_2 "impair" sont égales.

Proof. L'analyse de la décomposition (4.6) montre que l'on obtient 2^j problèmes indépendants de décomposition à une échelle pour retrouver a_j à partir de a_{j+1} et d_{j+1} :

Pour tout i ,

$$E_{2^j,i}(a_{j+1}, d_{j+1}) = W(E_{2^j,i}(a_j))$$

Le chapitre 1 donne deux solutions possibles pour retrouver $E_{2^j,i}(a_j)$, par W_{pair}^{-1} et W_{impair}^{-1} :

$$\begin{aligned}
E_{2^j,i}(a_j)[k] &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[k-2n]E_{2^j,i}(a_{j+1})[2n] \\
&\quad + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[k-2n]E_{2^j,i}(d_{j+1})[2n] \\
a_j[2^j k + i] &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_j[(k-2n)2^j]a_{j+1}[2n2^j + i] \\
(4.11) \quad &\quad + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_j[(k-2n)2^j]d_{j+1}[2n2^j + i]
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
E_{2^j,i}(a_j)[k] &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[k-2n-1]E_{2^j,i}(a_{j+1})[2n+1] \\
&\quad + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[k-2n-1]E_{2^j,i}(d_{j+1})[2n+1] \\
a_j[2^j k + i] &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_j[(k-2n-1)2^j]a_{j+1}[(2n+1)2^j + i] \\
(4.12) \quad &\quad + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_j[(k-2n-1)2^j]d_{j+1}[(2n+1)2^j + i]
\end{aligned}$$

On obtient en posant $m = k2^j + i$, $i \in [0, 2^j - 1]$:

$$\begin{aligned}
a_j[m] &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_j[(k-2n)2^j] a_{j+1}[2n2^j + i] \\
&\quad + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_j[(k-2n)2^j] d_{j+1}[2n2^j + i] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_j[m - i - 2n2^j] a_{j+1}[2n2^j + i] \\
&\quad + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_j[m - i - 2n2^j] d_{j+1}[2n2^j + i]
\end{aligned}$$

On peut ajouter des termes nuls venant des zeros de g_j et h_i :

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i \in [0, 2^j - 1]} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_j[m - i - 2n2^j] a_{j+1}[2n2^j + i] \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_j[m - i - 2n2^j] d_{j+1}[2n2^j + i] \right)
\end{aligned}$$

On prend aussi $p = 2n2^j + i$ et $\Omega'_j = \cup_{n \in \mathbb{Z}} [2n2^j, (2n+1)2^j[$;

les intervalles $[2n2^j, (2n+1)2^j[$ sont deux à deux disjoints, d'où

$$a_j[m] = \sum_{p \in \Omega'_j} h_j[m - p] a_{j+1}[p] + \sum_{p \in \Omega'_j} g_j[m - p] d_{j+1}[p]$$

De même on obtient pour $\Omega'' = \cup_{n \in \mathbb{Z}} [(2n-1)2^j, 2n2^j[$

$$a_j[m] = \sum_{p \in \Omega''_j} h_j[m - p] a_{j+1}[p] + \sum_{p \in \Omega''_j} g_j[m - p] d_{j+1}[p]$$

On obtient le théorème de Mallat 4.8 en prenant la moyenne de ces deux reconstructions et en observant que $\mathbb{Z} = \Omega'_j \cup \Omega''_j$ et $\emptyset = \Omega'_j \cap \Omega''_j$. \square

5. FRAME INVERSE OPTIMALE PAR RÉCURRENCE SUR LES ÉCHELLES

5.1. **Cas des signaux infinis.** On veut connaître l'optimum de manière récursive sur les échelles.

5.1.1. *Définition du problème de profondeur p .* Le but est de retrouver \hat{a}_0 à partir des $\{d_j\}_{j \leq p}$ et a_p définis de K_- à K_+ en minimisant le coût

$$(5.1) \quad \hat{\epsilon}_0^2(\hat{a}_0) = \sum_{j=1}^p \frac{1}{2^j} \sum_{k=K_-}^{K_+} (d_j[k] - \hat{d}_j[k])^2 + \frac{1}{2^p} \sum_{k=K_-}^{K_+} (a_p[k] - \hat{a}_p[k])^2$$

5.1.2. *Résultat pour les signaux de taille infinie.*

Théoreme 5.1. *Pour des signaux d'entrée (transformé en ondelette de profondeur p) de longueur infinie, la solution de ce problème est le signal obtenu par moyenne des 2^p reconstructions possibles obtenus par sous-échantillonnage. L'erreur obtenue est la somme des erreurs obtenues par reconstruction.*

La preuve est en annexe B

Proposition 5.2. *On peut aussi définir la solution \hat{a}_0 par récurrence:*

$$(5.2) \quad \hat{a}_j[n] = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (h_j[n-k] \hat{a}_{j+1}[k] + g_j[n-k] d_{j+1}[k])$$

C'est la reconstruction de l'algorithme à trous. L'initialisation est faite par $\hat{a}_p = a_p$. L'erreur obtenue est

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \epsilon_0^2(\hat{a}_0) &= \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{2^{j+1}} \hat{\epsilon}_j^2 \\ &= \sum_{j=0}^{p-1} \frac{1}{2^{j+2}} \sum_k \left(\sum_{l \in \cup_{m \in \mathbb{Z}} [m2^j, (2m+1)2^j[} \left(\begin{array}{c} h_j[k-l]a_{j+1}[l] - h_j[k-l-2^j]a_{j+1}[l+2^j] \\ + g_j[k-l]d_{j+1}[p] - g_j[k-l-2^j]d_{j+1}[l+2^j] \end{array} \right) \right)^2 \end{aligned}$$

La preuve est en annexe B

5.2. Cas des signaux de taille finie.

5.2.1. *Problème.* On souhaite reconstruire le signal d'entrée dont la décomposition est la plus proche des données. Afin de pouvoir travailler sur les différentes échelles et contrôler les valeurs obtenues, on souhaite une construction récursive de cet optimum sur chacune des échelles.

Pour cela, on définit le coût total à l'échelle 0

$$(5.4) \quad \epsilon_0^2(\hat{a}_0) = \sum_{j=1}^p \frac{1}{2^j} \sum_{k=K_-}^{K_+} (d_j[k] - \hat{d}_j[k])^2 + \frac{1}{2^p} \sum_{k=K_-}^{K_+} (a_p[k] - \hat{a}_p[k])^2$$

Pour raisonner par récurrence sur les échelles, on considère le coût à l'échelle j :

$$(5.5) \quad \epsilon_j^2(\hat{a}_j) = \sum_{l=j+1}^p \frac{1}{2^l} \sum_{k=K_-}^{K_+} (d_l[k] - \hat{d}_l[k])^2 + \frac{1}{2^p} \sum_{k=K_-}^{K_+} (a_p[k] - \hat{a}_p[k])^2$$

On a la récurrence immédiate:

$$\epsilon_{j-1}(\hat{a}_{j-1})^2 = \frac{1}{2^j} \sum_{k=K_-}^{K_+} (d_j[k] - \hat{d}_j[k])^2 + \epsilon_j^2(\hat{a}_j)$$

5.2.2. *Expression du coût.* A chaque échelle j , on reconstruit le signal optimal à cette échelle. Cela simplifie la résolution du problème au niveau suivant $j - 1$. En effet, si on connaît l'optimum à l'échelle j , le coût à cette échelle peut-être exprimé plus facilement.

Théoreme 5.3. *L'erreur $\epsilon_j^2(\hat{a}_j)$ s'écrit par changement de variable:*

$$(5.6) \quad \begin{aligned} \epsilon_j^2(\hat{a}_j) &= \frac{1}{2^j} \sum_{m \in \Gamma_j} (\hat{a}_j[m] - \check{a}_j[m])^2 \\ &+ \sum_{m,n \in \Gamma_j^-} (\hat{a}_j - \check{a}_j)[m](\hat{a}_j - \check{a}_j)[n] M_j^-(m - K_-, n - K_-) \\ &+ \sum_{m,n \in \Gamma_j^+} (\hat{a}_j - \check{a}_j)[m](\hat{a}_j - \check{a}_j)[n] M_j^+(m - K_+, n - K_+) \\ &+ \sum_{i=j}^p \check{\epsilon}_i^2 \end{aligned}$$

où

- les intervalles Γ_j^- , Γ_j et Γ_j^+ sont disjoints et juxtaposés.
- Les deux matrices M_j^+ et M_j^- sont symétriques et positives; elles ne dépendent que des filtres g et h , de la profondeur totale p de la décomposition et de la profondeur j où nous sommes placés. On peut les calculer initialement.
- \check{a}_j est l'optimum obtenu à cette échelle j . Il est stationnaire dans Γ_j et son expression est donnée par la formule (5.8).
- $\check{\epsilon}_i^2$ est le coût minimal du passage de l'échelle $i + 1$ à l'échelle i .

Toutes les variables et tous les signaux sont explicités au paragraphe 5.2.4. La preuve est en annexe C.

5.2.3. *Reconstruction optimale.* Le problème d'optimisation peut donc être traité indépendamment sur trois intervalles: deux problèmes de bord et un problème central.

Au centre, sur Γ_j , la solution est stationnaire, elle ne varie pas quand l'intervalle $[K_-, K_+]$ augmente. Elle est donnée par l'algorithme de reconstruction à trous (4.8), comme pour des signaux de taille infinie (déconvolution). C'est le signal optimal stationnaire.

Sur chacun des intervalles de bord Γ_j^- et Γ_j^+ , pour avoir une estimation du signal à l'échelle j , on doit résoudre un système quadratique glissant (stationnaire par rapport aux bords), dont les caractéristiques peuvent être déterminées initialement en connaissant les filtres g et h .

5.2.4. *Notations, expressions des intervalles, des problèmes de bord et du signal intermédiaire. Intervalles:*

À l'échelle p , les 3 intervalles indépendants sont donnés par:

$$\Gamma_p = [K^-, K^+], \Gamma_p^- = \emptyset, \Gamma_p^+ = \emptyset$$

À l'échelle $j < p$, les 3 intervalles indépendants sont donnés par:

$$\Gamma_j = [\gamma_j^-, \gamma_j^+]$$

$$\Gamma_j^- = [\phi_j^-, \gamma_j^- - 1]$$

$$\Gamma_j^+ = [\gamma_j^+ + 1, \phi_j^+],$$

avec pour bornes:

$$\gamma_j^- = K_- + (2^{p-1} - 2^j)p_+ + 2^{p-1} \max(q_+, p_+)$$

$$\gamma_j^+ = K_+ + (2^{p-1} - 2^j)p_- + 2^{p-1} \min(q_-, p_-)$$

$$\phi_j^- = K_- + (2^{p-1} - 2^j)p_- + 2^{p-1} \min(q_-, p_-)$$

$$\phi_j^+ = K_+ + (2^{p-1} - 2^j)p_+ + 2^{p-1} \max(q_+, p_+).$$

Une condition s'impose: $\gamma_j^- \leq \gamma_j^+$, c'est à dire

$$K_+ - K_- \geq 2^{p-1}(p_+ - p_-) + 2^p(\max(p_+, q_+) - \min(p_-, q_-))$$

La figure 10 représentent les intervalles autour de K_+ et l'élargissement par diffusion de γ_j^+ quand j diminue.

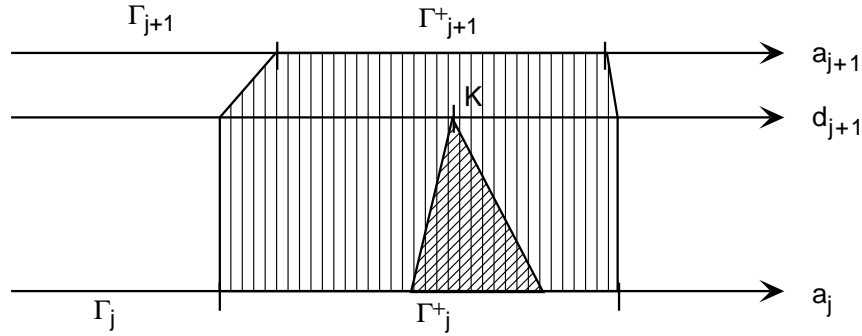


FIGURE 10. Élargissement par diffusion du problème de bord autour de K^+ entre l'échelle $j + 1$ et j

Expression des matrices de bord:

Les systèmes quadratiques au rang j sont donnés par récurrence à partir du rang $j + 1$. Soient les intervalles:

$$\Phi_j^- = \Gamma_j^- - K_- = [(2^{p-1} - 2^j)p_- + 2^p \max(q_-, p_-), (2^{p-1} - 2^j)p_+ + 2^p \max(q_+, p_+) - 1]$$

$$\Phi_j^+ = \Gamma_j^+ - K_+ = [(2^{p-1} - 2^j)p_- + 2^p \max(q_-, p_-) + 1, (2^{p-1} - 2^j)p_+ + 2^p \max(q_+, p_+)]$$

Alors la matrice $M_j^-(n, p)$ du théorème 5.3 est donnée par

$$\begin{aligned}
M_j^-(n, p) &= \frac{1}{2^{j-1}} \sum_{k \in [0, +\infty]} g_j[l-k]g_j[p-k] \\
&\quad + \frac{1}{2^{j-1}} \sum_{k \in [(2^{p-1}-2^j)p_+ + 2^{p-1} \max(q_+, p_+), +\infty]} h_j[l-k]h_j[p-k] \\
(5.7) \quad &\quad + \sum_{m, n \in \Phi_j^-} M_{j+1}^-(m, n)h_j[l-m]h_j[p-n]
\end{aligned}$$

Et la matrice $M_j^+(n, p)$ du théorème 5.3 est donnée par

$$\begin{aligned}
M_j^+(n, p) &= \frac{1}{2^{j-1}} \sum_{k \in [-\infty, 0]} g_j[l-k]g_j[p-k] \\
&\quad + \frac{1}{2^{j-1}} \sum_{k \in [-\infty, (2^{p-1}-2^j)p_- + 2^{p-1} \max(q_-, p_-)]} h_j[l-k]h_j[p-k] \\
&\quad + \sum_{m, n \in \Phi_j^+} M_{j+1}^+(m, n)h_j[l-m]h_j[p-n]
\end{aligned}$$

Expression du signal intermédiaire:

On définit le signal \tilde{a}_j par

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_j[p] &= \frac{1}{2} \sum_{k \in [K_-, K_+]} g_j[p-k]d_{j+1}[k] \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{k \in \Gamma_{j+1}} h_j[p-k]a_{j+1}[k] \\
&\quad + 2^{j-1} \sum_{m, k \in \Gamma_{j+1}^+} M_{j+1}^+(m - K_+, k - K_+)h_j[p-m]a_{j+1}[k] \\
&\quad + 2^{j-1} \sum_{m, k \in \Gamma_{j+1}^-} M_{j+1}^-(m - K_-, k - K_-)h_j[p-m]a_{j+1}[k]
\end{aligned}$$

Il est stationnaire sur Γ_j .

Les lemmes 3.4 et 3.5 appliqués à l'expression du coût donné par le théorème 5.3, permet de définir la solution optimale:

Théorème 5.4. *Le signal optimal est \check{a}_j défini à partir de \tilde{a}_j par l'expression*

$$(5.8) \quad \check{a}_j = \begin{cases} \frac{1}{2^j} (M_j^-)^{-1} \tilde{a}_j & \text{sur } \Gamma_j^- \\ \tilde{a}_j & \text{sur } \Gamma_j \\ \frac{1}{2^j} (M_j^+)^{-1} \tilde{a}_j & \text{sur } \Gamma_j^+ \end{cases}$$

Le coût minimal correspondant est le coût minimal de transition de l'échelle $j+1$ à l'échelle j . Son expression est

$$\begin{aligned}
\epsilon_j^2 &= \sum_{k \in [K_-, K_+]} \frac{1}{2^{j+1}} d_{j+1}^2[k] \\
&+ \sum_{k \in \Gamma_j} \frac{1}{2^{j+1}} a_{j+1}^2[k] \\
&+ \sum_{m, k \in \Gamma_j^+} M_{j+1}^+(m - K_+, k - K_+) a_{j+1}[m] a_{j+1}[k] \\
&+ \sum_{m, k \in \Gamma_j^-} M_{j+1}^-(m - K_-, k - K_-) a_{j+1}[m] a_{j+1}[k] \\
&- \frac{1}{2^j} \sum_{l \in \Phi_j} \check{a}_j[l] \check{a}_j[l]
\end{aligned}$$

A partir de ce théorème, on retrouve le théorème 5.3. Le coût total au rang j s'écrit:

$$\begin{aligned}
\epsilon_j^2(\hat{a}_j) &= \frac{1}{2^j} \sum_{m \in \Gamma_j} (\hat{a}_j[m] - \check{a}_j[m])^2 \\
&+ \sum_{m, n \in \Gamma_j^-} (\hat{a}_j - \check{a}_j)[m] (\hat{a}_j - \check{a}_j)[n] M_j^-(m - K_-, n - K_-) \\
&+ \sum_{m, n \in \Gamma_j^+} (\hat{a}_j - \check{a}_j)[m] (\hat{a}_j - \check{a}_j)[n] M_j^+(m - K_+, n - K_+) \\
(5.9) \quad &+ \sum_{i=j}^p \epsilon_i^2
\end{aligned}$$

6. IMPLÉMENTATION DES CALCULS SOUS MATLAB ET SIMULINK

Une bibliothèque Simulink a été créée pour observer la réponse de la reconstruction inverse. Les sources Matlab seront prochainement disponibles à partir de l'adresse <http://cas.ensmp.fr/~chaplais/>. Les signaux d'entrée sont donnés séquentiellement. La réponse en sortie est donnée par un vecteur sur l'espace γ^+ et de manière séquentielle dans γ .

6.1. Reconstruction parfaite. Lorsqu'on observe la reconstruction d'un signal décomposé, la reconstruction peut être faite en temps réel. En effet, l'estimation sur γ et γ^+ donne un coût nul. Or le coût est une forme bilinéaire définie positive sur $[K_-, K_+]$ donc le signal obtenu est exactement le signal initial sur $[K_-, K_+]$.

Les figures 11 et 12 montrent ces différentes reconstructions pour une profondeur d'échelle de 1 et de 3.

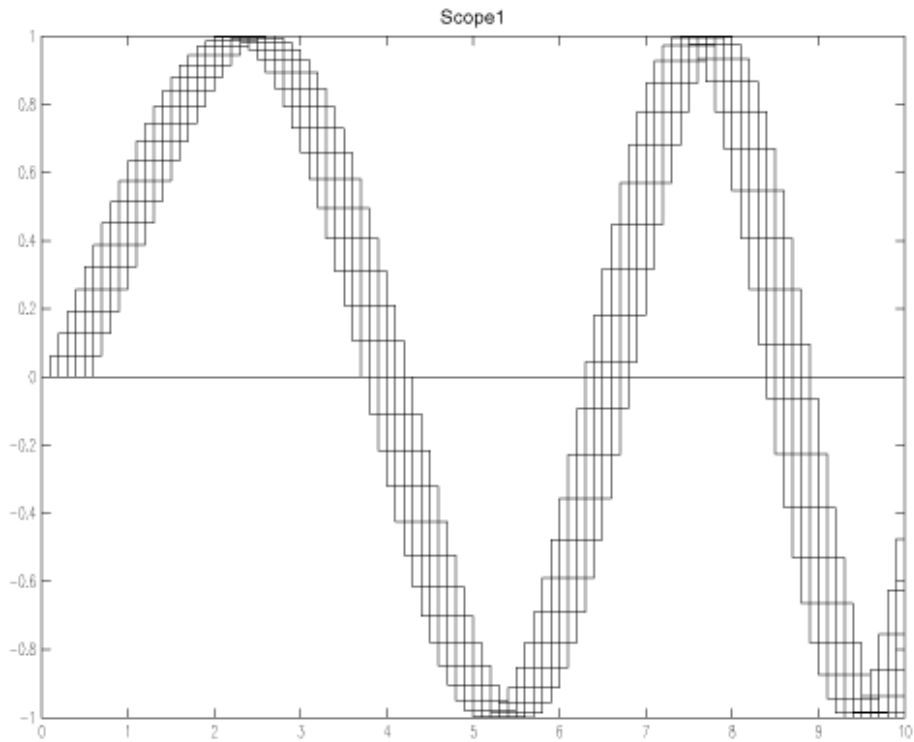


FIGURE 11. Décomposition et reconstruction à une échelle

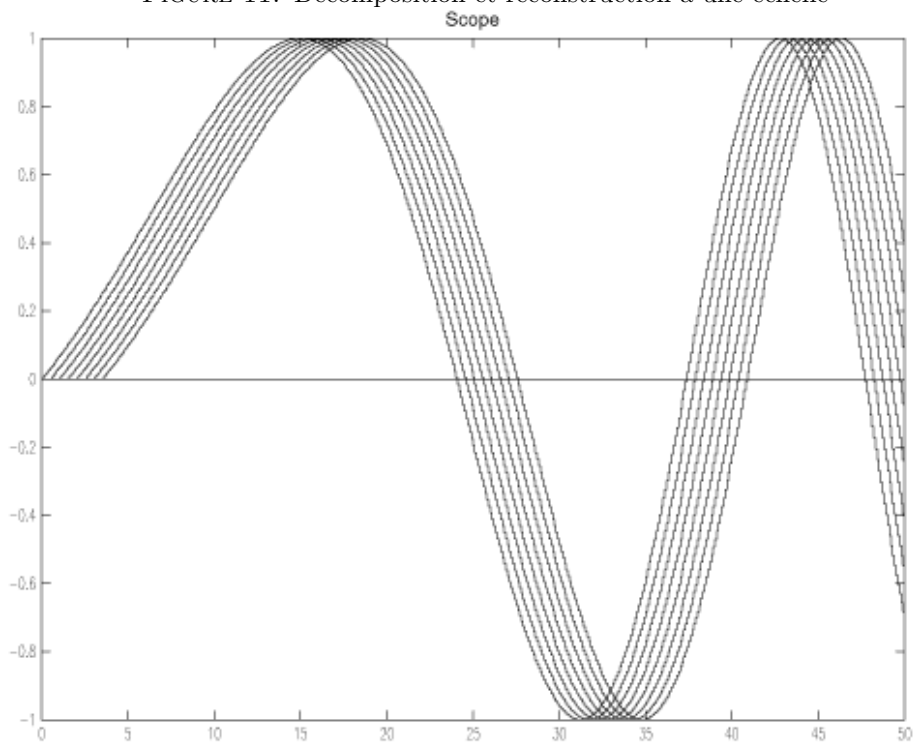


FIGURE 12. Décomposition et reconstruction à 3 échelles

Ces figures sont obtenues par la décomposition avec les ondelettes de Daubechies à 3 moments nuls. Les signaux de gauche sont les estimés au bord et le plus à droite correspond à la reconstruction stationnaire.

6.2. Sensibilité au bruit. Si du bruit est ajouté aux transformées, et que celle-ci sorte de l'image d'un signal, le signal estimé s'écarte d'autant plus de l'optimum que l'on veut une réponse rapidement. Dans Γ , le signal est optimum mais le retard obtenu est de l'ordre de $2^p * l$, où p est la profondeur totale de la décomposition et l la longueur du filtre h .

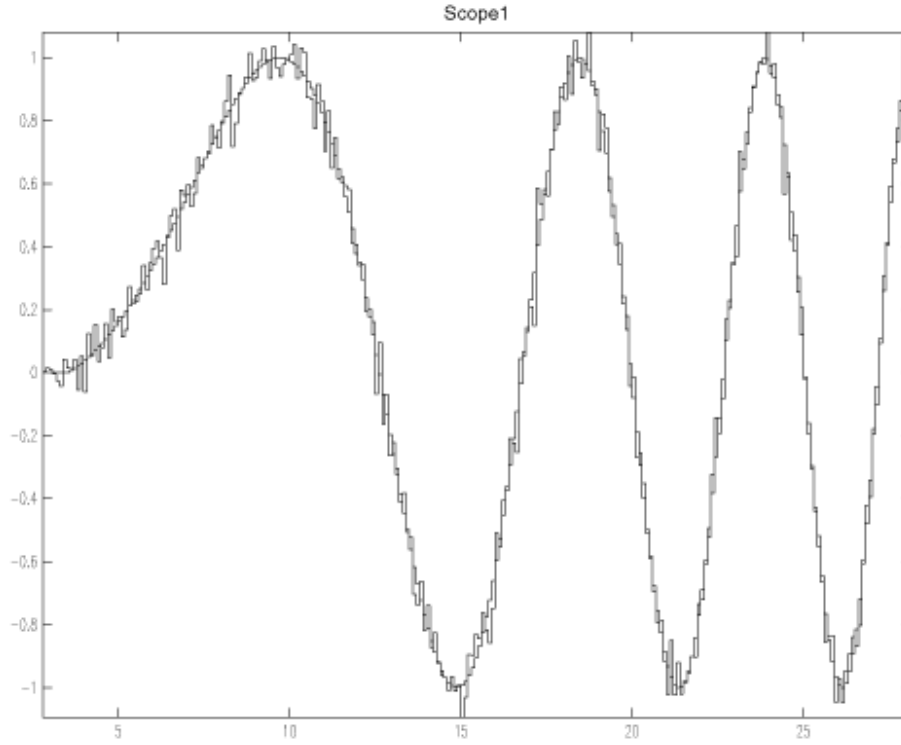


FIGURE 13. Reconstruction optimale avec du bruit à 3 échelles

Lorsque que l'on s'avance dans Γ^+ , on obtient un signal qui n'est estimé qu'à partir des valeurs de la décomposition calculé au temps T , et la réponse estimé s'éloigne de l'optimum stationnaire. L'avantage est d'avoir une réponse plus rapide. Il faut trouver le meilleur compromis entre la fiabilité de l'estimation et le temps d'attente.

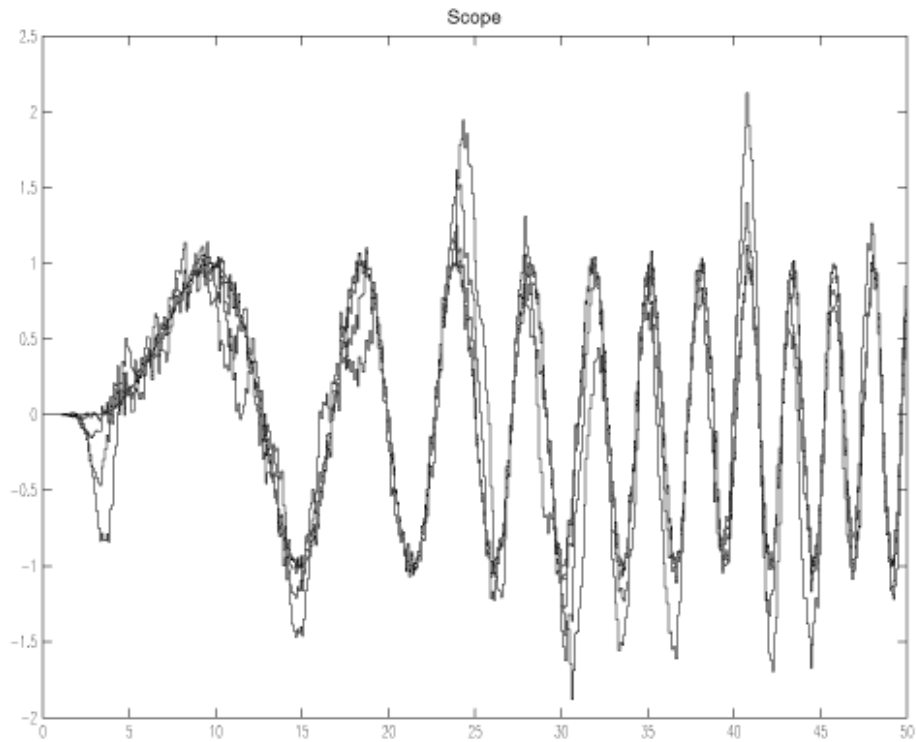


FIGURE 14. Reconstitutions estimées suivant le retard avec du bruit à 3 échelles

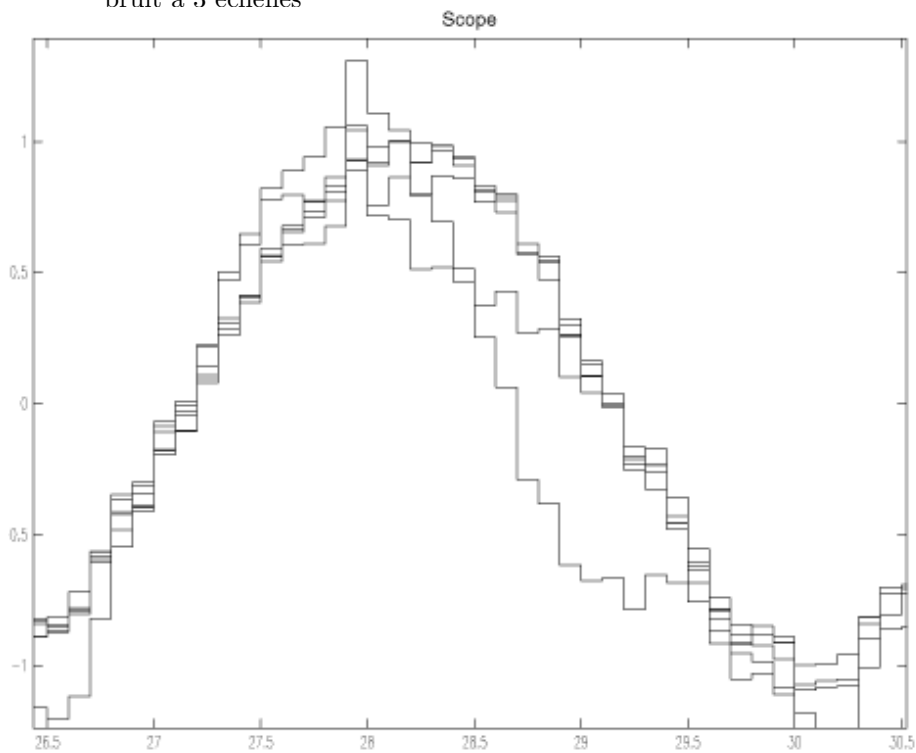


FIGURE 15. Zoom

Ici, un bruit d'amplitude moyenne de .05 a été ajouté aux transformées en ondelettes. Les signaux estimés et le signal optimal ont été traduits pour observer les différentes réponses. Les estimés les plus rapides donnent de mauvais résultats, elles sont sensibles au bruit. Une étude des valeurs propres des matrices de bord rend compte de cette sensibilité. Le bord a une longueur de 35 pas, les estimés affichées sont prises avec des retards respectifs de 0, 5, 10, 15, 20 pas.



FIGURE 16. Montage Simulink effectué pour le débruitage
 Le signal est décomposé sur 6 échelles. Les coefficients sont seuillés suivant le critère donné dans le livre de Mallat: $T = \sigma \sqrt{2 \log_e N}$, théorème (10.4).

6.3. Exemple d'utilisation, le débruitage.

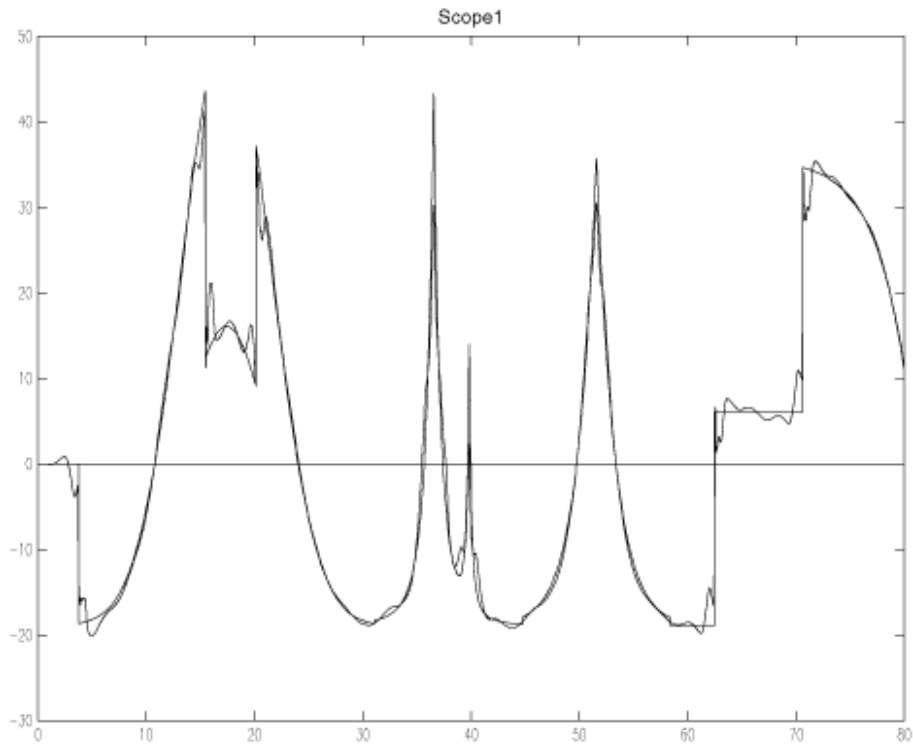


FIGURE 17. Débruitage optimal

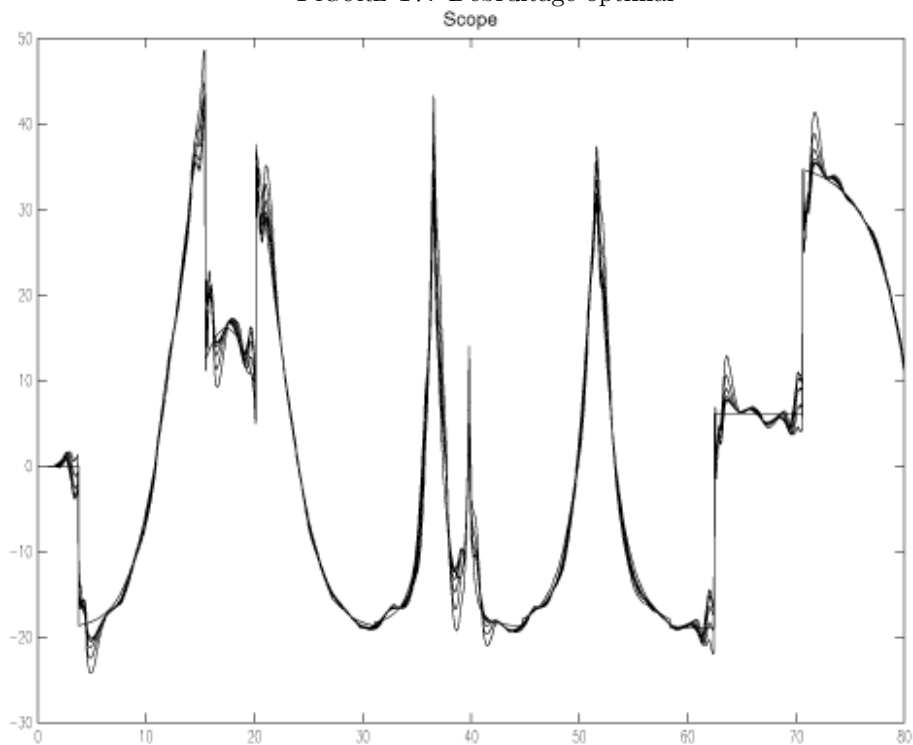


FIGURE 18. Débruitages estimés

Le débruitage est effectué sur les signaux exemples du livre de Mallat figure (10.5). Les ondelettes utilisées sont les Daubechies à 2 moments nuls. La profondeur est $p = 6$. La variance du bruit est estimée à 4. Le temps d'échantillonnage est .02. La largeur de Γ^+ est $189 * .02 = 3.78s$. Les signaux visibles sur la seconde figure sont calculés après 3.58s, 3.38s, 3.18s, 2.98s et 2.88s. On voit donc que pour gagner 10 pour cents de temps, les approximations deviennent vite mauvaises.

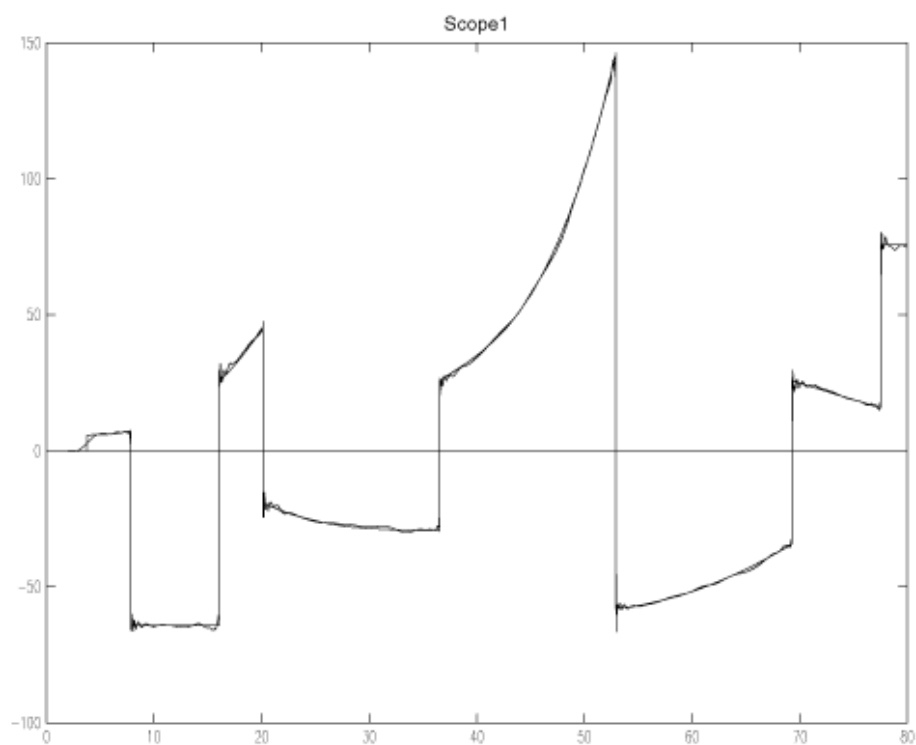


FIGURE 19. Débruitage optimal

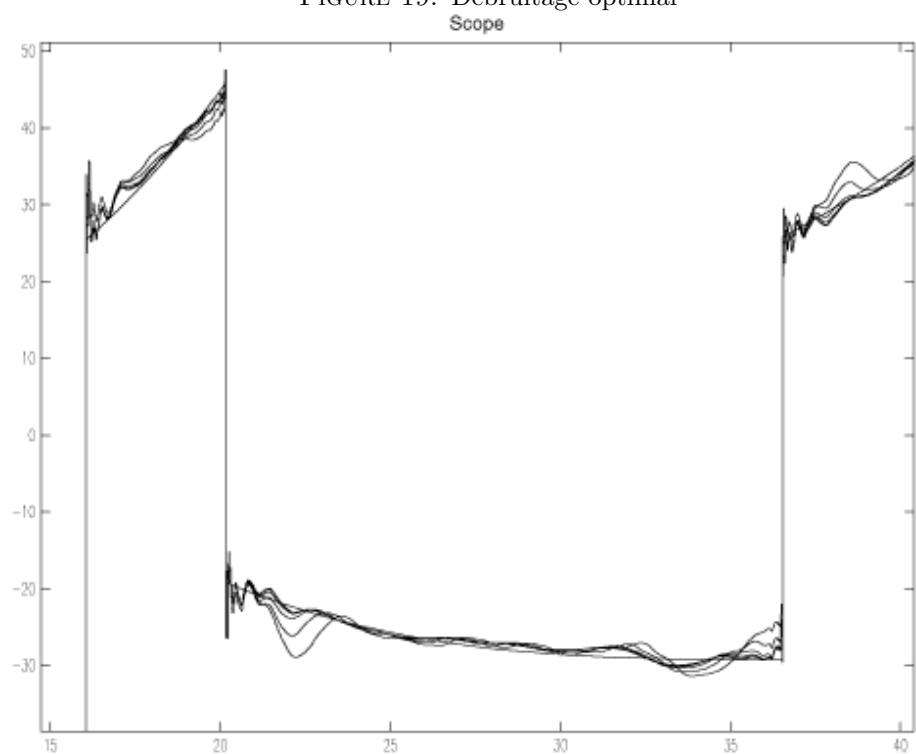


FIGURE 20. Débruitages estimés avec zoom

Le débruitage est effectué sur le signal figure (10.4) du livre de Mallat. La variance du bruit est estimée ici à 7. Les signaux visibles sur la seconde figure sont calculés après 3.54s, 3.28s, 2.98s, 2.58s, 2, 18.

Nous souhaitons débruiter ici un signal correspondant à un système physique afin d'observer ses replats, donc sa dérivée.

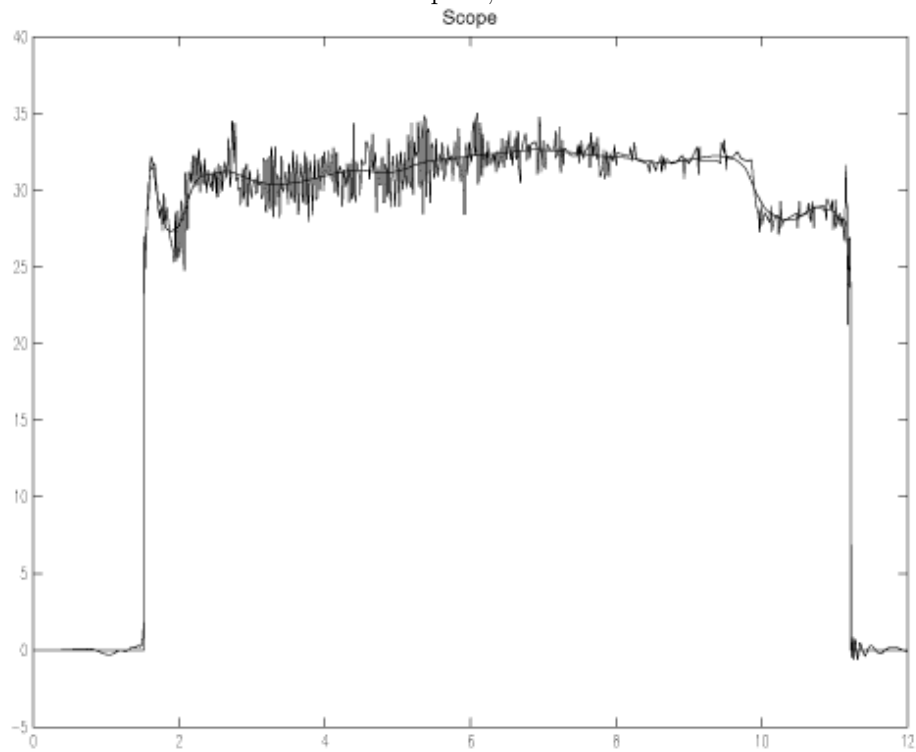


FIGURE 21. Signal initial et débruitage optimal

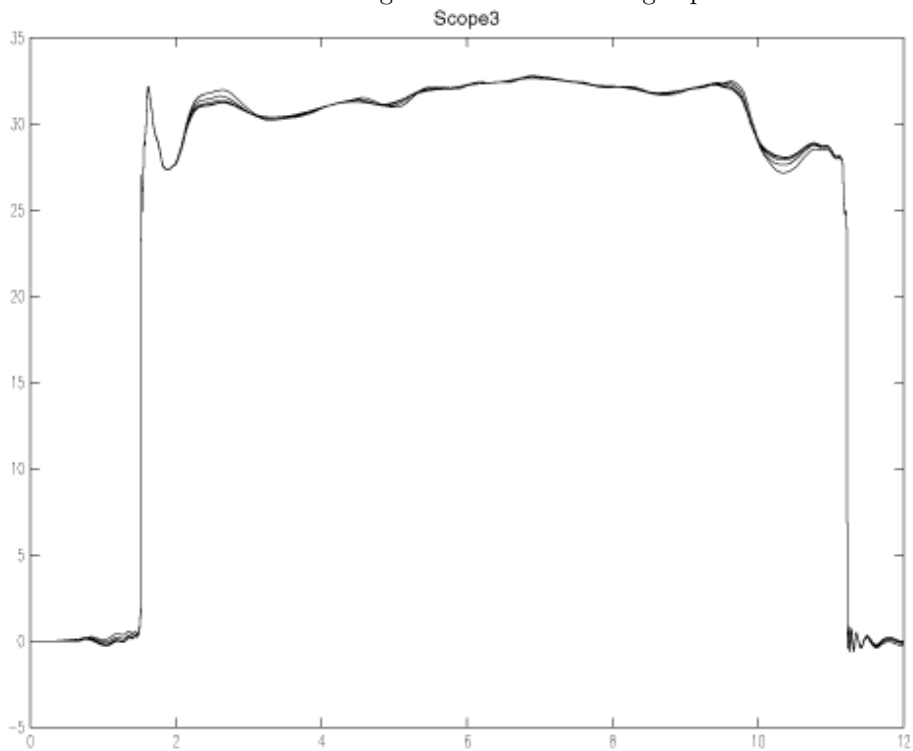


FIGURE 22. Débruitages estimés

σ est estimé à 3, $st = .004$, $p = 7$, les ondelettes sont encore des Daubechies à 2 moment nuls. La largeur du bord est de $381 * st = 1.524s$, donc l'estimé stationnaire ne peut être calculé qu'avec un retard de $1.524s$. Les cinq signaux estimés ont des retards respectifs de $1.464s$, $1.404s$, $1.324s$, $1.224s$, $1.124s$

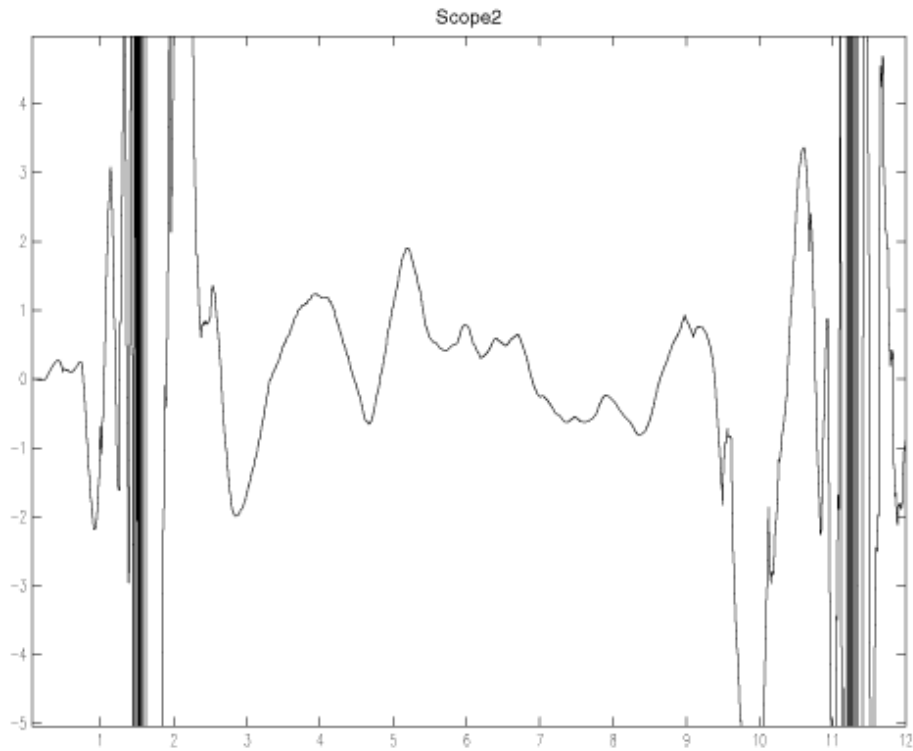


FIGURE 23. Dérivée du débruitage optimal

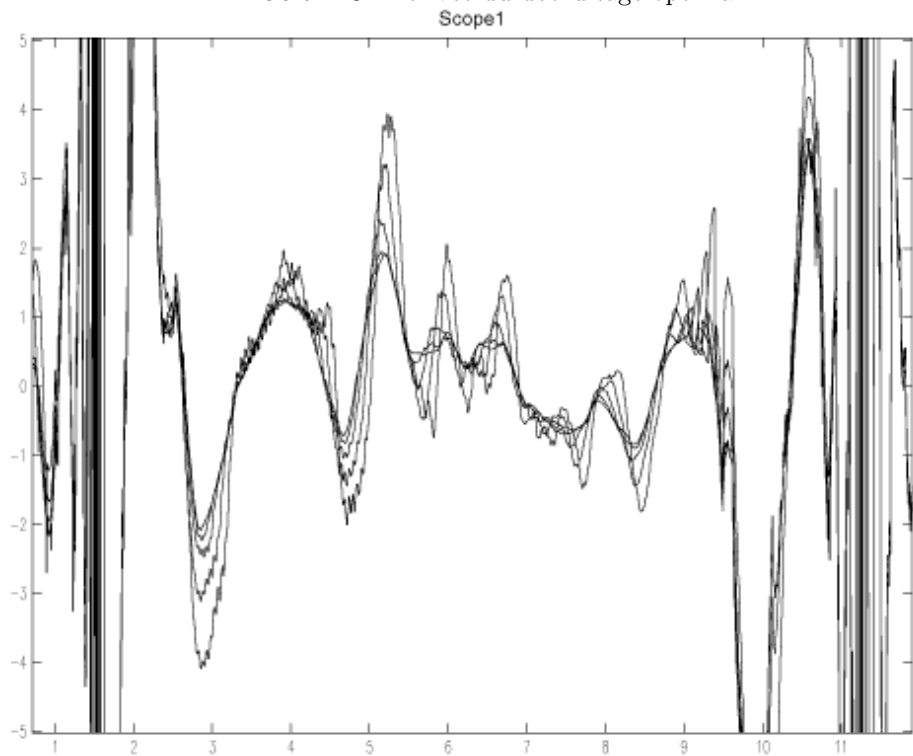


FIGURE 24. Dérivées des signaux estimés

Nous voyons ici que pour du travail précis requis par la dérivé, seule l'estimation stationnaire obtenue dans Γ avec un retard de 1.524s convient. Ou bien les estimés très proches de Γ avec des retard du même ordre à 10 pour cents près peuvent convenir. En effet dans le cadre de systèmes dynamiques proches de la résonance, un tel gain peut-être fort utile.

7. CONCLUSION

Les résultats obtenus donnent un signal optimal calculé par récurrence sur les échelles. Les expressions mathématiques montrent la récursivité en temps de manière évidente.

L'implémentation temps réel permet d'avoir une réponse du signal plus rapide qu'avec la simple déconvolution qui demande un temps de réponse de $2^p * l$. Mais les signaux obtenus ne sont pas égaux à l'optimum stationnaire. Aussi, plus le temps de réponse est long, plus ces estimations tendent vers l'optimum stationnaire. On peut voir, de manière qualitative, que les gains de temps supérieur à 10 pour cents entraînent des écarts qui deviennent bien visibles à l'œil. Un juste équilibre peut être trouvé en fonction de l'utilisation voulue: réponse rapide ou réponse fiable.

Une étude plus poussée peut, à partir de ces résultats, donner de manière quantitative les écarts entre les estimés et l'optimum stationnaire, en connaissant les transformations non-linéaires appliquées aux différentes transformées (seuillage, écrêtage...).

APPENDIX A. DÉMONSTRATION DU LEMME 3.3

A.1. **On exprime le coût d'une première manière.** On veut écrire:

$$\epsilon^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (\alpha_0[n]\alpha_0[p]u(n,p) + \beta_0[n]\beta_0[p]v(n,p))$$

Avec pour définition de α_0 et β_0

$$\hat{a}_0 = a'_0 + \alpha_0 = a''_0 + \beta_0$$

$$a'_0 = W_{pair}^{-1}(a_1, d_1)$$

$$a''_0 = W_{impair}^{-1}(a_1, d_1)$$

Et

$$u(n,p) = \sum_{\{k, 2k \in [K_-, K_+]\}} \frac{1}{2} W(\mathbf{1}_p)[2k] \cdot W(\mathbf{1}_n)[2k]$$

$$v(n,p) = \sum_{\{k, 2k+1 \in [K_-, K_+]\}} \frac{1}{2} W(\mathbf{1}_p)[2k+1] \cdot W(\mathbf{1}_n)[2k+1]$$

où \cdot est le produit scalaire de \mathbb{R}^2

Les signaux a_1 et d_1 sont donnés entre K_- et K_+ . On les suppose nuls en dehors de cet intervalle. On sait qu'il existe deux reconstructions possibles $a'_0 = W_{pair}^{-1}(a_1, d_1)$ et $a''_0 = W_{impair}^{-1}(a_1, d_1)$ définies sur \mathbb{Z} , qui sont chacune exactes pour une moitié des coefficients a_1 et d_1 :

$$EP(W(a'_0)) = EP(W(W_{pair}^{-1}(a_1, d_1))) = EP(a_1, d_1) \text{ (équation 2.7)}$$

$$EI(W(a''_0)) = EI(W(W_{impair}^{-1}(a_1, d_1))) = EI((a_1, d_1) \text{ (équation 2.8)}$$

Pour simplifier les calculs, on ajoute les variables α_0 et β_0 définies par

$$\hat{a}_0 = a'_0 + \alpha_0 = a''_0 + \beta_0$$

Alors

$$\begin{aligned} \epsilon^2 &= \frac{1}{2} \sum_{n=K_-}^{K_+} (\hat{a}_1[n] - a_1[n])^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=K_-}^{K_+} (\hat{d}_1[n] - d_1[n])^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\{k, 2k \in [K_-, K_+]\}} (\hat{a}_1[2k] - a_1[2k])^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\{k, 2k+1 \in [K_-, K_+]\}} (\hat{a}_1[2k+1] - a_1[2k+1])^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\{k, 2k \in [K_-, K_+]\}} (\hat{d}_1[2k] - d_1[2k])^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\{k, 2k+1 \in [K_-, K_+]\}} (\hat{d}_1[2k+1] - d_1[2k+1])^2 \end{aligned}$$

qu'on note $\epsilon^2 = \epsilon'^2 + \epsilon''^2$ avec

$$\begin{aligned}\epsilon'^2 &= \frac{1}{2} \sum_{\{k, 2k \in [K_-, K_+]\}} (\hat{a}_1[2k] - a_1[2k])^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\{k, 2k \in [K_-, K_+]\}} (\hat{d}_1[2k] - d_1[2k])^2 \text{ et} \\ \epsilon''^2 &= \frac{1}{2} \sum_{\{k, 2k+1 \in [K_-, K_+]\}} (\hat{a}_1[2k+1] - a_1[2k+1])^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\{k, 2k+1 \in [K_-, K_+]\}} (\hat{d}_1[2k+1] - d_1[2k+1])^2\end{aligned}$$

On calcul $\hat{a}_1[2k] - a_1[2k]$:

$$\begin{aligned}\hat{a}_1[2k] - a_1[2k] &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n-2k] \hat{a}_0[n] - a_1[2k] \\ &= \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n-2k] (a'_0[n] + \alpha_0[n]) \right) - a_1[2k] \\ &= \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n-2k] a'_0[n] - a_1[2k] \right) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n-2k] \alpha_0[n] \\ &= (W(a'_0)[2k] - a_1[2k]) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n-2k] \alpha_0[n] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n-2k] \alpha_0[n] \text{ d'après l'équation (2.7)}\end{aligned}$$

$\hat{d}_1[2k] - d_1[2k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[n-2k] \alpha_0[n]$ est vérifié de la même manière

En reportant ces expressions dans ϵ'^2 , on obtient:

$$\begin{aligned}\epsilon'^2 &= \frac{1}{2} \sum_{\{k, 2k \in [K_-, K_+]\}} \left[\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n-2k] \alpha_0[n] \right)^2 + \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[n-2k] \alpha_0[n] \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\{k, 2k \in [K_-, K_+]\}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (h[n-2k] h[p-2k] \alpha_0[n] \alpha_0[p] + g[n-2k] g[p-2k] \alpha_0[n] \alpha_0[p]) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \alpha_0[n] \alpha_0[p] \sum_{\{k, 2k \in [K_-, K_+]\}} (h[n-2k] h[p-2k] + g[n-2k] g[p-2k]) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \alpha_0[n] \alpha_0[p] \sum_{\{k, 2k \in [K_-, K_+]\}} \frac{1}{2} W(\mathbf{1}_p)[2k] \cdot W(\mathbf{1}_n)[2k] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \alpha_0[n] \alpha_0[p] u(n, p)\end{aligned}$$

où \cdot est le produit scalaire de \mathbb{R}^2

Des résultats identiques sont obtenus pour ϵ'^2

$$\begin{aligned}
\epsilon'^2 &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \beta_0[n]\beta_0[p] \sum_{\{k, 2k+1 \in [K_-, K_+]\}} (h[n-2k-1]h[p-2k-1] + g[n-2k-1]g[p-2k-1]) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \beta_0[n]\beta_0[p] \sum_{\{k, 2k+1 \in [K_-, K_+]\}} \frac{1}{2} W(\mathbf{1}_p)[2k+1] \cdot W(\mathbf{1}_n)[2k+1] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \beta_0[n]\beta_0[p] v(n, p)
\end{aligned}$$

On reprend l'expression de ϵ^2

$$\begin{aligned}
\epsilon^2 &= \epsilon'^2 + \epsilon''^2 \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (\alpha_0[n]\alpha_0[p]u(n, p) + \beta_0[n]\beta_0[p]v(n, p))
\end{aligned}$$

On obtient la première expression voulue.

A.2. On souhaite simplifier encore l'expression de ϵ^2 . On remplace maintenant α_0 et β_0 par:

$$\alpha_0 = \hat{a}_0 - a'_0$$

$$\beta_0 = \hat{a}_0 - a''_0$$

$$(A.1) \quad \epsilon^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (\alpha_0[n]\alpha_0[p]u(n, p) + \beta_0[n]\beta_0[p]v(n, p))$$

$$(A.2) \quad = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (u(n, p) + v(n, p))\hat{a}_0[n]\hat{a}_0[p]$$

$$(A.3) \quad - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{a}_0[n] \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (u(n, p)a'_0[p] + v(n, p)a''_0[p])$$

$$(A.4) \quad - \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \hat{a}_0[p] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (u(n, p)a'_0[n] + v(n, p)a''_0[n])$$

$$(A.5) \quad + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (u(n, p)a'_0[n]a'_0[p] + v(n, p)a''_0[n]a''_0[p])$$

A.2.1. On calcul le deuxième et troisièmes termes (A.2) et (A.3).

$$\begin{aligned}
& \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (u(n, p)a'_0[p] + v(n, p)a''_0[p]) \\
&= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (a'_0[p] \sum_{\{k, 2k \in [K_-, K_+]\}} \frac{1}{2} W(\mathbf{1}_p)[2k] \cdot W(\mathbf{1}_n)[2k]) \\
&\quad + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (a''_0[p] \sum_{\{k, 2k+1 \in [K_-, K_+]\}} \frac{1}{2} W(\mathbf{1}_p)[2k+1] \cdot W(\mathbf{1}_n)[2k+1]) \\
&= \sum_{\{k, 2k \in [K_-, K_+]\}} \frac{1}{2} W \left(\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a'_0[p] \mathbf{1}_p \right) [2k] \cdot W(\mathbf{1}_n)[2k] \\
&\quad + \sum_{\{k, 2k+1 \in [K_-, K_+]\}} \frac{1}{2} W \left(\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a''_0[p] \mathbf{1}_p \right) [2k+1] \cdot W(\mathbf{1}_n)[2k+1] \\
&= \sum_{\{k, 2k \in [K_-, K_+]\}} \frac{1}{2} (a_1, d_1)[2k] \cdot W(\mathbf{1}_n)[2k] \\
&\quad + \sum_{\{k, 2k+1 \in [K_-, K_+]\}} \frac{1}{2} (a_1, d_1)[2k+1] \cdot W(\mathbf{1}_n)[2k+1] \\
&= \sum_{k \in [K_-, K_+]} \frac{1}{2} (a_1, d_1)[k] \cdot W(\mathbf{1}_n)[k] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k \in [K_-, K_+]} (h[n-k]a_1[k] + g[n-k]d_1[k]) \\
&= \tilde{a}_0[n]
\end{aligned}$$

où $\tilde{a}_0[n]$ est la reconstruction moyenne $W_{moy}^{-1}(a_1, d_1)$ donnée par l'équation (2.5), en supposant les signaux (a_1, d_1) nuls en dehors de $[K_-, K_+]$.

A.2.2. On calcul le dernier terme (A.4).

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} u(n, p)a'_0[n]a'_0[p] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{\{k, 2k \in [K_-, K_+]\}} \frac{1}{2} W(\mathbf{1}_p)[2k] \cdot W(\mathbf{1}_n)[2k] a'_0[n] a'_0[p] \\
&= \sum_{\{k, 2k \in [K_-, K_+]\}} \frac{1}{2} W \left(\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a'_0[p] \mathbf{1}_p \right) [2k] \cdot W \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a'_0[n] \mathbf{1}_n \right) [2k] \\
&= \sum_{\{k, 2k \in [K_-, K_+]\}} \frac{1}{2} (a_1[2k]^2 + d_1[2k]^2)
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} v(n,p) a_0''[n] a_0''[p] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{\{k, 2k+1 \in [K_-, K_+]\}} \frac{1}{2} W(\mathbf{1}_p)[2k+1] \cdot W(\mathbf{1}_n)[2k+1] a_0''[n] a_0''[p] \\
&= \sum_{\{k, 2k+1 \in [K_-, K_+]\}} \frac{1}{2} W\left(\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_0''[p] \mathbf{1}_p\right)[2k+1] \cdot W\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_0''[n] \mathbf{1}_n\right)[2k+1] \\
&= \sum_{\{k, 2k+1 \in [K_-, K_+]\}} \frac{1}{2} (a_1[2k+1]^2 + d_1[2k+1]^2)
\end{aligned}$$

On peut alors simplifier le dernier terme (A.4) de ϵ^2 :

$$\begin{aligned}
\mu^2 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (u(n,p) a_0'[n] a_0'[p] + v(n,p) a_0''[n] a_0''[p]) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k \in [K_-, K_+]} (a_1[k]^2 + d_1[k]^2)
\end{aligned}$$

A.2.3. Calcul du premier terme (A.1).

$$\begin{aligned}
M(n,p) &= u(n,p) + v(n,p) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k \in [K_-, K_+]} W(\mathbf{1}_p)[k] \cdot W(\mathbf{1}_n)[k]
\end{aligned}$$

n et p jouent un rôle symétrique, on fait les calculs ici principalement en fonction de n .

On étudie les supports de $W(\mathbf{1}_n)$.

On connaît les supports de h et g : $[p_-, p_+]$, $[q_-, q_+]$ donc:

$W(\mathbf{1}_n)[k] = (h[n-k], g[n-k])$ a son support dans $[n - \max(p_+, q_+), n - \min(p_-, q_-)]$ ce qui montre que

$$\begin{aligned}
M(n,p) &= \frac{1}{2} \sum_{k \in [K_-, K_+]} W(\mathbf{1}_p)[k] \cdot W(\mathbf{1}_n)[k] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k \in [K_-, K_+] \cap [n - \max(p_+, q_+), n - \min(p_-, q_-)]} W(\mathbf{1}_p)[k] \cdot W(\mathbf{1}_n)[k] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k \in [K_-, K_+] \cap [\max(n,p) - \max(p_+, q_+), \min(n,p) - \min(p_-, q_-)]} W(\mathbf{1}_p)[k] \cdot W(\mathbf{1}_n)[k]
\end{aligned}$$

A.2.4. *Intervalle où $M(n,p) = 0$.* On cherche les n et les p pour lesquels $M(n,p) = 0$. Il suffit d'avoir

$$[K_-, K_+] \cap [n - \max(p_+, q_+), n - \min(p_-, q_-)] = \emptyset$$

Cela s'écrit encore:

$$n > K_+ + \max(p_+, q_+) \text{ ou } n < K_- + \min(p_-, q_-)$$

Donc si $n > K_+ + \max(p_+, q_+)$ ou si $n < K_- + \min(p_-, q_-)$, alors $\forall p, M(n, p) = 0$

On défini ainsi

$$\Phi = [K_- + \min(p_-, q_-), K_+ + \max(p_+, q_+)]$$

Le support de $M(n, p)$ est dans Φ^2

Et pour tout $n \in \Phi$:

(A.5)

$$[K_-, K_+] \cap [n - \max(p_+, q_+), n - \min(p_-, q_-)] = [\max(K_-, n - \max(p_+, q_+)), \min(K_+, n - \min(p_-, q_-))]$$

A.2.5. *Intervalle où $M(n, p) = \delta(n - p)$.*

Si $n \in [K_- + \max(p_+, q_+), K_+ \min(p_-, q_-)]$ alors

$$[K_-, K_+] \cap [n - \max(p_+, q_+), n - \min(p_-, q_-)] = [K_-, K_+]$$

Donc pour tout p

$$\begin{aligned} M(n, p) &= \frac{1}{2} \sum_{k \in [K_-, K_+]} W(\mathbf{1}_p)[k] \cdot W(\mathbf{1}_n)[k] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} W(\mathbf{1}_p)[k] \cdot W(\mathbf{1}_n)[k] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} W(\mathbf{1}_p)[2k] \cdot W(\mathbf{1}_n)[2k] + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} W(\mathbf{1}_p)[2k + 1] \cdot W(\mathbf{1}_n)[2k + 1] \\ &\text{Par orthogonalité des transformations en ondelette avec sous-échantillonnage} \\ &= 2 \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{1}_p[k] \mathbf{1}_n[k] \\ &= \delta(n - p) \end{aligned}$$

On définit donc les intervalles disjoints où $M(n, \cdot)$ est non nul

$$\Gamma_- = [K_- + \min(p_-, q_-), K_- + \max(p_+, q_+) - 1]$$

$$\Gamma = [K_- + \max(p_+, q_+), K_+ \min(p_-, q_-)]$$

$$\Gamma_+ = [K_+ + \min(p_-, q_-) + 1, K_+ + \max(p_+, q_+)]$$

$$\Phi = \Gamma_- \cup \Gamma \cup \Gamma_+$$

Si $n \in \Gamma$, pour tout p , $M(n, p) = \delta(n - p)$. Il reste les deux intervalles Γ_- et Γ_+ à étudier.

A.2.6. *Valeur sur les espace où $M(n, p)$ n'est pas défini explicitement.* On s'intéresse à

$$\Gamma_- = [K_- + \min(p_-, q_-), K_- + \max(p_+, q_+) - 1]$$

$$\Gamma_+ = [K_+ + \min(p_-, q_-) + 1, K_+ + \max(p_+, q_+)]$$

On souhaite exprimer M indépendamment de l'intervalle $[K_-, K_+]$. Pour symboliser cette dépendance, on écrit $M_{[K_-, K_+]}(n, p)$.

La décomposition sans sous-échantillonnage est invariante par translation donc $W(\mathbf{1}_p)[k] = W(\mathbf{1}_0)[k - p]$.

Si on réécrit $M_{[K_-, K_+]}(n, p)$:

$$\begin{aligned}
M_{[K_-, K_+]}(n, p) &= \frac{1}{2} \sum_{k \in [K_-, K_+]} W(\mathbf{1}_p)[k] \cdot W(\mathbf{1}_n)[k] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k \in [K_-, K_+]} W(\mathbf{1}_0)[k-p] \cdot W(\mathbf{1}_0)[k-n] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k \in [K_-, K_+] \cap [\max(n, p) - \max(p_+, q_+), \min(n, p) - \min(p_-, q_-)]} W(\mathbf{1}_0)[k-p] \cdot W(\mathbf{1}_0)[k-n] \\
&\quad \text{on a } n \in \Phi \text{ donc d'après (A.5)} \\
\text{(A.6)} \quad &= \frac{1}{2} \sum_{k \in [\max(K_-, n - \max(p_+, q_+)), \min(K_+, n - \min(p_-, q_-))]} W(\mathbf{1}_0)[k-p] \cdot W(\mathbf{1}_0)[k-n]
\end{aligned}$$

On s'intéresse à $n \in \Gamma_-$ et on souhaite exprimer $M_{[K_-, K_+]}(n, p)$ indépendamment de K_- et K_+ .

$$n \in \Gamma_-$$

$$\text{Donc } n \leq K_- + \max(p_+, q_+) - 1$$

$$\text{Donc } n - \max(p_+, q_+) \leq K_- - 1$$

$$\text{Et } n - \min(p_-, q_-) \leq K_- - 1 - \min(p_-, q_-) + \max(p_+, q_+) \text{ Donc}$$

$$\max(K_-, n - \max(p_+, q_+)) = K_-$$

Dans ce cas

$$\begin{aligned}
M_{[K_-, +\infty]}(n, p) &= \frac{1}{2} \sum_{k \in [K_-, +\infty]} W(\mathbf{1}_p)[k] \cdot W(\mathbf{1}_n)[k] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k \in [K_-, n - \min(p_-, q_-)]} W(\mathbf{1}_p)[k] \cdot W(\mathbf{1}_n)[k] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k \in [K_-, K_+]} W(\mathbf{1}_p)[k] \cdot W(\mathbf{1}_n)[k] \text{ si } K_+ \geq n - \min(p_-, q_-) \\
\text{(A.7)} \quad &= M_{[K_-, K_+]}(n, p)
\end{aligned}$$

On a supposé que pour tout $n \in \Gamma_-$

$$K_+ \geq n - \min(p_-, q_-)$$

Donc il faut $K_+ \geq K_- - 1 - \min(p_-, q_-) + \max(p_+, q_+)$.

C'est à dire $K_+ - K_- \geq \min(p_-, q_-) + \max(p_+, q_+) - 1$.

Avec une étude plus précise (sur a_1 puis sur d_1), la condition est:

$$K_+ - K_- \geq p_+ + p_- - 1 (= q_+ + q_- - 1)$$

C'est la condition nécessaire de non recouvrement de Γ_- et Γ_+ qui est vérifiée par hypothèse.

On reprend le calcul

$$\begin{aligned}
M_{[K_-, K_+]}(n, p) &= M_{[K_-, +\infty]}(n, p) \\
&\text{et d'après l'équation (A.6)} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k \in [K_-, n - \min(p_-, q_-)]} W(\mathbf{1}_0)[k - p].W(\mathbf{1}_0)[k - n] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m \in [0, n - \min(p_-, q_-) - K_-]} W(\mathbf{1}_0)[m + K_- - p].W(\mathbf{1}_0)[m + K_- - n] \\
&= M_{[0, +\infty]}(n - K_-, p - K_-) \\
&= M_-(n - K_-, p - K_-)
\end{aligned}$$

La même écriture de l'intervalle de sommation peut être faite avec p (par symétrie entre p et n) donc l'intervalle de sommation est:

$$[K_-, n - \min(p_-, q_-)] \cap [K_-, p - \min(p_-, q_-)] = [K_-, \min(n, p) - \min(p_-, q_-)]$$

Il vient donc pour tout $(n, p) \in \Gamma_-^2$

$$(A.8) \quad \sum_{(n, p) \in \Gamma_-^2} M_{[K_-, K_+]}(n, p) \hat{a}_0[n] \hat{a}_0[p] = \sum_{(m, l) \in [\min(p_-, q_-), \max(p_+, q_+) - 1]^2} M_-(m, l) \hat{a}_0[m + K_-] \hat{a}_0[l + K_-]$$

Avec

$$\begin{aligned}
M_-(n, p) &= \frac{1}{2} \sum_{k \in [0, +\infty]} W(\mathbf{1}_0)[k].W(\mathbf{1}_0)[k] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k \in [0, \min(n, p) - \min(p_-, q_-)]} W(\mathbf{1}_0)[k - p].W(\mathbf{1}_0)[k - n] \\
(A.9) \quad &= \frac{1}{2} \sum_{k \in [0, \min(n, p) - \min(p_-, q_-)]} (h[p - k]h[n - k] + g[p - k]g[n - k])
\end{aligned}$$

On s'intéresse maintenant à $n \in \Gamma_+$ et de la même manière que précédemment, sous l'hypothèse $K_+ - K_- \geq p_+ + p_- - 1$, on obtient:

$$(A.10) \quad M_{[K_-, K_+]}(n, p) = M_{[-\infty, K_+]}(n, p)$$

Et on a les deux équations

$$\min(K_+, n - \min(p_-, q_-)) = K_+$$

$$\max(K_-, n - \max(p_+, q_+)) = n - \max(p_+, q_+)$$

$$\begin{aligned}
M_{[K_-, K_+]}(n, p) &= M_{[-\infty, K_+]}(n, p) \\
&\text{et avec l'équation (A.6)} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k \in [n - \max(p_-, q_-), K_+]} W(\mathbf{1}_0)[k - p].W(\mathbf{1}_0)[k - n] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m \in [n - K_+ - \max(p_-, q_-), 0]} W(\mathbf{1}_0)[m + K_+ - p].W(\mathbf{1}_0)[m + K_+ - n] \\
&= M_{[-\infty, 0]}(n - K_+, p - K_+) \\
&= M_+(n - K_+, p - K_+)
\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
M_+(n, p) &= \frac{1}{2} \sum_{k \in [-\infty, 0]} W(\mathbf{1}_0)[k].W(\mathbf{1}_0)[k] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k \in [\max(n, p) - \max(p_-, q_-), 0]} W(\mathbf{1}_0)[k - p].W(\mathbf{1}_0)[k - n] \\
\text{(A.11)} \quad &= \frac{1}{2} \sum_{k \in [\max(n, p) - \max(p_-, q_-), 0]} (h[p - k]h[n - k] + g[p - k]g[n - k])
\end{aligned}$$

Il vient donc pour tout $(n, p) \in \Gamma_+^2$

$$\begin{aligned}
\text{(A.12)} \quad &\sum_{(n, p) \in \Gamma_+^2} M_{[K_-, K_+]}(n, p) \hat{a}_0[n] \hat{a}_0[p] = \sum_{(m, l) \in [\min(p_-, q_-) + 1, \max(p_+, q_+)]^2} M_+(m, l) \hat{a}_0[m + K_+] \hat{a}_0[l + K_+]
\end{aligned}$$

Enfin, pour $n \in \Gamma_+$ et $p \in \Gamma_-$,

$$\begin{aligned}
M_{[K_-, K_+]}(n, p) &= \frac{1}{2} \sum_{k \in [n - \max(p_-, q_-), p - \min(p_+, q_+)]} W(\mathbf{1}_0)[k - p].W(\mathbf{1}_0)[k - n] \\
&= M_{[-\infty, K_+]}(n, p) \text{ car } n \in \Gamma_+ \text{ et d'après l'équation (A.10)} \\
&= M_{[-\infty, +\infty]}(n, p) \text{ car } p \in \Gamma_- \text{ et d'après l'équation (A.7)} \\
&= \delta(n - p) \text{ cas de signaux infinis} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Le premier terme peut donc s'écrire:

$$\begin{aligned}
M(n, p) &= u(n, p) + v(n, p) \\
&= \begin{cases} M_-(n - K_-, p - K_-) & \text{sur } \Gamma_-^2 \\ \delta(n - p) & \text{sur } \Gamma^2 \\ M_+(n - K_+, p - K_+) & \text{sur } \Gamma_+^2 \\ 0 & \text{sur les autres intervalles} \end{cases}
\end{aligned}$$

A.3. Conclusion. On reprend le calcul du coût, et on pose

$$\Phi_- = [\min(p_-, q_-), \max(p_+, q_+) - 1] = \Gamma_- - K_-$$

$$\Phi_+ = [\min(p_-, q_-) + 1, \max(p_+, q_+)] = \Gamma_+ - K_+$$

On obtient une nouvelle écriture de ϵ^2

$$\epsilon^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} M(n, p) \hat{a}_0[n] \hat{a}_0[p] - 2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{a}_0[n] \tilde{a}_0[n] + \mu^2$$

En étudiant les indices de \hat{a}_0 indépendants on réécrit

$$\begin{aligned} \epsilon^2 &= \sum_{(m,l) \in \Phi_+^2} M_+(m, l) \hat{a}_0[m + K_+] \hat{a}_0[l + K_+] - 2 \sum_{m \in \Phi_+} \hat{a}_0[m + K_+] \tilde{a}_0[m + K_+] \\ &+ \sum_{(m,l) \in \Phi_-^2} M_-(m, l) \hat{a}_0[m + K_-] \hat{a}_0[l + K_-] - 2 \sum_{m \in \Phi_-} \hat{a}_0[m + K_-] \tilde{a}_0[m + K_-] \\ &+ \sum_{n \in \Gamma} (\hat{a}_0[n]^2 - 2\hat{a}_0[n] \tilde{a}_0[n]) + \mu^2 \end{aligned}$$

Les 3 problèmes de minimisation sont indépendants car ils concernent des indices de \hat{a}_0 différents.

$$\begin{aligned} \text{Sur } \Gamma_- &= [K_- + \min(p_-, q_-), K_- + \max(p_+, q_+) - 1] \\ \epsilon_-^2 &= \sum_{(m,l) \in \Phi_-^2} M_-(m, l) \hat{a}_0[m + K_-] \hat{a}_0[l + K_-] - 2 \sum_{m \in \Phi_-} \hat{a}_0[m + K_-] \tilde{a}_0[m + K_-] \\ \text{Sur } \Gamma &= [K_- + \max(p_+, q_+), K_+ \min(p_-, q_-)] \\ \epsilon_0^2 &= \sum_{n \in \gamma} \hat{a}_0[n] (\hat{a}_0[n] - 2\tilde{a}_0[n]) \\ \text{Sur } \Gamma_+ &= [K_+ + \min(p_-, q_-) + 1, K_+ + \max(p_+, q_+)] \\ \epsilon_+^2 &= \sum_{(m,l) \in \Phi_+^2} M_+(m, l) \hat{a}_0[m + K_+] \hat{a}_0[l + K_+] - 2 \sum_{m \in \Phi_+} \hat{a}_0[m + K_+] \tilde{a}_0[m + K_+] \end{aligned}$$

APPENDIX B. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5.1 ET DE LA PROPOSITION 5.2

On veut procéder par récurrence: Les hypothèses au rang j sont:
On suppose que l'erreur s'écrit de la forme:

$$\epsilon_0^2 = \sum_{i=1}^j \frac{1}{2^i} \sum_k (d_i[k] - \hat{d}_i[k])^2 + \frac{1}{2^j} \sum_k (\tilde{a}_j[k] - \hat{a}_j[k])^2 + \sum_{l=j}^{p-1} \frac{1}{2^{l+1}} \tilde{\epsilon}_l^2$$

Avec

$$\tilde{a}_j[n] = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (h_j[n-k] \tilde{a}_{j+1}[k] + g_j[n-k] d_{j+1}[k])$$

B.1. Démonstration de la récurrence. L'hypothèse est vérifiée pour $j = p$, c'est l'expression du coût (5.1)

On suppose l'hypothèse vraie pour j et on cherche à la prouver pour $j - 1$.

$$\begin{aligned} \epsilon_0^2 &= \sum_{i=1}^j \frac{1}{2^i} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (d_i[k] - \hat{d}_i[k])^2 + \frac{1}{2^j} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\tilde{a}_j[k] - \hat{a}_j[k])^2 + \sum_{l=j}^{p-1} \frac{1}{2^{l+1}} \tilde{\epsilon}_l^2 \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{2^i} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (d_i[k] - \hat{d}_i[k])^2 + \sum_{l=j}^{p-1} \frac{1}{2^{l+1}} \tilde{\epsilon}_l^2 + \frac{1}{2^j} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left((d_j[k] - \hat{d}_j[k])^2 + (\tilde{a}_j[k] - \hat{a}_j[k])^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{2^i} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (d_i[k] - \hat{d}_i[k])^2 + \sum_{l=j}^{p-1} \frac{1}{2^{l+1}} \tilde{\epsilon}_l^2 + \frac{1}{2^j} \epsilon_{j-1}^2 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \epsilon_{j-1}^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left((d_j[k] - \hat{d}_j[k])^2 + (\tilde{a}_j[k] - \hat{a}_j[k])^2 \right) \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{i \in [0, 2^j - 1]} \left((d_j[l2^{j-1} + i] - \hat{d}_j[l2^{j-1} + i])^2 + (\tilde{a}_j[l2^{j-1} + i] - \hat{a}_j[l2^{j-1} + i])^2 \right) \\ &= \sum_{i \in [0, 2^j - 1]} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left((E_{2^{j-1}, i}(d_j)[l] - E_{2^{j-1}, i}(\hat{d}_j)[l])^2 + (E_{2^{j-1}, i}(\tilde{a}_j)[l] - E_{2^{j-1}, i}(\hat{a}_j)[l])^2 \right) \\ &= \sum_{i \in [0, 2^j - 1]} \epsilon_{j-1}[i]^2 \end{aligned}$$

On a vu que pour tout $i \in [0, 2^j - 1]$, $E_{2^{j-1}, i}(\hat{a}_j, \hat{d}_j) = W(E_{2^{j-1}, i}(\hat{a}_{j-1}))$ 4.6. On souhaite exprimer les $\epsilon_{j-1}[i]^2$ en fonction de \hat{a}_{j-1}

On reprend ce qu'il a été fait dans la première partie: on pose $\hat{A}_{0i} = E_{2^{j-1}, i}(\hat{a}_{j-1})$
 $(\hat{A}_{1i}, \hat{D}_{1i}) = E_{2^{j-1}, i}(\hat{a}_j, \hat{d}_j)$
 $(A_{1i}, D_{1i}) = E_{2^{j-1}, i}(\tilde{a}_j, d_j)$

$$(\hat{A}_{1i}, \hat{D}_{1i}) = W(\hat{A}_{0i})$$

$$\epsilon_{j-1}[i]^2 = \sum_{l \in \mathbb{Z}} (\hat{A}_{1i} - A_{1i})^2 + (\hat{D}_{1i} - D_{1i})^2$$

Le minimum est obtenu pour un signal

$$\tilde{A}_{0i}[k] = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[k-n] A_{1i}[n] + g[k-n] D_{1i}[n]$$

Le minimum vaut:

$$\tilde{\epsilon}_{j-1}[i]^2 = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} h[k-2n]A_{1i} - h[k-2n-1]A_{1i}[2n+1] + [2n] + g[k-2n]D_{1i}[2n] - g[k-2n-1]D_{1i}[2n+1] \right)^2$$

Et le coût $\epsilon_{j-1}[i]^2$ a une expression générale:

$$\epsilon_{j-1}[i]^2 = \tilde{\epsilon}_{j-1}[i]^2 + 2\|\hat{A}_{0i} - \tilde{A}_{0i}\|^2$$

On réécrit les expressions en fonction des données. On construit \check{a}_{j-1} tel que pour tout $i \in [0, 2^{j-1} - 1]$:

$$\begin{aligned} E_{2^{j-1}, i}(\check{a}_{j-1})[k] &= \tilde{A}_{0i}[k] \\ \check{a}_{j-1}[2^{j-1}k + i] &= \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[k-n]A_{1i}[n] + g[k-n]D_{1i}[n] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[k-n]E_{2^{j-1}, i}(\tilde{a}_j)[n] + g[k-n]E_{2^{j-1}, i}(\tilde{d}_j)[n] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{j-1}[2^{j-1}(k-n)]\tilde{a}_j[2^{j-1}n + i] + g_{j-1}[2^{j-1}(k-n)]\tilde{d}_j[2^{j-1}n + i] \end{aligned}$$

On généralise en prenant $m = 2^{j-1}k + i$

$$\check{a}_{j-1}[m] = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{j-1}[m - i - 2^{j-1}n]\tilde{a}_j[2^{j-1}n + i] + g_{j-1}[(m - i - 2^{j-1}n)]\tilde{d}_j[2^{j-1}n + i]$$

On somme pour $i \in [0, 2^{j-1} - 1]$

seuls des termes nuls sont ajoutés

$$= \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{i \in [0, 2^{j-1} - 1]} h_{j-1}[m - i - 2^{j-1}n]\tilde{a}_j[2^{j-1}n + i] + g_{j-1}[m - i - 2^{j-1}n]\tilde{d}_j[2^{j-1}n + i]$$

on pose $k = 2^{j-1}n + i$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{j-1}[m - k]\tilde{a}_j[k] + g_{j-1}[m - k]\tilde{d}_j[k]$$

$$= \tilde{a}_{j-1}[m]$$

On calcul le coût minimal $\tilde{\epsilon}_{j-1}[i]^2$

$$\tilde{\epsilon}_{j-1}[i]^2 = \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (E_{2^{j-1}, i}(\delta_i)[m])^2$$

Avec δ_i défini par

$$\begin{aligned}
E_{2^{j-1},i}(\delta_i)[m] &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (h[k-2n]A_{1i}[2n] - h[k-2n-1]A_{1i}[2n+1]) \\
&\quad + \sum_{n \in \mathbb{Z}} (g[k-2n]D_{1i}[2n] - g[k-2n-1]D_{1i}[2n+1]) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (h[k-2n]E_{2^{j-1},i}(\tilde{a}_j)[2n] - h[k-2n-1]E_{2^{j-1},i}(\tilde{a}_j)[2n+1]) \\
&\quad + \sum_{n \in \mathbb{Z}} (g[k-2n]E_{2^{j-1},i}(d_j)[2n] - g[k-2n-1]E_{2^{j-1},i}(d_j)[2n+1]) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (h_{j-1}[2^{j-1}(k-2n)]\tilde{a}_j[2^j n + i] - h_{j-1}[2^{j-1}(k-2n-1)]\tilde{a}_j[2^j n + 2^{j-1} + i]) \\
&\quad + \sum_{n \in \mathbb{Z}} (g_{j-1}[2^{j-1}(k-2n)]d_j[2^j n + i] - g_{j-1}[2^{j-1}(k-2n-1)]d_j[2^j n + 2^{j-1} + i])
\end{aligned}$$

On généralise en prenant $m = 2^{j-1}k + i$

$$\begin{aligned}
\delta_i[m] &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (h_{j-1}[m-i-2^j n]\tilde{a}_j[2^j n + i] - h_{j-1}[m-i-2^{j-1}(2n+1)]\tilde{a}_j[2^j n + 2^{j-1} + i]) \\
&\quad + \sum_{n \in \mathbb{Z}} (g_{j-1}[m-i-2^j n]d_j[2^j n + i] - g_{j-1}[m-i-2^{j-1}(2n+1)]d_j[2^j n + 2^{j-1} + i])
\end{aligned}$$

On somme pour $i \in [0, 2^{j-1} - 1]$,

seuls des termes nuls sont ajoutés:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i \in [0, 2^{j-1}-1]} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (h_{j-1}[m-i-2^j n]\tilde{a}_j[2^j n + i] - h_{j-1}[m-i-2^{j-1}(2n+1)]\tilde{a}_j[2^j n + 2^{j-1} + i]) \\
&\quad + \sum_{i \in [0, 2^{j-1}-1]} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (g_{j-1}[m-i-2^j n]d_j[2^j n + i] - g_{j-1}[m-i-2^{j-1}(2n+1)]d_j[2^j n + 2^{j-1} + i])
\end{aligned}$$

Changement de variable $k = 2^j n + i$ et $P'_j = \cup_{n \in \mathbb{Z}} [n2^j, (2n+1)2^{j-1}]$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k \in P'_j} (h_{j-1}[m-k]\tilde{a}_j[k] - h_{j-1}[m-k-2^{j-1}]\tilde{a}_j[k+2^{j-1}]) \\
&\quad + \sum_{k \in P'_j} (g_{j-1}[m-k]d_j[k] - g_{j-1}[m-k-2^{j-1}]d_j[k+2^{j-1}])
\end{aligned}$$

Le coût de \hat{A}_{0i} est donc:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{j-1}[i]^2 &= \tilde{\epsilon}_{j-1}[i]^2 + 2\|\hat{A}_{0i} - \tilde{A}_{0i}\|^2 \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}} (E_{2^{j-1},i}(\delta_i)[m])^2 \\
&\quad + 2 \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\hat{A}_{0i}[m] - \tilde{A}_{0i}[m])^2 \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}} (E_{2^{j-1},i}(\delta_i)[m])^2 \\
&\quad + 2 \sum_{m \in \mathbb{Z}} (E_{2^{j-1},i}(\hat{a}_{j-1})[m] - E_{2^{j-1},i}(\tilde{a}_{j-1})[m])^2
\end{aligned}$$

On obtient en réécrivant ϵ_{j-1}^2 :

$$\begin{aligned}
\epsilon_{j-1}^2 &= \sum_k ((d_j[k] - \hat{d}_j[k])^2 + (\tilde{a}_j[k] - \hat{a}_j[k])^2) \\
&= \sum_{i \in [0, 2^j - 1]} \epsilon_{j-1}[i]^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i \in [0, 2^j - 1]} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (E_{2^{j-1}, i}(\delta_i)[m])^2 \\
&\quad + 2 \sum_{i \in [0, 2^j - 1]} \sum_{m \in \mathbb{Z}} (E_{2^{j-1}, i}(\hat{a}_{j-1})[m] - E_{2^{j-1}, i}(\tilde{a}_{j-1})[m])^2 \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta_i[m]^2 \\
&\quad + 2 \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\hat{a}_{j-1}[m] - \tilde{a}_{j-1}[m])^2 \\
&= 2 \sum_{m \in \mathbb{Z}} (\hat{a}_{j-1}[m] - \tilde{a}_{j-1}[m])^2 + \tilde{\epsilon}_{j-1}^2
\end{aligned}$$

Avec

$$\tilde{\epsilon}_{j-1}^2 = \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k \in P_j'} (h_{j-1}[m-k] \tilde{a}_j[k] - h_{j-1}[m-k-2^{j-1}] \tilde{a}_j[k+2^{j-1}]) \right. \\
\left. + g_{j-1}[m-k] d_j[k] - g_{j-1}[m-k-2^{j-1}] d_j[k+2^{j-1}] \right)^2$$

On obtient alors le problème au rang $j-1$:

$$\begin{aligned}
\epsilon_0^2 &= \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{2^i} \sum_k (d_i[k] - \hat{d}_i[k])^2 + \sum_{l=j}^{p-1} \frac{1}{2^{l+1}} \tilde{\epsilon}_l^2 + \frac{1}{2^j} \epsilon_{j-1}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{2^i} \sum_k (d_i[k] - \hat{d}_i[k])^2 + \sum_{l=j}^{p-1} \frac{1}{2^{l+1}} \tilde{\epsilon}_l^2 \\
&\quad + \frac{2}{2^j} \sum_n (\hat{a}_{j-1}[n] - \tilde{a}_{j-1}[n])^2 + \frac{1}{2^j} \tilde{\epsilon}_{j-1}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{2^i} \sum_k (d_i[k] - \hat{d}_i[k])^2 + \frac{2}{2^j} \sum_n (\hat{a}_{j-1}[n] - \tilde{a}_{j-1}[n])^2 \\
&\quad + \sum_{l=j}^{p-1} \frac{1}{2^{l+1}} \tilde{\epsilon}_l^2 + \frac{1}{2^j} \tilde{\epsilon}_{j-1}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{2^i} \sum_k (d_i[k] - \hat{d}_i[k])^2 + \frac{1}{2^{j-1}} \sum_n (\hat{a}_{j-1}[n] - \tilde{a}_{j-1}[n])^2 \\
&\quad + \sum_{l=j-1}^{p-1} \frac{1}{2^{l+1}} \tilde{\epsilon}_l^2
\end{aligned}$$

La récurrence est démontrée

B.2. Conclusion et résultat.

$$\begin{aligned} \epsilon_0^2 &= \sum_n (\hat{a}_0[n] - \tilde{a}_0[n])^2 \\ &\quad + \sum_{l=0}^{p-1} \frac{1}{2^{l+1}} \tilde{\epsilon}_l^2 \end{aligned}$$

Le minimum est donc obtenu pour

$$\hat{a}_0 = \tilde{a}_0$$

B.3. Égalité entre la moyenne des 2^p reconstructions directes et l'algorithme à trou. Cela découle directement de la linéarité de l'algorithme à trou à chaque échelle.

APPENDIX C. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 5.3

La démonstration est faite par récurrence.

C.1. Hypothèses de récurrence. L'hypothèse de récurrence est l'expression du coût ϵ_j^2 à l'échelle j par l'équation (5.9).

On connaît aussi l'expression des matrices M_j^- et M_j^+ qui sont fonctions uniquement des filtres et indépendants des bornes K_+ et K_- .

On constate que si $i \neq m[2^j]$ alors $M_j^+(2^j n + i, 2^j p + m) = 0$ et $M_j^-(2^j n + i, 2^j p + m) = 0$. En effet ceci vient de l'expression de ces matrices dans l'équation (5.7) en sachant que les filtres h_j et g_j sont obtenus en mettant $2^j - 1$ zéros entre chaque valeur de h et g

C.2. Échelle p . à la profondeur $j = p$ on a simplement:

$$\epsilon_j^2 = \frac{1}{2^p} \sum_{m \in [K_-, K_+]} (\hat{a}_p[m] - a_p[m])^2$$

En, effet, $\Gamma_j = [K_-, K_+]$
 $\Gamma_j^- = \Gamma_j^+ = \emptyset$ Et on prend $\check{a}_p = a_p$

C.3. Démonstration de $j - 1$ à partir de j .

C.3.1. Données. On suppose donc l'hypothèse vraie au rang j

$$\begin{aligned} \epsilon_j^2 &= \frac{1}{2^j} \sum_{m \in \Gamma_j} (\hat{a}_j[m] - \check{a}_j[m])^2 \\ &+ \sum_{m, n \in \Gamma_j^-} (\hat{a}_j - \check{a}_j)[m] (\hat{a}_j - \check{a}_j)[n] M_j^-(m - K_-, n - K_-) \\ &+ \sum_{m, n \in \Gamma_j^+} (\hat{a}_j - \check{a}_j)[m] (\hat{a}_j - \check{a}_j)[n] M_j^+(m - K_+, n - K_+) \\ &+ \sum_{i=j}^p \check{\epsilon}_i^2 \end{aligned}$$

On souhaite connaître l'erreur ϵ_{j-1}^2 (rang $j-1$), soit:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{j-1}^2 &= \frac{1}{2^j} \sum_{k=K_-}^{K_+} (d_j[k] - \hat{d}_j[k])^2 + \epsilon_j^2 \\
&= \frac{1}{2^j} \sum_{k=K_-}^{K_+} (d_j[k] - \hat{d}_j[k])^2 \\
&\quad + \frac{1}{2^j} \sum_{m \in \Gamma_j} (\hat{a}_j[m] - \check{a}_j[m])^2 \\
&\quad + \sum_{m,n \in \Gamma_j^-} (\hat{a}_j - \check{a}_j)[m] (\hat{a}_j - \check{a}_j)[n] M_j^-(m - K_-, n - K_-) \\
&\quad + \sum_{m,n \in \Gamma_j^+} (\hat{a}_j - \check{a}_j)[m] (\hat{a}_j - \check{a}_j)[n] M_j^+(m - K_+, n - K_+) \\
&\quad + \sum_{i=j}^p \check{\epsilon}_i^2
\end{aligned}$$

C.3.2. *Liens entre les 2 échelles.* On cherche à écrire ϵ_{j-1}^2 en fonction de \hat{a}_{j-1} sachant que

$$\begin{aligned}
\hat{a}_j[k] &= W_{a,j-1}(\hat{a}_{j-1})[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_{j-1}[n-k] \hat{a}_{j-1}[n] \\
\hat{d}_j[k] &= W_{d,j-1}(\hat{a}_{j-1})[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_{j-1}[n-k] \hat{a}_{j-1}[n]
\end{aligned}$$

On définit les ensembles:

$$\Omega'_{j-1} = \cup_{m \in \mathbf{Z}} [2m2^{j-1}, (2m+1)2^{j-1}[$$

$$\Omega''_{j-1} = \cup_{m \in \mathbf{Z}} [(2m-1)2^{j-1}, 2m2^{j-1}[$$

On a:

$$\Omega'_{j-1} \cup \Omega''_{j-1} = \mathbf{Z}$$

$$\Omega'_{j-1} \cap \Omega''_{j-1} = \emptyset$$

D'après le corollaire (4.8), il existe deux reconstructions possibles de a_{j-1} pour les signaux de taille infinie:

$$\begin{aligned}
a'_{j-1}[n] &= \sum_{p \in \Omega'_{j-1}} (h_{j-1}[n-p] a_j[p] + g_{j-1}[n-p] d_j[p]) \\
a''_{j-1}[n] &= \sum_{p \in \Omega''_{j-1}} (h_{j-1}[n-p] a_j[p] + g_{j-1}[n-p] d_j[p])
\end{aligned}$$

Chacune de ces reconstructions ne prend en compte que la moitié des valeurs des images. De plus, ce sous-échantillonnage permet d'avoir deux bijections:

$$\begin{aligned} W'_{j-1} : a'_{j-1} &\rightarrow (a_j, d_j) \text{ restreint à } \Omega'^2_{j-1} \\ &\mathbb{Z} \rightarrow \Omega'^2_{j-1} \\ W''_{j-1} : a''_{j-1} &\rightarrow (a_j, d_j) \text{ restreint à } \Omega''^2_{j-1} \\ &\mathbb{Z} \rightarrow \Omega''^2_{j-1} \end{aligned}$$

Leurs inverses respectifs sont:

$$\begin{aligned} W'^{-1}_{j-1} : (a_j, d_j) &\rightarrow a'_{j-1} \\ &\Omega'^2_{j-1} \rightarrow \mathbb{Z} \\ W''^{-1}_{j-1} : (a_j, d_j) &\rightarrow a''_{j-1} \\ &\Omega''^2_{j-1} \rightarrow \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ces reconstructions sont toujours possibles mais, comme les signaux a_j et d_j ne proviennent pas forcément d'un même signal d'entrée, il est possible que

$$a'_{j-1} \neq a''_{j-1}$$

C.3.3. *Application au problème.* Dans notre étude, on construit a'_{j-1} et a''_{j-1} avec les signaux \check{a}_j et d_j . On écrit le changement de variable:

$$\hat{a}_{j-1} = a'_{j-1} + \alpha_{j-1} = a''_{j-1} + \beta_{j-1}$$

Dans ces conditions:
sur Ω'^2_{j-1} :

$$(C.1) \quad \hat{a}_j - \check{a}_j = W_{a,j-1}(\alpha_{j-1})$$

$$\hat{d}_j - d_j = W_{d,j-1}(\alpha_{j-1})$$

Sur Ω''^2_{j-1} :

$$(C.2) \quad \hat{a}_j - \check{a}_j = W_{a,j-1}(\beta_{j-1})$$

$$\hat{d}_j - d_j = W_{d,j-1}(\beta_{j-1})$$

De plus pour tout $n \in \Omega'_{j-1}$ et tout $m \in \Omega''_{j-1}$, $m \neq n[2^j]$ donc avec l'hypothèse de récurrence, $M_j^-(n, m) = 0$ et $M_j^+(n, m) = 0$

On reprend le calcul de l'erreur qui se simplifie

$$\begin{aligned}
\epsilon_{j-1}^2 &= \frac{1}{2^j} \sum_{k \in [K_-, K_+] \cap \Omega'_{j-1}} (d_j[k] - \hat{d}_j[k])^2 + \frac{1}{2^j} \sum_{k \in [K_-, K_+] \cap \Omega''_{j-1}} (d_j[k] - \hat{d}_j[k])^2 \\
&+ \frac{1}{2^j} \sum_{m \in \Gamma_j \cap \Omega'_{j-1}} (\hat{a}_j[m] - \check{a}_j[m])^2 + \frac{1}{2^j} \sum_{m \in \Gamma_j \cap \Omega''_{j-1}} (\hat{a}_j[m] - \check{a}_j[m])^2 \\
&+ \sum_{m, n \in \Gamma_j^- \cap \Omega'_{j-1}} (\hat{a}_j - \check{a}_j)[m] (\hat{a}_j - \check{a}_j)[n] M_j^-(m - K_-, n - K_-) \\
&+ \sum_{m, n \in \Gamma_j^- \cap \Omega''_{j-1}} (\hat{a}_j - \check{a}_j)[m] (\hat{a}_j - \check{a}_j)[n] M_j^-(m - K_-, n - K_-) \\
&+ \sum_{m, n \in \Gamma_j^+ \cap \Omega'_{j-1}} (\hat{a}_j - \check{a}_j)[m] (\hat{a}_j - \check{a}_j)[n] M_j^+(m - K_+, n - K_+) \\
&+ \sum_{m, n \in \Gamma_j^+ \cap \Omega''_{j-1}} (\hat{a}_j - \check{a}_j)[m] (\hat{a}_j - \check{a}_j)[n] M_j^+(m - K_+, n - K_+) \\
&+ \sum_{i=j}^p \check{\epsilon}_i^2
\end{aligned}$$

En reprenant les expressions (C.1) et (C.2), puis en inversant les signes somme, on arrive à:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{j-1}^2 &= \sum_{l, p \in \mathbb{Z}} \alpha_{j-1}[l] \alpha_{j-1}[p] \frac{1}{2^j} \sum_{k \in [K_-, K_+] \cap \Omega'_{j-1}} g_{j-1}(l - k) g_{j-1}(p - k) \\
&+ \sum_{l, p \in \mathbb{Z}} \beta_{j-1}[l] \beta_{j-1}[p] \frac{1}{2^j} \sum_{k \in [K_-, K_+] \cap \Omega''_{j-1}} g_{j-1}(l - k) g_{j-1}(p - k) \\
&+ \sum_{l, p \in \mathbb{Z}} \alpha_{j-1}[l] \alpha_{j-1}[p] \frac{1}{2^j} \sum_{m \in \Gamma_j \cap \Omega'_{j-1}} h_{j-1}[l - m] h_{j-1}[p - m] \\
&+ \sum_{l, p \in \mathbb{Z}} \beta_{j-1}[l] \beta_{j-1}[p] \frac{1}{2^j} \sum_{m \in \Gamma_j \cap \Omega''_{j-1}} h_{j-1}[l - m] h_{j-1}[p - m] \\
&+ \sum_{l, p \in \mathbb{Z}} \alpha_{j-1}[l] \alpha_{j-1}[p] \sum_{m, n \in \Gamma_j^- \cap \Omega'_{j-1}} h_{j-1}[l - m] h_{j-1}[p - n] M_j^-(m - K_-, n - K_-) \\
&+ \sum_{l, p \in \mathbb{Z}} \beta_{j-1}[l] \beta_{j-1}[p] \sum_{m, n \in \Gamma_j^- \cap \Omega''_{j-1}} h_{j-1}[l - m] h_{j-1}[p - n] M_j^-(m - K_-, n - K_-) \\
&+ \sum_{l, p \in \mathbb{Z}} \alpha_{j-1}[l] \alpha_{j-1}[p] \sum_{m, n \in \Gamma_j^+ \cap \Omega'_{j-1}} h_{j-1}[l - m] h_{j-1}[p - n] M_j^+(m - K_+, n - K_+) \\
&+ \sum_{l, p \in \mathbb{Z}} \beta_{j-1}[l] \beta_{j-1}[p] \sum_{m, n \in \Gamma_j^+ \cap \Omega''_{j-1}} h_{j-1}[l - m] h_{j-1}[p - n] M_j^+(m - K_+, n - K_+) \\
&+ \sum_{i=j}^p \check{\epsilon}_i^2
\end{aligned}$$

Ce qui se simplifie encore en

$$\begin{aligned}\epsilon_{j-1}^2 &= \sum_{l,p \in \mathbb{Z}} \alpha_{j-1}[l] \alpha_{j-1}[p] u(l,p) \\ &\quad + \sum_{l,p \in \mathbb{Z}} \beta_{j-1}[l] \beta_{j-1}[p] v(l,p) \\ &\quad + \sum_{i=j}^p \check{\epsilon}_i^2\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}(C.3) \quad u(l,p) &= \frac{1}{2^j} \sum_{k \in [K_-, K_+] \cap \Omega'_{j-1}} g_{j-1}(l-k) g_{j-1}(p-k) \\ &\quad + \frac{1}{2^j} \sum_{m \in \Gamma_j \cap \Omega'_{j-1}} h_{j-1}[l-m] h_{j-1}[p-m] \\ &\quad + \sum_{m,n \in \Gamma_j^- \cap \Omega'_{j-1}} M_j^-(m-K_-, n-K_-) h_{j-1}[l-m] h_{j-1}[p-n] \\ &\quad + \sum_{m,n \in \Gamma_j^+ \cap \Omega'_{j-1}} M_j^+(m-K_+, n-K_+) h_{j-1}[l-m] h_{j-1}[p-n]\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}v(l,p) &= \frac{1}{2^j} \sum_{k \in [K_-, K_+] \cap \Omega''_{j-1}} g_{j-1}(l-k) g_{j-1}(p-k) \\ &\quad + \frac{1}{2^j} \sum_{m \in \Gamma_j \cap \Omega''_{j-1}} h_{j-1}[l-m] h_{j-1}[p-m] \\ &\quad + \sum_{m,n \in \Gamma_j^- \cap \Omega''_{j-1}} M_j^-(m-K_-, n-K_-) h_{j-1}[l-m] h_{j-1}[p-n] \\ &\quad + \sum_{m,n \in \Gamma_j^+ \cap \Omega''_{j-1}} M_j^+(m-K_+, n-K_+) h_{j-1}[l-m] h_{j-1}[p-n]\end{aligned}$$

En substituant les variables α_{j-1} et β_{j-1} définies par

$$\begin{aligned}\alpha_{j-1} &= \hat{a}_{j-1} - a'_{j-1} \\ \beta_{j-1} &= \hat{a}_{j-1} - a''_{j-1},\end{aligned}$$

le coût prend une forme simplifiée:

$$(C.4) \quad \epsilon_{j-1}^2 = \sum_{l,p \in \mathbb{Z}} (u(l,p) + v(l,p)) \hat{a}_{j-1}[l] \hat{a}_{j-1}[p]$$

$$(C.5) \quad -2 \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{a}_{j-1}[p] \sum_{l \in \mathbb{Z}} (u(l,p) a'_{j-1}[l] + v(l,p) a''_{j-1}[l])$$

$$(C.6) \quad + \sum_{l,p \in \mathbb{Z}} (a'_{j-1}[p] a'_{j-1}[l] u(l,p) + a''_{j-1}[p] a''_{j-1}[l] v(l,p))$$

$$(C.7) \quad + \sum_{i=j}^p \check{\epsilon}_i^2 u(l,p)$$

C.3.4. *Simplification de l'expression (C.5.).*

On souhaite à présent calculer

$$\begin{aligned}
ua'(p) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} u(l, p) a'_{j-1}[l] \\
&= \frac{1}{2^j} \sum_{l \in \mathbb{Z}, k \in \Omega' \cap [K_-, K_+]} g_{j-1}[l-k] g_{j-1}[p-k] a'_{j-1}[l] \\
&\quad + \frac{1}{2^j} \sum_{l \in \mathbb{Z}, k \in \Omega' \cap \Gamma_j} h_{j-1}[l-k] h_{j-1}[p-k] a'_{j-1}[l] \\
&\quad + \sum_{l \in \mathbb{Z}, m, k \in \Omega' \cap \Gamma_j^+} M_j^+(m - K_+, k - K_+) h_{j-1}[l-k] h_{j-1}[p-m] a'_{j-1}[l] \\
&\quad + \sum_{l \in \mathbb{Z}, m, k \in \Omega' \cap \Gamma_j^-} M_j^-(m - K_-, k - K_-) h_{j-1}[l-k] h_{j-1}[p-m] a'_{j-1}[l] \\
&= \frac{1}{2^j} \sum_{k \in \Omega' \cap [K_-, K_+]} g_{j-1}[p-k] \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_{j-1}[l-k] a'_{j-1}[l] \\
&\quad + \frac{1}{2^j} \sum_{k \in \Omega' \cap \Gamma_j} h_{j-1}[p-k] \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{j-1}[l-k] a'_{j-1}[l] \\
&\quad + \sum_{m, k \in \Omega' \cap \Gamma_j^+} M_j^+(m - K_+, k - K_+) h_{j-1}[p-m] \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{j-1}[l-k] a'_{j-1}[l] \\
&\quad + \sum_{m, k \in \Omega' \cap \Gamma_j^-} M_j^-(m - K_-, k - K_-) h_{j-1}[p-m] \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{j-1}[l-k] a'_{j-1}[l] \\
&= \frac{1}{2^j} \sum_{k \in \Omega' \cap [K_-, K_+]} g_{j-1}[p-k] d_j[k] \\
&\quad + \frac{1}{2^j} \sum_{k \in \Omega' \cap \Gamma_j} h_{j-1}[p-k] a_j[k] \\
&\quad + \sum_{m, k \in \Omega' \cap \Gamma_j^+} M_j^+(m - K_+, k - K_+) h_{j-1}[p-m] a_j[k] \\
&\quad + \sum_{m, k \in \Omega' \cap \Gamma_j^-} M_j^-(m - K_-, k - K_-) h_{j-1}[p-m] a_j[k]
\end{aligned}$$

On obtient la même chose pour va'' pour avoir au final:

$$\begin{aligned}
ua' + va''(p) &= \frac{1}{2^j} \sum_{k \in [K_-, K_+]} g_{j-1}[p-k]d_j[k] \\
&+ \frac{1}{2^j} \sum_{k \in \Gamma_j} h_{j-1}[p-k]a_j[k] \\
&+ \sum_{m, k \in \Gamma_j^+} M_j^+(m - K_+, k - K_+)h_{j-1}[p-m]a_j[k] \\
&+ \sum_{m, k \in \Gamma_j^-} M_j^-(m - K_-, k - K_-)h_{j-1}[p-m]a_j[k]
\end{aligned}$$

On définit alors un signal \tilde{a}_{j-1}

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{j-1}[p] &= 2^{j-1}(ua' + va'')(p) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k \in [K_-, K_+]} g_{j-1}[p-k]d_j[k] \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{k \in \Gamma_j} h_{j-1}[p-k]a_j[k] \\
&+ 2^{j-1} \sum_{m, k \in \Gamma_j^+} M_j^+(m - K_+, k - K_+)h_{j-1}[p-m]a_j[k] \\
&+ 2^{j-1} \sum_{m, k \in \Gamma_j^-} M_j^-(m - K_-, k - K_-)h_{j-1}[p-m]a_j[k]
\end{aligned}$$

\tilde{a}_{j-1} est nul en dehors de l'intervalle $\Phi_{j-1} = \Gamma_{j-1}^- \cup \Gamma_{j-1} \cup \Gamma_{j-1}^+$
car si $p \notin \Phi_{j-1}$, pour tout $m \in \Phi_j$, $h_{j-1}[p-m] = 0$

C.3.5. *On calcule maintenant (C.6).*

$${}^t a'ua' + {}^t a''va'' = \sum_{l, p \in \mathbb{Z}} (a'_{j-1}[p]a'_{j-1}[l]u(l, p) + a''_{j-1}[p]a''_{j-1}[l]v(l, p))$$

On commence par

$$\begin{aligned}
{}^t a'ua' &= \sum_{l, p \in \mathbb{Z}} a'_{j-1}[p]a'_{j-1}[l]u(l, p) \\
&= \frac{1}{2^j} \sum_{k \in \Omega' \cap [K_-, K_+]} d_j^2[k] \\
&+ \frac{1}{2^j} \sum_{k \in \Omega' \cap \Gamma_j} a_j^2[k] \\
&+ \sum_{m, k \in \Omega' \cap \Gamma_j^+} M_j^+(m - K_+, k - K_+)a_j[m]a_j[k] \\
&+ \sum_{m, k \in \Omega' \cap \Gamma_j^-} M_j^-(m - K_-, k - K_-)a_j[m]a_j[k]
\end{aligned}$$

Ce qui donne au final en reprenant l'expression (C.6):

$$\begin{aligned}
\tilde{\epsilon}_{j-1} &= {}^t a' u a' + {}^t a'' v a'' \\
&= \frac{1}{2^j} \sum_{k \in [K_-, K_+]} d_j^2[k] \\
&\quad + \frac{1}{2^j} \sum_{k \in \Gamma_j} a_j^2[k] \\
&\quad + \sum_{m, k \in \Gamma_j^+} M_j^+(m - K_+, k - K_+) a_j[m] a_j[k] \\
&\quad + \sum_{m, k \in \Gamma_j^-} M_j^-(m - K_-, k - K_-) a_j[m] a_j[k]
\end{aligned}$$

C.3.6. *Calcul du terme matriciel $v + u$ dans le terme (C.4).* .

Par définition on a

$$\begin{aligned}
\Gamma_j &= [\gamma_j^-, \gamma_j^+] \\
\Gamma_j^- &= [\phi_j^-, \gamma_j^- - 1] \\
\Gamma_j^+ &= [\gamma_j^+ + 1, \phi_j^+]
\end{aligned}$$

Par ailleurs h_{j-1} a pour support $[2^{j-1}p_-, 2^{j-1}p_+]$

On définit les nouvelles bornes:

$$\begin{aligned}
\gamma_{j-1}^- &= \max(\gamma_j^- + 2^{j-1}p_+, K_- + 2^{j-1}q_+) \\
&= \gamma_j^- + 2^{j-1}p_+ \text{ pour } j < p \\
&= K_- + (2^{p-1} - 2^{j-1})p_+ + 2^{p-1} \max(q_+, p_+) \\
\gamma_{j-1}^+ &= \min(\gamma_j^+ + 2^{j-1}p_-, K_+ + 2^{j-1}q_-) \\
&= K_+ + (2^{p-1} - 2^{j-1})p_- + 2^{p-1} \max(q_-, p_-) \\
\phi_{j-1}^- &= \min(\phi_j^- + 2^{j-1}p_-, K_- + 2^{j-1}q_-) \\
&= K_- + (2^{p-1} - 2^{j-1})p_- + 2^{p-1} \max(q_-, p_-) \\
\phi_{j-1}^+ &= \min(\phi_j^+ + 2^{j-1}p_+, K_+ + 2^{j-1}q_+) \\
&= K_+ + (2^{p-1} - 2^{j-1})p_+ + 2^{p-1} \max(q_+, p_+)
\end{aligned}$$

Et les nouveaux ensembles:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{j-1} &= [\gamma_{j-1}^-, \gamma_{j-1}^+] \\
\Gamma_{j-1}^- &= [\phi_{j-1}^-, \gamma_{j-1}^- - 1] \\
\Gamma_{j-1}^+ &= [\gamma_{j-1}^+ + 1, \phi_{j-1}^+]
\end{aligned}$$

On obtient une simplification de l'expression de u et v .

Si $l \in \Gamma_{j-1}$ alors les bords n'ont pas d'effet:

$$g_{j-1}[l - m] = 0 \text{ si } m \notin [K_-, K_+] \text{ et}$$

$$h_{j-1}[l - m] = 0 \text{ si } m \notin \Gamma_i.$$

Tout ce passe comme si les sommes étaient infinies:

$$\begin{aligned}
u(l, p) &= \frac{1}{2^j} \sum_{k \in \Omega'_{j-1}} (g_{j-1}(l-k)g_{j-1}(p-k) + h_{j-1}(l-k)h_{j-1}(p-k)) \\
&= \frac{1}{2^j} \delta(l-p)
\end{aligned}$$

De même pour v

$$v(l, p) = \frac{1}{2^j} \delta(l-p)$$

On obtient finalement si l ou $p \in \Gamma_{j-1}$

$$u(l, p) + v(l, p) = \frac{1}{2^{j-1}} \delta(l-p)$$

Si $l \in \Gamma_{j-1}^-$
 $g_{j-1}[l-m] = 0$ si $m \notin [K_-, K_+]$ et
 $h_{j-1}[l-m] = 0$ si $m \notin \Gamma_i \cup \Gamma_i^-$.
D'où

$$\begin{aligned}
u(l, p) &= \frac{1}{2^j} \sum_{k \in [K_-, K_+] \cap \Omega'_{j-1}} g_{j-1}(l-k)g_{j-1}(p-k) \\
&+ \frac{1}{2^j} \sum_{m \in \Gamma_j \cap \Omega'_{j-1}} h_{j-1}[l-m]h_{j-1}[p-m] \\
&+ \sum_{m, n \in \Gamma_j^- \cap \Omega'_{j-1}} M_j^-(m - K_-, n - K_-)h_{j-1}[l-m]h_{j-1}[p-n]
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
v(l, p) &= \frac{1}{2^j} \sum_{k \in [K_-, K_+] \cap \Omega''_{j-1}} g_{j-1}(l-k)g_{j-1}(p-k) \\
&+ \frac{1}{2^j} \sum_{m \in \Gamma_j \cap \Omega''_{j-1}} h_{j-1}[l-m]h_{j-1}[p-m] \\
&+ \sum_{m, n \in \Gamma_j^- \cap \Omega''_{j-1}} M_j^-(m - K_-, n - K_-)h_{j-1}[l-m]h_{j-1}[p-n].
\end{aligned}$$

Pour observer la stationnarité, on décale les indices des matrices de K_- . On pose

$$U(l, m) = u(l + K_-, m + K_-)$$

et

$$V(l, m) = v(l + K_-, m + K_-)$$

Alors $U(l, m)$ et $V(l, m)$ ne dépendent que des filtres h et g et des indices l et m .

Pour l et $p \in \Phi_{j-1}^-$ avec

$$\Phi_{j-1}^- = \Gamma_{j-1}^- - K_- = [(2^{p-1} - 2^{j-1})p_- + 2^{p-1} \max(q_-, p_-), (2^{p-1} - 2^{j-1})p_+ + 2^{p-1} \max(q_+, p_+) - 1],$$

on définit la matrice $M_{j-1}^-(l, p) = U(l, p) + V(l, p)$. Alors

$$\begin{aligned}
M_{j-1}^-(l, p) &= u(l + K_-, p + K_-) + v(l + K_-, p + K_-) \\
&\text{D'après la formule de } u \text{ et } v \text{ (C.3) et } \Omega'_{j-1} \cup \Omega''_{j-1} = \mathbb{Z} \\
&= \frac{1}{2^j} \sum_{k \in [K_-, K_+]} g_{j-1}(l - k + K_-) g_{j-1}(p - k + K_-) \\
&\quad + \frac{1}{2^j} \sum_{m \in \Gamma_j} h_{j-1}[l + K_- - m] h_{j-1}[p + K_- - m] \\
&\quad + \sum_{m, n \in \Gamma_j^-} M_j^-(m - K_-, n - K_-) h_{j-1}[l + K_- - m] h_{j-1}[p + K_- - n]
\end{aligned}$$

Comme $g_{j-1}[l - k] = 0$ si $k \geq K_+ - K_-$ et $h_{j-1}[l - k] = 0$ si $k \geq \gamma_j^+ - K_-$ où γ_j^+ est le bord droit de Γ_j

$$\begin{aligned}
M_{j-1}^-(l, p) &= \frac{1}{2^j} \sum_{k \in [0, +\infty]} g_{j-1}(l - k) g_{j-1}(p - k) \\
&\quad + \frac{1}{2^j} \sum_{m \in [\gamma_j^- - K_-, +\infty]} h_{j-1}[l - m] h_{j-1}[p - m] \\
&\quad + \sum_{m, n \in \Phi_j^-} M_j^-(m, n) h_{j-1}[l - m] h_{j-1}[p - n]
\end{aligned}$$

Sachant que $\gamma_j^- - K_- = (2^{p-1} - 2^{j-1})p_+ + 2^{p-1} \max(q_+, p_+)$

C'est le problème matriciel au bord gauche.

De la même manière, si $l \in \Gamma_{j-1}^+$ alors seuls le centre Γ_j et le bord droit Γ_j^+ de la reconstruction à l'échelle inférieure interviennent.

On travaille sur l'intervalle:

$$\begin{aligned}
\Phi_{j-1}^+ &= \Gamma_{j-1}^+ - K_+ \\
&= [(2^{p-1} - 2^{j-1})p_- + 2^{p-1} \max(q_-, p_-) + 1, (2^{p-1} - 2^{j-1})p_+ + 2^{p-1} \max(q_+, p_+)]
\end{aligned}$$

On définit alors la matrice au bord droit indépendamment de K_+

$$\begin{aligned}
M_{j-1}^+(l, p) &= u(l + K_+, p + K_+) + v(l + K_+, p + K_+) \\
&= \frac{1}{2^j} \sum_{k \in [-\infty, 0]} g_{j-1}(l - k) g_{j-1}(p - k) \\
&\quad + \frac{1}{2^j} \sum_{m \in [-\infty, \gamma_j^+ - K_+]} h_{j-1}[l - m] h_{j-1}[p - m] \\
&\quad + \sum_{m, n \in \Phi_j^+} M_j^+(m, n) h_{j-1}[l - m] h_{j-1}[p - n]
\end{aligned}$$

Sachant que $\gamma_j^+ - K_+ = (2^{p-1} - 2^{j-1})p_- + 2^{p-1} \min(q_-, p_-)$

C'est le problème matriciel au bord droit.

En dehors de ces trois intervalles, $u + v$ est nul.

C.3.7. *Conclusion.* Si on réécrit le coût de l'équation (C.3), il vient:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{j-1}^2 &= \sum_{l \in \Gamma_{j-1}} \left(\frac{1}{2^{j-1}}\right) \hat{a}_{j-1}^2[l] \\
&+ \sum_{l, p \in \Gamma_{j-1}^-} M_{j-1}^-(l - K_-, p - K_-) \hat{a}_{j-1}[l] \hat{a}_{j-1}[p] \\
&+ \sum_{l, p \in \Gamma_{j-1}^+} M_{j-1}^+(l - K_+, p - K_+) \hat{a}_{j-1}[l] \hat{a}_{j-1}[p] \\
&- 2 \frac{1}{2^{j-1}} \sum_{l \in \Gamma_{j-1}^- \cup \Gamma_{j-1} \cup \Gamma_{j-1}^+} \hat{a}_{j-1}[l] \tilde{a}_{j-1}[p] \\
&+ \tilde{\epsilon}_{j-1}^2 \\
&+ \sum_{i=j}^p \tilde{\epsilon}_i^2
\end{aligned}$$

On termine en séparant le problème sur chacun des intervalles, plus des termes constants.

$$(C.8) \quad \epsilon_{j-1}^2 = \sum_{l \in \Gamma_{j-1}} \left(\frac{1}{2^{j-1}}\right) \hat{a}_{j-1}^2[l] - 2 \frac{1}{2^{j-1}} \sum_{l \in \Gamma_{j-1}} \hat{a}_{j-1}[l] \tilde{a}_{j-1}[p]$$

$$(C.9) \quad + \sum_{l, p \in \Gamma_{j-1}^-} M_{j-1}^-(l - K_-, p - K_-) \hat{a}_{j-1}[l] \hat{a}_{j-1}[p] - 2 \frac{1}{2^{j-1}} \sum_{l \in \Gamma_{j-1}^-} \hat{a}_{j-1}[l] \tilde{a}_{j-1}[p]$$

$$(C.10) \quad + \sum_{l, p \in \Gamma_{j-1}^+} M_{j-1}^+(l - K_+, p - K_+) \hat{a}_{j-1}[l] \hat{a}_{j-1}[p] - 2 \frac{1}{2^{j-1}} \sum_{l \in \Gamma_{j-1}^+} \hat{a}_{j-1}[l] \tilde{a}_{j-1}[p]$$

$$(C.11) \quad + \tilde{\epsilon}_{j-1}^2 + \sum_{i=j}^p \tilde{\epsilon}_i^2$$

$$= \epsilon_{j-1}^2(\Gamma_{j-1}^-) + \epsilon_{j-1}^2(\Gamma_{j-1}) + \epsilon_{j-1}^2(\Gamma_{j-1}^+) + \tilde{\epsilon}_{j-1}^2 + \sum_{i=j}^p \tilde{\epsilon}_i^2$$

C.3.8. *Au centre.* Sur Γ_{j-1} , équation (C.8)

$$\begin{aligned}
\epsilon_{j-1}^2(\Gamma_{j-1}) &= \frac{1}{2^{j-1}} \sum_{l \in \Gamma_{j-1}} \hat{a}_{j-1}[l] (\hat{a}_{j-1}[l] - 2\tilde{a}_{j-1}[l]) \\
&= \frac{1}{2^{j-1}} \sum_{l \in \Gamma_{j-1}} (\hat{a}_{j-1}[l] - \tilde{a}_{j-1}[l])^2 \\
&\quad - \frac{1}{2^{j-1}} \sum_{l \in \Gamma_{j-1}} \tilde{a}_{j-1}[l]^2
\end{aligned}$$

L'optimum est pour:

$$\begin{aligned}\check{a}_{j-1} &= \tilde{a}_{j-1} \\ \check{a}_{j-1}[p] &= \frac{1}{2} \sum_{k \in [K_-, K_+]} g_{j-1}[p-k] d_j[k] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k \in \Gamma_j} h_{j-1}[p-k] a_j[k]\end{aligned}$$

C.3.9. *A gauche: équation (C.9).* Sur $\Gamma_{j-1}^- = K_- + \Phi_{j-1}^-$,

$$\begin{aligned}\epsilon_{j-1}^2(\Gamma_{j-1}^-) &= \sum_{l, m \in \Phi_{j-1}^-} M_{j-1}^-(l, m) \hat{a}_{j-1}[l + K_-] \hat{a}_{j-1}[m + K_-] \\ &\quad - 2 \frac{1}{2^{j-1}} \sum_{l \in \Phi_{j-1}^-} \hat{a}_{j-1}[l] \check{a}_{j-1}[l]\end{aligned}$$

Comme on se restreint à l'espace Γ_{j-1}^- pour les signaux et Φ_{j-1}^- pour la matrice. Le problème est de la forme:

$$\begin{aligned}\epsilon_-^2 &= {}^t \hat{a} A \hat{a} - 2^t \left(\frac{1}{2^{j-1}} \tilde{a} \right) a \\ &= {}^t (\hat{a} - \check{a}) A (\hat{a} - \check{a}) - {}^t \left(\frac{1}{2^{j-1}} \tilde{a} \right) \check{a}\end{aligned}$$

Avec:

$$\check{a} = M^{-1} \left(\frac{1}{2^{j-1}} \tilde{a} \right)$$

On obtient donc l'optimum de notre problème pour:

$$\check{a}_{j-1} = \frac{1}{2^{j-1}} (M_{j-1}^-)^{-1} \tilde{a}_{j-1}$$

à un décalage d'indice de K_- près Et l'erreur devient

$$\begin{aligned}\epsilon_{j-1}^2(\Gamma_{j-1}^-) &= \sum_{l, m \in \Phi_{j-1}^-} M_{j-1}^-(l, m) (\hat{a}_{j-1} - \check{a}_{j-1})[l + K_-] (\hat{a}_{j-1} - \check{a}_{j-1})[m + K_-] \\ &\quad - \frac{1}{2^{j-1}} \sum_{l \in \Phi_{j-1}^-} \check{a}_{j-1}[l + K_-] \check{a}_{j-1}[l + K_-]\end{aligned}$$

C.3.10. *A droite: équation (C.10).* Sur $\Gamma_{j-1}^+ = K_+ + \Phi_{j-1}^+$

$$\begin{aligned}\epsilon_{j-1}^2(\Gamma_{j-1}^+) &= \sum_{l, m \in \Phi_{j-1}^+} M_{j-1}^+(l, m) \hat{a}_{j-1}[l + K_-] \hat{a}_{j-1}[m + K_-] \\ &\quad - 2 \frac{1}{2^{j-1}} \sum_{l \in \Phi_{j-1}^-} \hat{a}_{j-1}[l] \check{a}_{j-1}[l] \\ &= \sum_{l, m \in \Phi_{j-1}^-} M_{j-1}^+(l, m) (\hat{a}_{j-1} - \check{a}_{j-1})[l + K_-] (\hat{a}_{j-1} - \check{a}_{j-1})[m + K_-] \\ &\quad - \frac{1}{2^{j-1}} \sum_{l \in \Phi_{j-1}^-} \check{a}_{j-1}[l + K_-] \check{a}_{j-1}[l + K_-]\end{aligned}$$

Avec pour définition de l'optimum:

$$\check{a}_{j-1} = \frac{1}{2^{j-1}} (M_{j-1}^+)^{-1} \tilde{a}_{j-1}$$

C.3.11. *Le reste: équation (C.11).*

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{j-1}^2 &= \sum_{k \in [K_-, K_+]} \frac{1}{2^j} d_j^2[k] \\ &+ \sum_{k \in \Gamma_j} \frac{1}{2^j} a_j^2[k] \\ &+ \sum_{m, k \in \Gamma_j^+} M_j^+(m - K_+, k - K_+) a_j[m] a_j[k] \\ &+ \sum_{m, k \in \Gamma_j^-} M_j^-(m - K_-, k - K_-) a_j[m] a_j[k] \end{aligned}$$

C.3.12. *Fin de la récurrence.* On obtient bien la récurrence au rang $j - 1$ en ayant exprimé \check{a}_{j-1} . Et si on prend $\Phi_{j-1} = \Gamma_{j-1}^- \cup \Gamma_{j-1} \cup \Gamma_{j-1}^+$, alors le coût minimal de passage de j à $j - 1$ s'écrit

$$\begin{aligned} \epsilon_{j-1}^2 &= \sum_{k \in [K_-, K_+]} \frac{1}{2^j} d_j^2[k] \\ &+ \sum_{k \in \Gamma_j} \frac{1}{2^j} a_j^2[k] \\ &+ \sum_{m, k \in \Gamma_j^+} M_j^+(m - K_+, k - K_+) a_j[m] a_j[k] \\ &+ \sum_{m, k \in \Gamma_j^-} M_j^-(m - K_-, k - K_-) a_j[m] a_j[k] \\ &- \frac{1}{2^{j-1}} \sum_{l \in \Phi_{j-1}} \check{a}_{j-1}[l] \tilde{a}_{j-1}[l] \end{aligned}$$

Et le coût total s'écrit:

$$\begin{aligned} \epsilon_{j-1}^2 &= \frac{1}{2^{j-1}} \sum_{m \in \Gamma_{j-1}} (\hat{a}_{j-1}[m] - \check{a}_{j-1}[m])^2 \\ &+ \sum_{m, n \in \Gamma_{j-1}^-} (\hat{a}_{j-1} - \check{a}_{j-1})[m] (\hat{a}_{j-1} - \check{a}_{j-1})[n] M_{j-1}^-(m - K_-, n - K_-) \\ &+ \sum_{m, n \in \Gamma_{j-1}^+} (\hat{a}_{j-1} - \check{a}_{j-1})[m] (\hat{a}_{j-1} - \check{a}_{j-1})[n] M_{j-1}^+(m - K_+, n - K_+) \\ &+ \sum_{i=j-1}^p \check{\epsilon}_i^2 \end{aligned}$$

C.4. **Récapitulatif.** On définit les intervalles

$$\Gamma_j = [\gamma_j^-, \gamma_j^+]$$

$$\Gamma_j^- = [\phi_j^-, \gamma_j^- - 1]$$

$$\Gamma_j^+ = [\gamma_j^+ + 1, \phi_j^+]$$

$$\Phi_j = [\phi_j^-, \phi_j^+]$$

$$\Phi_j^- = \Gamma_j^- - K_- = [(2^{p-1} - 2^j)p_- + 2^{p-1} \max(q_-, p_-), (2^{p-1} - 2^j)p_+ + 2^{p-1} \max(q_+, p_+) - 1]$$

$$\Phi_j^+ = \Gamma_j^+ - K_+ = [(2^{p-1} - 2^j)p_- + 2^{p-1} \max(q_-, p_-) + 1, (2^{p-1} - 2^j)p_+ + 2^{p-1} \max(q_+, p_+)]$$

dont les bornes sont

$$\gamma_j^- = K_- + (2^{p-1} - 2^j)p_+ + 2^{p-1} \max(q_+, p_+)$$

$$\gamma_j^+ = K_+ + (2^{p-1} - 2^j)p_- + 2^{p-1} \max(q_-, p_-)$$

$$\phi_j^- = K_- + (2^{p-1} - 2^j)p_- + 2^{p-1} \max(q_-, p_-)$$

$$\phi_j^+ = K_+ + (2^{p-1} - 2^j)p_+ + 2^{p-1} \max(q_+, p_+).$$

On définit alors par récurrence sur la profondeur j les matrices au bord gauche:

$$\begin{aligned} M_{j-1}^-(l, p) &= \frac{1}{2^j} \sum_{k \in [0, +\infty]} g_{j-1}(l-k)g_{j-1}(p-k) \\ &+ \frac{1}{2^j} \sum_{m \in [(2^{p-1} - 2^{j-1})p_+ + 2^{p-1} \max(q_+, p_+), +\infty]} h_{j-1}[l-m]h_{j-1}[p-m] \\ &+ \sum_{m, n \in \Phi_j^-} M_j^-(m, n)h_{j-1}[l-m]h_{j-1}[p-n], \end{aligned}$$

et on définit par récurrence sur la profondeur j les matrices au bord droit:

$$\begin{aligned} M_{j-1}^+(l, p) &= \frac{1}{2^j} \sum_{k \in [-\infty, 0]} g_{j-1}(l-k)g_{j-1}(p-k) \\ &+ \frac{1}{2^j} \sum_{m \in [-\infty, (2^{p-1} - 2^{j-1})p_- + 2^{p-1} \max(q_-, p_-)]} h_{j-1}[l-m]h_{j-1}[p-m] \\ &+ \sum_{m, n \in \Phi_j^+} M_j^+(m, n)h_{j-1}[l-m]h_{j-1}[p-n]. \end{aligned}$$

Ensuite, le cycle commence. On calcule par récurrence le signal \tilde{a}_j :

$$\begin{aligned} \tilde{a}_j[p] &= \frac{1}{2} \sum_{k \in [K_-, K_+]} g_j[p-k]d_{j+1}[k] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k \in \Gamma_{j+1}} h_j[p-k]a_{j+1}[k] \\ &+ 2^{j-1} \sum_{m, k \in \Gamma_{j+1}^+} M_{j+1}^+(m - K_+, k - K_+)h_j[p-m]a_{j+1}[k] \\ &+ 2^{j-1} \sum_{m, k \in \Gamma_j^-} M_{j+1}^-(m - K_-, k - K_-)h_j[p-m]a_{j+1}[k] \end{aligned}$$

Puis le signal \check{a}_j sur Γ_j

$$\check{a}_j = \tilde{a}_j$$

Sur Γ_j^-

$$\check{a}_j = \frac{1}{2^j} (M_j^-)^{-1} \tilde{a}_j$$

Sur Γ_j^+

$$\check{a}_j = \frac{1}{2^j} (M_j^+)^{-1} \tilde{a}_j$$

Enfin, on calcule l'erreur pour le passage de l'échelle $j + 1$ à j

$$\begin{aligned} \epsilon_j^2 &= \sum_{k \in [K_-, K_+]} \frac{1}{2^{j+1}} d_{j+1}^2[k] \\ &+ \sum_{k \in \Gamma_j} \frac{1}{2^{j+1}} a_{j+1}^2[k] \\ &+ \sum_{m, k \in \Gamma_j^+} M_{j+1}^+(m - K_+, k - K_+) a_{j+1}[m] a_{j+1}[k] \\ &+ \sum_{m, k \in \Gamma_j^-} M_{j+1}^-(m - K_-, k - K_-) a_{j+1}[m] a_{j+1}[k] \\ &- \frac{1}{2^j} \sum_{l \in \Phi_j} \check{a}_j[l] \tilde{a}_j[l] \end{aligned}$$

ECOLE POLYTECHNIQUE

E-mail address: benoit.bourrel@polytechnique.org