SUPPLÉMENT

Où l'on fait voir que les Équations aux différences ordinaires, pour lesquelles les conditions d'intégrabilité ne sont pas satisfaites, sont susceptibles d'une véritable intégration, & que c'est de cette intégration que dépend celle des équations aux différences partielles élevées.

Par M. MONGE.

I.

ON fait que toutes les équations aux différences ordinaires à deux variables, appartiennent à des courbes réelles. En effet, pour le premier ordre, elles peuvent toutes, excepté une seule, être mises sous la forme $Mdx + Ndy = 0$; & par conséquent, étant pris un point à volonté, c'est-à-dire, étant données les valeurs de x & de y, on peut toujours trouver par cette équation l'inclinaison de la tangente à la courbe en ce point, ou, ce qui revient au même, trouver la direction du point décrivant, parce que cette direction est déterminée par le rapport de dy à dx, que donne cette équation. Pour le second ordre, toutes les équations à deux variables, excepté une seule, peuvent être mises sous la forme $Lddy + Mddx + N = 0$, L, M, N, renfermant les variables avec leurs différences premières. Ainsi, étant donné un point à volonté, & la direction de la tangente en ce point, ce qui détermine $x, y, \frac{dy}{dx}$, & faisant la valeur de ddx, une hypothèse arbitraire, ce dont on est le maître; il est toujours possible, au moyen de l'équation différentielle, de trouver la valeur de ddy, & par conséquent, le changement de direction que le point décrivant éprouve dans cet endroit de la courbe, ou, ce qui revient au même, de trouver le rayon de courbure de la courbe. Il en est de même des ordres supérieurs.

Lorsque les équations différentielles du premier ordre renferment plus de deux variables, on peut les diviser en deux classes; les unes, comme les suivantes,

$$dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2),$$
$$z^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) = a^2(dx^2 + dy^2),$$

sont élevées par rapport aux différences, & elles sont toutes regardées comme absurdes; les autres peuvent être ramenées à la forme linéaire

$$Ldx + Mdy + Ndz \ldots = 0,$$

dans laquelle les coéfficiens $L, M, N \ldots$ peuvent renfermer les variables sous des radicaux; & parmi ces dernières, celles qui ne satisfont pas à certaines conditions, sont encore regardées comme absurdes. Le nombre des conditions dont il s'agit ici, est toujours égal au nombre des variables, moins deux; par exemple, pour le cas de trois variables, si l'équation différentielle est mise sous la forme $dz = pdx + qdy$, l'équation de condition est $\left(\frac{dp}{dy}\right) = \left(\frac{dq}{dx}\right)$, que l'on peut développer de la manière suivante:

$$L\left[\left(\frac{dM}{dz}\right) - \left(\frac{dN}{dy}\right)\right] + M\left[\left(\frac{dN}{dx}\right) - \left(\frac{dL}{dz}\right)\right] + N\left[\left(\frac{dL}{dy}\right) - \left(\frac{dM}{dx}\right)\right] = 0.$$

Pour le cas de quatre variables, si l'équation différentielle est mise sous la forme $dz = pdu + qdx + rdy$, les conditions sont

$$\left(\frac{ddp}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{ddq}{du\,dy}\right),$$

$$\left(\frac{ddp}{dx\,dy}\right) = \left(\frac{ddr}{du\,dx}\right),$$

& on peut les développer comme dans le cas précédent.

S'il y a cinq variables, & que l'équation différentielle soit sous la forme $dz = pdv + qdu + rdx + sdy$, les trois conditions sont

$$\left(\frac{d^3\,p}{du\,dx\,dy}\right) = \left(\frac{d^3\,q}{dv\,dx\,dy}\right),$$

$$\left(\frac{d^3\,p}{du\,dx\,dy}\right) = \left(\frac{d^3\,r}{dv\,du\,dy}\right),$$

$$\left(\frac{d^3\,p}{du\,dx\,dy}\right) = \left(\frac{d^3\,s}{dv\,du\,dx}\right);$$

& ainsi de suite, pour un plus grand nombre de variables.

Je me propose de faire voir qu'il n'y a aucune équation différentielle qui soit absurde, si toutefois l'on entend par le mot qu'elle exprime, une propriété impossible, imaginaire,........ &c. Je ferai voir que toutes les équations différentielles expriment des propriétés réelles, soit qu'elles satisfassent ou non aux conditions que je viens de rapporter; je montrerai qu'elles sont toutes susceptibles d'une véritable intégration, & pour jeter sur cette matière un plus grand jour, j'exposerai ce que signifient, dans l'espace, celles qui sont à trois variables.

I I.

De toutes les équations aux différences ordinaires du premier ordre, & à deux variables, il n'y en a qu'une seule qui ne soit pas linéaire, & cette équation est

$$M^2\,dx^{2m} + N^2\,dy^{2m} = 0,$$

M, N étant fonctions de x, y; or, cette équation ne peut rien exprimer de réel, à moins que l'on n'ait en même temps $M = 0$, $N = 0$, ou que l'on n'ait en même temps $dx = 0$, $dy = 0$. Le premier de ces deux résultats ne peut pas être regardé comme une intégrale, parce

parce qu'il ne renferme pas de constante arbitraire; donc, la véritable intégrale de cette équation est le système des deux équations simultanées $x = a$, $y = b$; c'est-à-dire, que l'équation dont il s'agit n'appartient pas à une ligne courbe, mais à un point unique quelconque, pris sur le plan des x, y. Il y a donc cette différence entre les équations linéaires du premier ordre à deux variables, & la seule équation de cet ordre qui soit élevée, que les premières appartiennent toutes à des courbes, & que l'intégrale de chacune d'elles est une équation unique, complétée par une seule constante arbitraire; tandis que la dernière appartient à un point, & que son intégrale est le système de deux équations finies simultanées, & complétées par deux arbitraires.

La propriété de l'équation aux différences ordinaires élevées, du premier ordre & à deux variables, avoit déjà été observée; mais comme cette équation est unique, on l'avoit regardée comme une exception à la règle générale, & l'on n'avoit pas remarqué que c'étoit le commencement d'une chaîne immense, à laquelle tenoient les plus grandes difficultés du calcul intégral. En effet, parmi les équations aux différences ordinaires à trois variables, celles qui satisfont à la condition que j'ai rapportée dans l'*article précédent*, & qui est connue sous le nom de *condition d'intégrabilité*, appartiennent toutes à des surfaces courbes, & l'intégrale de chacune d'elles est une équation unique, complétée par une seule constante arbitraire; mais toutes les équations qui ne satisfont pas à cette condition, sont en nombre infini, & elles n'appartiennent pas à des surfaces; leurs lieux sont des courbes à double courbure, tracées dans l'espace, & l'intégrale de chacune d'elles est le système de deux équations simultanées. Enfin, parmi ces équations, il n'y en a qu'une seule,

$$M^2 dx^{2m} + N^2 dy^{2m} + P^2 dz^{2m} = 0,$$

dont l'intégrale soit le système de trois équations finies simultanées, $x = a$, $y = b$, $z = c$; elle n'appartient ni à une surface courbe, ni à une courbe à double courbure; son lieu est un point unique pris arbitrairement dans l'espace.

Pour les équations aux différences ordinaires du premier ordre, à quatre variables, l'intégrale de celles qui satisfont en même temps aux deux conditions que j'ai rapportées, est une seule équation complétée par une seule constante arbitraire; l'intégrale de celles qui ne satisfont qu'à une seule de ces deux conditions, est le système de deux équations simultanées; l'intégrale de celles qui ne satisfont à aucune des deux conditions, est le système de trois équations finies simultanées; enfin il n'y en a qu'une seule,

$$M^2 du^{2m} + N^2 dx^{2m} + P^2 dy^{2m} + Q^2 dz^{2m} = 0,$$

dont l'intégrale soit le système de quatre équations simultanées, $u = a$, $x = b$, $y = c$, $z = e$. Il en est de même pour un plus grand nombre de variables.

Ainsi l'objet des équations connues sous le nom de *conditions d'intégrabilité*, n'est pas, comme on l'a cru jusqu'ici, d'indiquer celles des équations différentielles dont les intégrales sont possibles, mais de faire connoître le nombre des équations finies simultanées dont doivent être composées les intégrales qui sont toujours possibles. Avant que d'aller plus loin, éclaircissons ce qu'on vient de voir, par des exemples simples.

III.

EXEMPLE I. Soit proposée l'équation

$$(A) \qquad dz^2 = a^2 (dx^2 + dy^2),$$

dans laquelle a est une constante donnée. Il est bien évident que cette équation appartient à la courbe à double courbure, dont les élémens font un angle constant avec le plan des x, y; ainsi les équations de toutes les droites qui font le même angle avec le plan des x, y, doivent satisfaire à la proposée, quelles que soient d'ailleurs les directions de ces droites; or ces équations sont

$$(B) \qquad x = \alpha z + \beta,$$

$$(C) \qquad y = z\sqrt{\left(\frac{1}{\alpha^2} - \alpha^2\right)} + \gamma,$$

α, β, γ étant trois constantes arbitraires; donc le système de ces deux équations prises simultanément est une solution de la proposée. En effet, si l'on différencie ces deux équations, les deux constantes arbitraires β, γ, s'évanouiront, & l'on aura

$$dx = \alpha dz,$$

$$dy = dz\sqrt{\left(\frac{1}{\alpha^2} - \alpha^2\right)};$$

& éliminant α entre ces deux dernières équations, on aura

$$dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2).$$

Quoique le système des deux équations (A), (B), soit complété par trois constantes arbitraires, α, β, γ, on va voir qu'il n'est pas l'intégrale complète de l'équation (A), & que cette intégrale complète est encore plus générale.

Si l'on élimine entre (A) & (B) la constante α, l'équation résultante

$$(x - \beta)^2 + (y - \gamma)^2 = \frac{z^2}{a^2}$$

sera celle de toutes les surfaces coniques dont les sommets seront dans le plan des x, y, & dont les côtés feront avec ce plan l'angle constant; si l'on fait $\gamma = \varphi\beta$, φ étant une fonction arbitraire, l'équation

$$(x - \beta)^2 + (y - \varphi\beta)^2 = \frac{z^2}{a^2}$$

appartiendra seulement à celles de ces surfaces coniques dont le sommet sera placé sur une certaine courbe tracée dans le plan des x, y, l'équation de cette courbe étant

$y = \varphi x$; & si l'on considère deux de ces surfaces courbes consécutives, elles se couperont en une droite dont on aura la seconde équation, en différenciant l'équation des cônes par rapport au paramètre variable ζ; ainsi les équations de cette droite seront

$$(D) \qquad (x - \zeta)^2 + (y - \varphi\zeta)^2 = \frac{z^2}{a^2},$$
$$(E) \qquad x - \zeta + (y - \varphi\zeta)\varphi'\zeta = 0.$$

Cette droite formera encore avec le plan des x, y, l'angle constant, & elle sera une de celles qui satisfont à l'équation (A). Mais si l'on considère la suite des surfaces coniques, on aura une suite de droites comme la précédente, qui ne différeront de position qu'en vertu du paramètre variable ζ; & toutes ces droites se trouvant deux à deux consécutivement sur une même surface conique, elles se couperont nécessairement deux à deux consécutivement, & elles seront par conséquent les tangentes d'une même courbe à double courbure: donc les tangentes de cette courbe à double courbure étant également inclinées au plan des x, y, les élémens de cette courbe feront, avec ce plan, des angles constans; donc enfin les équations de cette courbe seront l'intégrale complète de la proposée.

Or il est évident que l'on aura les équations de la courbe à double courbure, en différenciant les deux équations (D), (E), par rapport au paramètre variable ζ; de plus, l'équation (E) est déjà la différentielle de (D) prise de cette manière: donc l'intégrale complète de l'équation (A) est le système des trois équations simultanées,

$$(D) \qquad (x - \zeta)^2 + (y - \varphi\zeta)^2 = \frac{z^2}{a^2},$$
$$(E) \qquad x - \zeta + (y - \varphi\zeta)\varphi'\zeta = 0,$$
$$(F) \qquad -1 - (\varphi'\zeta)^2 + (y - \varphi\zeta)\varphi''\zeta = 0,$$

dont les deux dernières sont les différentielles première

& seconde de (D), prises en ne faisant varier que l'indéterminée ζ, & dans lesquelles φ est une fonction arbitraire; c'est-à-dire, que cette intégrale est le résultat de l'élimination de l'indéterminée ζ entre les trois équations (D), (E), (F).

Il est facile de vérifier cette intégrale par la différenciation : en effet, les différentielles des deux équations (D), (E), prises par rapport à ζ, ayant lieu, il s'ensuit que l'on peut différencier ces deux équations, en regardant ζ comme constante, ce qui donnera

$$(d) \quad (x - \zeta)\,dx + (y - \varphi\zeta)\,dy = \frac{z\,dz}{a^2},$$

$$(e) \quad dx + dy\,\varphi'\zeta = 0;$$

& éliminant entre les quatre équations (D), (E), (d), (e), les trois indéterminées ζ, $\varphi\zeta$, $\varphi'\zeta$, on aura

$$(A) \quad dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2).$$

Le filet d'une vis dont l'axe est perpendiculaire au plan des x, y, est un cas particulier de cet exemple; & le filet d'une vis tracée sur une surface cylindrique à base quelconque, & perpendiculaire au plan des x, y, en est le cas général.

I V.

Exemple II. Soit proposée l'équation

$$(A) \quad z^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) = a^2(dx^2 + dy^2),$$

dans laquelle a est une constante donnée. Il est évident, à cause de la proportion

$$a : z :: \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} : \sqrt{(dx^2 + dy^2)},$$

que si l'on conçoit un cercle dont le rayon soit a, dont le centre soit dans le plan des x, y, & dont le plan soit perpendiculaire à ce dernier, la proposée appartient à toutes les courbes dont l'élément fait avec le plan des x, y, le même angle que l'élément du cercle pris à même hauteur, ou, ce qui revient au même, pris pour un z égal à celui de la courbe; donc tous les cercles, dont le rayon est a, dont les plans sont parallèles aux z, & dont les centres sont placés dans le plan des x, y, doivent satisfaire à la proposée: or les équations de ces cercles sont

$$(B)\quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = a^2,$$
$$(C)\quad x - \alpha = \gamma\,(y - \beta),$$

α, β, γ étant trois constantes arbitraires; donc le système de ces deux équations prises simultanément, est une solution particulière de l'équation (A). En effet, si l'on différencie les deux (A), (B), on aura

$$(x - \alpha)\,dx + (y - \beta)\,dy + z\,dz = 0,$$
$$dx = \gamma\,dy,$$

& si l'on élimine entre ces quatre équations les trois arbitraires α, β, γ, l'équation résultante sera la proposée. Quoique le système des deux équations (A), (B), soit complété par trois arbitraires, on verra cependant que l'intégrale complète de la proposée est encore plus générale.

L'équation (B) appartient à une sphère dont le rayon est a, & dont le centre est placé sur le plan des x, y, en un point dont les coordonnées sont α, β; si l'on fait $\beta = \varphi\alpha$, l'équation

$$(D)\quad (x - \alpha)^2 + (y - \varphi\alpha)^2 + z^2 = a^2$$

appartiendra à toutes les sphères de même rayon, dont les centres seront placés dans le plan des x, y, sur une certaine courbe, l'équation de cette courbe étant $y = \varphi x$; si parmi ces sphères on en considère deux consécutives, elles se couperont suivant un cercle, dont on aura la seconde équation en différenciant l'équation de la sphère par rapport au paramètre variable β; ainsi les équations de ce cercle seront

$$(D)\quad (x - \alpha)^2 + (y - \varphi\alpha)^2 + z^2 = a^2$$
$$(E)\quad x - \alpha + (y - \varphi\alpha)\,\varphi'\alpha = 0,$$

& ces équations satisferont encore à la proposée. Mais si l'on considère la suite des sphères, dont les centres sont placés sur la même courbe, on aura une suite de cercles comme le précédent, qui ne différeront qu'en vertu du paramètre variable $\mathcal{C}$; tous ces cercles se trouvant deux à deux consécutivement sur une même sphère, ils pourront se couper deux à deux consécutivement, & la suite de leurs points d'intersection formera une courbe à double courbure touchée par tous les cercles: donc chaque élément de cette courbe à double courbure étant commun à un des cercles, cet élément fera, avec le plan des x, y, l'angle comporté par la proposée; donc les équations de cette courbe à double courbure seront l'intégrale complète de l'équation (A).

Or il est évident que, pour avoir les équations de cette courbe à double courbure, il faut différencier les équations (D), (E), par rapport au paramètre variable α; de plus l'équation (E) est déjà la différentielle de (D) prise de cette manière: donc il suffira de différencier (E); donc l'intégrale complète de la proposée sera le système des trois équations simultanées

$$(D)\quad (x - \alpha)^2 + (y - \varphi\alpha)^2 + z^2 = a^2,$$
$$(E)\quad x - \alpha + (y - \varphi\alpha)\varphi'\alpha = 0,$$
$$(F)\quad - 1 - (\varphi'\alpha)^2 + (y - \varphi\alpha)\varphi''\alpha = 0;$$

dont les deux dernières sont les différentielles première & seconde de (D), prise en regardant α comme seule variable, & dans lesquelles φ est une fonction arbitraire; c'est-à-dire que l'intégrale complète est le résultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les trois équations (D), (E), (F); & que, dans chaque cas particulier, cette intégrale ne peut être exprimée que par le système de deux équations simultanées.

Pour vérifier ce résultat par la différenciation, il faut remarquer que les différentielles des deux équations (D), (E), prises par rapport à α, ont lieu, & qu'ainsi on peut différencier les deux équations (D), (E), en regardant α comme constante : or si l'on exécute cette différenciation, on a les deux équations

$$(d)\ (x - \alpha)dx + (y - \varphi\alpha)dy + z\,dz = 0,$$

$$(e)\ dx + dy\,\varphi'\alpha = 0,$$

& si, entre les quatre équations (D), (E), (d), (e), on élimine les trois indéterminées α, $\varphi\alpha$, $\varphi'\alpha$, on trouve

$$(A)\ z^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) = a^2(dx^2 + dy^2),$$

donc l'intégrale que l'on vient de trouver est exacte.

V.

EXEMPLE III. Soit proposée l'équation

$$(A)\quad \left.\begin{array}{l}(x\,dy - y\,dx)^2\\ (y\,dz - z\,dy)^2\\ (z\,dx - x\,dz)^2\end{array}\right\} = a^2(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

dans laquelle a est une constante donnée. Si l'on met cette équation sous la forme

$$d.\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)} = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)},$$

il sera facile de reconnoître qu'elle appartient à toutes les courbes à double courbure dont les tangentes sont en même-temps tangentes à une sphère dont le rayon est a, & dont le centre est à l'origine ; donc les équations de toutes les tangentes à la sphère seront une solution particulière de la proposée : or les équations de ces tangentes sont

$$(B)\ \alpha x + \beta y + z\sqrt{(a^2 - \alpha^2 - \beta^2)} = a^2,$$

$$(C)\ x - \alpha = \gamma(y - \beta),$$

α, β étant les coordonnées du point de contact, & γ déterminant la direction de la tangente ; donc si, dans ces équations

équations, on regarde comme arbitraires les trois quantités α, β, γ, on aura une solution particulière de la proposée, ce dont il est facile de s'assurer par la différenciation.

Quoique les deux équations *(B)*, *(C)*, soient complétées par trois arbitraires, on va voir cependant qu'elles ne sont pas encore l'intégrale complète de l'équation *(A)*.

L'équation *(B)* est celle du plan tangent à la sphère pour un point de contact, dont les coordonnées, dans les sens des x & y, sont respectivement α, β: si l'on fait $\beta = \varphi\alpha$, on détermine le point de contact à être placé sur une certaine courbe, dont la projection sur le plan des x, y, a pour équation $y = \varphi x$; & l'équation du plan tangent devient

$$(D)\quad \alpha x + y\varphi\alpha + z\sqrt{[a^2 - \alpha^2 - (\varphi\alpha)^2]} = a^2.$$

Si l'on considère deux plans tangens consécutifs, ces plans se couperont suivant une droite tangente à la sphère, & on aura la seconde équation de cette droite, en différenciant celle du plan par rapport au paramètre variable α; ainsi les deux équations de cette droite seront

$$(D)\quad \alpha x + y\varphi\alpha + z\sqrt{[a^2 - \alpha^2 - (\varphi\alpha)^2]} = a^2,$$

$$(E)\quad x + y\varphi'\alpha - z\,\frac{\alpha + \varphi\alpha\,\varphi'\alpha}{\sqrt{[a^2 - \alpha^2 - (\varphi\alpha)^2]}} = 0;$$

& parce que la droite, à laquelle appartiennent ces deux équations, est tangente à la sphère, il s'ensuit qu'elles satisfont à la proposée. Mais si l'on considère la suite de tous les plans qui touchent la sphère dans les points pris sur la courbe, on aura une suite de droites comme la précédente, & ces droites prises deux à deux consécutivement se couperont, puisqu'elles seront deux à deux dans un même plan tangent; donc elles seront les tangentes d'une même courbe à double courbure; & les équations de cette courbe à double courbure seront l'intégrale complète de la proposée. Or il est évident que, pour avoir les équations de cette courbe à double courbure, il faut différencier les équations *(D)*, *(E)*, de la droite, par rapport au paramètre variable α; de plus l'équation *(E)* étant déjà la différentielle de *(D)* prise de cette manière, il suffira de différencier *(E)*: donc en faisant, pour abréger,

$$a^2 - \alpha^2 - (\varphi\alpha)^2 = (\psi\alpha)^2,$$

l'intégrale complète de la proposée sera le système des quatre équations simultanées

$$\begin{array}{ll} (D) & \alpha x + y\varphi\alpha + z\psi\alpha = a^2, \\ (E) & x + y\varphi'\alpha + z\psi'\alpha = 0, \\ (F) & y\varphi''\alpha + z\psi''\alpha = 0, \\ & \alpha^2 + (\varphi\alpha)^2 + (\psi\alpha)^2 = a^2, \end{array}$$

dans lesquelles φ & ψ sont des fonctions arbitraires; de ces quatre équations la dernière est destinée à l'élimination actuelle de la fonction surabondante; & *(E)*, *(F)*, sont les différences première & seconde de *(D)*, prises en regardant α comme seule variable. L'élimination d'une des fonctions étant faite, l'intégrale sera le résultat de l'élimination de α entre les trois équations *(D)*, *(E)*, *(F)*.

Il est facile de vérifier ce résultat par la différenciation, comme ceux des deux exemples précédens.

Dans mon Mémoire sur les développées des courbes à double courbure *(Tome X des Savans étrangers)*, j'ai donné le nom d'*Arrête de rebroussement* à la courbe touchée par toutes les droites qui constituent une surface développable; d'après cela, l'équation dont il s'agit ici appartient à l'arrête de rebroussement d'une surface quelconque développable circonscrite à la sphère.

VI.

LES trois exemples que je viens de rapporter suffisent pour faire voir, 1.° que les équations aux différences ordinaires à trois variables élevées, & qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité, ne sont pas absurdes, mais qu'elles expriment des propriétés réelles; 2.° que ces équations sont susceptibles d'une véritable intégration, & que leurs lieux sont des courbes à double courbure qui ne peuvent être exprimées que par le système de deux équations simultanées, les autres équations, quand leur nombre est plus grand que deux, étant destinées à éliminer des indéterminées, ou des fonctions surabondantes; 3.° que les intégrales de ces équations différentielles doivent être complétées par une fonction arbitraire, ce que les Géomètres ne s'étoient encore permis que pour les intégrales des équations aux différences partielles.

Ces considérations ouvrent un nouveau champ à l'analyse & à la géométrie, & elles donnent lieu à un calcul intégral qui mérite l'attention des Géomètres, car on verra dans la suite que l'intégration des équations aux différences partielles élevées, ne dépend que de ce genre de calcul.

Je vais exposer quelques résultats d'une assez grande généralité.

VII.

THÉORÈME I. L'intégrale complète de l'équation aux différences ordinaires à trois variables,

$$(A) \quad F\left(\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}\right) = 0,$$

dans laquelle les variables elles-mêmes n'entrent pas, & où F est une fonction quelconque de deux quantités, algébrique ou transcendante, déterminée ou arbitraire, est le résultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les trois équations suivantes,

$$(B) \quad F\left(\frac{x-\alpha}{z}, \frac{y-\phi\alpha}{z}\right) = 0,$$

$$(C) \quad \left(\frac{dF}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$(D) \quad \left(\frac{ddF}{d\alpha^2}\right) = 0,$$

dans lesquelles F est la même fonction de deux quantités que celle de la proposée, & où φ est une fonction arbitraire.

Pour le démontrer, il faut observer que les différentielles des deux équations (B), (C), par rapport à l'indéterminée α ont lieu, & que par conséquent on peut différencier ces équations en regardant α comme constante, ce qui, en faisant pour abréger

$$\frac{x-\alpha}{z} = m, \quad \frac{y-\varphi\alpha}{z} = n,$$

donne

$$\left(\frac{dF}{dm}\right) dm + \left(\frac{dF}{dn}\right) dn = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} \left[\left(\frac{ddF}{dm^2}\right) + \left(\frac{ddF}{dm\,dn}\right)\varphi'\alpha\right] dm \\ + \left[\left(\frac{ddF}{dm\,dn}\right) + \left(\frac{ddF}{dn^2}\right)\varphi'\alpha\right] dn \end{array}\right\} = 0;$$

or ces deux dernières équations ne peuvent pas subsister indépendamment de la valeur de la fonction F, à moins que l'on n'ait en même-temps les deux équations suivantes $dm = 0$, $dn = 0$, ou

$$\frac{x-\alpha}{z} = \frac{dx}{dz},$$

$$\frac{y-\varphi\alpha}{z} = \frac{dy}{dz};$$

donc éliminant α & $\varphi\alpha$ de l'équation (B), au moyen des deux dernières, on aura la proposée

$$F\left(\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}\right) = 0.$$

VIII.

L'ÉQUATION $dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2)$ de l'*article III*, est dans le cas du théorème précédent, car elle peut être mise sous la forme

$$a^2\left(\frac{dx^2}{dz^2}+\frac{dy^2}{dz^2}\right)-1=0;$$

aussi nous avons vu que son intégrale complète est le résultat de l'élimination de l'indéterminée α entre l'équation suivante,

$$a^2\left[\left(\frac{x-\alpha}{z}\right)^2+\left(\frac{y-\varphi\alpha}{z}\right)^2\right]-1=0,$$

& ses deux différentielles première & seconde, prises en regardant α comme seule variable.

I X.

Théorème II. Les trois quantités X, Y, Z, étant composées chacune des trois variables x, y, z, l'intégrale complète de l'équation aux différences ordinaires du premier ordre,

$$F\left(\frac{dX}{dZ},\ \frac{dY}{dZ}\right)=0,$$

est le résultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les trois équations suivantes,

$$F\left(\frac{X-\alpha}{Z},\ \frac{Y-\varphi\alpha}{Z}\right)=0,$$

$$\left(\frac{dF}{d\alpha}\right)=0,$$

$$\left(\frac{ddF}{d\alpha^2}\right)=0,$$

dans lesquelles la fonction F est la même que celle de la proposée, & où φ est une fonction arbitraire.

Ce théorème se démontre comme le précédent.

X.

L'Équation

$$z^2(dx^2+dy^2+dz^2)=a^2(dx^2+dy^2)$$

de l'*article IV*, est dans le cas du dernier théorème, car on peut le mettre sous la forme

$$\frac{z^2 dz^2}{a^2 - z^2} = dx^2 + dy^2,$$

ou ſous la ſuivante,

$$[d\sqrt{(a^2 - z^2)}]^2 = dx^2 + dy^2:$$

auſſi nous avons vu que ſon intégrale complète eſt le réſultat de l'élimination de l'indéterminée α entre l'équation

$$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2 - z^2} + \frac{(y - \varphi\alpha)^2}{a^2 - z^2} = 1,$$

& ſes différentielles, première & ſeconde, priſes en regardant α comme ſeule variable.

X I.

Il ſuit de tout ce qu'on vient de voir, que ſi l'on conçoit une ſurface courbe dont l'équation $M = 0$, outre les trois coordonnées x, y, z, renferme encore un paramètre variable α, & une fonction arbitraire de ce paramètre, repréſentée par $\varphi\alpha$; & que ſi l'on imagine toutes les ſurfaces courbes différentes que l'on obtiendroit en donnant ſucceſſivement à α toutes les valeurs poſſibles, & en ſuppoſant que la forme de la fonction φ ſoit invariable, deux quelconques de ces ſurfaces, priſes conſécutivement, ſe couperont en une courbe, dont les équations ſeront

$$(A) \qquad M = 0,$$

$$(B) \qquad \left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0;$$

la ſuite de ces courbes d'interſection compoſera une ſurface courbe qui ſera l'enveloppe de toutes les premières, & on aura l'équation finie de cette enveloppe, en x, y, z, en éliminant le paramètre variable α entre les deux équations (A), (B); mais cette élimination n'eſt pas poſſible en général, parce que la fonction φ eſt arbitraire.

De plus, ſi l'on conſidère les courbes d'interſection dont la ſuite compoſe l'enveloppe, deux quelconques de ces courbes, prifes confécutivement, fe couperont en un certain point dont les coordonnées feront déterminées par les trois équations

$$(A) \qquad M = 0,$$

$$(B) \quad \left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$(C) \quad \left(\frac{ddM}{d\alpha^2}\right) = 0;$$

& la fuite de ces points compofera une courbe à double courbure, dont on auroit les deux équations finies, en éliminant le paramètre α entre les trois équations *(A)*, *(B)*, *(C)*. La courbe à double courbure dont il s'agit ici, non-feulement touche toutes les furfaces poffibles comprifes dans l'équation $M = 0$, mais encore chacun de fes élémens fe trouve fur trois de ces furfaces prifes confecutivement; enfin cette courbe eft la limite de l'enveloppe.

Pour avoir l'équation différentielle de l'enveloppe, délivrée de la fonction arbitraire φ, il faut différencier l'équation *(A)*, & par rapport à x & par rapport à y, en regardant α & $\varphi\alpha$ comme conftantes dans ces deux cas, ce qui eft permis à caufe de l'équation *(B)*; on aura donc alors les trois équations

$$M = 0,$$

$$\left(\frac{dM}{dx}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = 0;$$

entre lefquelles, éliminant les deux quantités α & $\varphi\alpha$, on aura une équation aux différences partielles, $V = 0$, qui appartiendra à l'enveloppe, indépendamment de la forme de la fonction φ qui a difparu, c'eft-à-dire, qui appartiendra à toutes les enveloppes que l'on auroit en donnant, dans $M = 0$, à la fonction φ, fucceffivement toutes les formes poffibles.

Quant à la limite, nous avons déjà vu que pour avoir fon équation il faut différencier aux différences ordinaires les deux équations *(A)*, *(B)*, en regardant α & $\varphi\alpha$ comme conftantes, ce qui eft permis en vertu des équations *(B)* *(C)*, & éliminer entre les quatre équations

$$(A) \qquad M = 0,$$

$$(B) \quad \left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$d(A) \qquad dM = 0,$$

$$d(B) \quad d.\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$

les trois quantités α, $\varphi\alpha$, $\varphi'\alpha$, ce qui produit une équation $U = 0$ du premier ordre, aux différences ordinaires élevées à trois variables, & pour laquelle la condition d'intégrabilité n'eft pas fatisfaite.

XII.

ACTUELLEMENT les deux équations

$$V = 0,$$

$$U = 0$$

dont la première eft aux différences partielles, & dont la feconde eft aux différences ordinaires, font telles, que l'une quelconque étant donnée, il eft toujours facile d'obtenir l'autre fans connoître leurs équations intégrales.

1.° Étant donnée l'équation aux différences partielles, $V = 0$, fi l'on fubftitue pour p ou pour q fa valeur prife dans $dz = pdx + qdy$ (fuppofons que ce foit la valeur de p que l'on fubftitue), on aura une équation $V' = 0$, compofée des variables x, y, z, de leurs différences ordinaires dx, dy, dz, & de la quantité q; & le réfultat de l'élimination de la quantité q entre les deux équations

$$V' = 0,$$

$$\left(\frac{dV'}{dq}\right) = 0,$$

donnera l'équation aux différences ordinaires $U = 0$.

2.° Réciproquement, étant donnée $U = 0$, fi l'on fubftitue pour dz sa valeur $p\,dx + q\,dy$, on aura une équation $U' = 0$, composée des variables x, y, z, des différences partielles p, q, & de la quantité $\frac{dy}{dx}$. Je représente cette dernière quantité par ω; cela posé, le résultat de l'élimination de ω entre les deux équations

$$U' = 0,$$

$$\left(\frac{dU'}{d\omega}\right) = 0,$$

donnera l'équation aux différences partielles $V = 0$.

Par exemple, dans l'*article III*, l'équation $M = 0$ est

$$(x - \alpha)^2 + (y - \varphi\alpha)^2 = \frac{z^2}{a^2},$$

& les deux équations $V = 0$, $U = 0$, sont

$$p^2 + q^2 = a^2,$$

$$dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2).$$

La première de ces deux équations étant posée, pour avoir la seconde, il faut substituer pour p sa valeur $\frac{dz - q\,dy}{dx}$, ce qui donne

$$q^2(dx^2 + dy^2) - 2q\,dy\,dz + dz^2 - a^2dx^2 = 0;$$

différencier cette dernière équation en regardant q comme seule variable, ce qui donne

$$q(dx^2 + dy^2) = dy\,dz,$$

en vertu de laquelle la précédente devient

$$q\,dy\,dz = dz^2 - a^2dx^2;$$

& éliminant q entre les deux dernières, on trouve l'équation aux différences ordinaires

$$dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2).$$

Réciproquement étant donnée l'équation

$$dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2),$$

pour trouver l'équation aux différences partielles, il faut ſubſtituer pour dz ſa valeur $p\,dx + q\,dy$, ce qui, en faiſant $\frac{dy}{dx} = \omega$, donne

$$\omega^2 (q^2 - a^2) + 2\omega pq + p^2 - a^2 = 0;$$

différencier cette équation en regardant ω comme ſeule variable, ce qui donne

$$\omega (q^2 - a^2) + pq = 0,$$
$$\omega pq + p^2 - a^2 = 0;$$

& éliminant ω, on trouve l'équation aux différences partielles

$$p^2 + q^2 = a^2.$$

XIII.

POUR démontrer en général la propoſition de l'*article précédent*, je ferai d'abord remarquer que le réſultat de l'élimination des deux quantités α, β, entre les trois équations

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0,$$
$$\left(\frac{d.\varphi(\alpha,\beta)}{d\alpha}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{d.\varphi(\alpha,\beta)}{d\beta}\right) = 0,$$

eſt le même que celui qu'on obtiendroit en éliminant d'abord α entre les deux équations

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0,$$
$$\left(\frac{d.\varphi(\alpha,\beta)}{d\alpha}\right) = 0,$$

ce qui donneroit un premier réſultat $\psi\beta = 0$; puis en éliminant β entre les deux équations

$$\psi\beta = 0,$$
$$d\left(\frac{\psi\beta}{d\beta}\right) = 0.$$

Cela poſé, l'équation aux différences ordinaires $U = 0$, eſt le réſultat de l'élimination des quantités α, $\varphi\alpha$, $\varphi'\alpha$ entre les quatre équations

$$M = 0,$$
$$dM = 0,$$
$$\frac{dM}{d\alpha} = 0,$$
$$\frac{ddM}{d\alpha^2} = 0;$$

ou bien si l'on représente par $k = 0$, le résultat de l'élimination de $\varphi\alpha$, entre les deux premières, l'équation $U = 0$, est alors le résultat de l'élimination de α, entre les deux équations

$$k = 0,$$
$$\left(\frac{dk}{d\alpha}\right) = 0.$$

Pareillement, l'équation aux différences partielles $V = 0$, est le résultat de l'élimination des quantités α, $\varphi\alpha$, dz entre les quatre équations

$$M = 0,$$
$$\left(\frac{dM}{dx}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{dM}{dy}\right) = 0,$$
$$dz = p\,dx + q\,dy;$$

ou bien, en représentant $\frac{dy}{dx}$ par ω, on aura l'équation $V = 0$, en éliminant d'abord $\varphi\alpha$ & dz entre les équations

$$M = 0,$$
$$dM = 0,$$
$$dz = p\,dx + q\,dy;$$

puis après avoir représenté le résultat par $k' = 0$, en éliminant α & ω entre les suivantes,

$$k' = 0,$$

$$\left(\frac{dk'}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dk'}{d\omega}\right) = 0;$$

& pour faire cette dernière opération, on peut, en vertu du lemme, éliminer d'abord α entre $k' = 0$, & $\left(\frac{dk'}{d\alpha}\right) = 0$, ce qui donnera un réſultat $k'' = 0$, & éliminer enſuite ω entre $k'' = 0$, & $\left(\frac{dk''}{d\omega}\right) = 0$.

Or l'équation $k' = 0$ étant le réſultat de l'élimination de dz entre $k' = 0$, & $dz = pdx + qdy$, le réſultat de l'élimination de α entre $k' = 0$, & $\left(\frac{dk'}{d\alpha}\right) = 0$, ſera le même que celui de l'élimination de dz entre

$$U = 0,$$

$$\& \; dz = pdx + qdy;$$

donc on aura l'équation $V = 0$, en éliminant d'abord dz entre ces deux dernières équations, ce qui donnera un réſultat $k'' = 0$, & éliminant enſuite ω entre les deux ſuivantes

$$k'' = 0,$$

$$\left(\frac{dk''}{d\omega}\right) = 0;$$

ce qui eſt la première partie de la propoſition.

Quant à la ſeconde partie, il faut obſerver que puiſque l'équation $V = 0$, réſulte des deux ſuivantes

$$U = 0,$$

$$dz = pdx + qdy,$$

réciproquement l'équation $U = 0$ doit réſulter de ces deux-ci,

$$V = 0,$$

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

par l'élimination des deux quantités p, q: or l'élimination actuelle d'une de ces deux quantités étant faite, ce qui donne un résultat que je représente par $h = 0$, il ne reste aucune équation pour éliminer l'autre de ces quantités; donc, si c'est q qui reste, pour le faire disparoître, il faut l'éliminer entre les deux équations

$$h = 0,$$

$$\left(\frac{dh}{dq}\right) = 0;$$

ce qui est la seconde partie de la proposition.

XIV.

Nous avons vu (*XII*) que l'intégrale de l'équation aux différences partielles $V = 0$ est le résultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les deux équations

$$(A) \quad M = 0,$$

$$(B) \quad \left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0;$$

& que celle de l'équation aux différences ordinaires élevées $U = 0$, est le résultat de l'élimination de la même indéterminée α entre les trois suivantes,

$$(A) \quad M = 0,$$

$$(B) \quad \left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$(C) \quad \left(\frac{ddM}{d\alpha^2}\right) = 0:$$

il suit de-là, que des deux équations $V = 0$, $U = 0$, l'une quelconque étant proposée, si l'on connoît l'intégrale de l'autre, sous la forme que je viens de rapporter, on connoîtra aussi celle de la première ; c'est-à-dire, que si l'on connoît l'intégrale de l'équation $U = 0$, & que cette intégrale soit sous la forme des trois équations (A), (B), (C), on aura celle de l'équation $V = 0$, en supprimant l'équation (C). Réciproquement étant connue l'intégrale de l'équation $V = 0$, sous la forme des deux équations (A), (B), on aura celle de l'équation $U = 0$, en combinant les deux équations (A), (B), avec la différentielle de (B) prise en regardant l'indéterminée α comme seule variable.

Ainsi le calcul intégral des équations aux différences ordinaires élevées, & celui des équations aux différences partielles sont absolument dépendans l'un de l'autre ; & de la perfection de l'une de ces espèces de calcul s'ensuivroit nécessairement celle de l'autre.

X V.

TOUT ce qui précède ne présenteroit qu'un cercle inutile, si les formes des équations que l'on fait intégrer se correspondoient dans l'un & l'autre calcul ; mais je vais faire voir, par deux exemples, que certaines équations aux différences ordinaires, comprises dans les formes que j'ai traitées ci-dessus, correspondent à des équations aux différences partielles que l'on ne peut encore intégrer par aucune autre méthode, & réciproquement.

Exemple I. L'équation aux différences ordinaires

$$(U)\left\{\begin{array}{c}(x\,dy - y\,dx)^2 \\ +\,(y\,dz - z\,dy)^2 \\ +\,(z\,dx - x\,dz)^2\end{array}\right\} = a^2\,(dx^2 + dy + dz^2),$$

dont j'ai trouvé l'intégrale par des considérations géométriques, & qui appartient aux arrêtes de rebroussement de toutes les surfaces développables circonscrites à la même sphère, n'est comprise dans aucune des formes générales dont j'ai donné les intégrales ; mais si l'on substitue pour

dz sa valeur $p\,dx + q\,dy$, & qu'ensuite on élimine $\frac{dy}{dx}$ au moyen de la différentielle, prise en regardant $\frac{dy}{dx}$ comme seule variable, l'équation aux différences partielles que l'on obtiendra, sera

$$z - px - qy = a^2 \sqrt{(1 + p^2 + q^2)},$$

qui appartient à toutes les surfaces développables circonscrites à la même sphère. Or cette équation est comprise dans celles que M. de la Grange a intégrées, & en faisant, pour abréger

$$z - \alpha x - \varphi\alpha . y - a^2 \sqrt{[1 + \alpha^2 + (\varphi\alpha)^2]} = M,$$

son intégrale est le résultat de l'élimination de α entre les deux équations suivantes:

$$M = 0,$$
$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0;$$

donc l'intégrale de l'équation aux différences ordinaires (U), est le résultat de l'élimination de la même indéterminée α entre les trois équations

$$M = 0,$$
$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{ddM}{d\alpha^2}\right) = 0.$$

Exemple II. Réciproquement l'équation aux différences partielles

$$(V)\quad \left\{ \begin{aligned} & bx^2(z + px - qy)^2 \\ + & aby^2(z - px + qy)^2 \\ + & az(z + px + qy)^2 \end{aligned} \right\} = 0,$$

ne peut s'intégrer par aucune des méthodes connues; mais si l'on substitue pour p sa valeur prise dans $dz = pdx + qdy$, & qu'après avoir différencié en regardant q comme seule variable, on élimine q, on aura

$$(xdz + zdx)^2 + a(zdy + ydz)^2 + b(xdy + ydz)^2 = 0,$$

équation aux différences ordinaires élevées, comprise dans dans le cas du *théorème III*, & dont l'intégrale, en faisant, pour abréger,

$$\left(\frac{xz - \alpha}{xy}\right)^2 + a\left(\frac{yz - \varphi\alpha}{xy}\right)^2 + b = M,$$

est le résultat de l'élimination de α entre les trois équations

$$M = 0,$$
$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{ddM}{d\alpha^2}\right) = 0;$$

donc l'intégrale de l'équation aux différences partielles *(V)*, est le résultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les deux premières seulement de ces trois équations, c'est-à-dire, entre

$$M = 0$$
$$\& \left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0.$$

XVI.

JUSQU'ICI il n'a été question, dans ce Mémoire, que des équations aux différences ordinaires élevées; mais les équations aux différences ordinaires linéaires à trois variables, & qui ne satisfont pas aux anciennes conditions d'intégrabilité, ne sont pas absurdes, elles appartiennent de même toutes à des courbes à double courbure, & elles sont toutes susceptibles d'une véritable intégration; enfin la la recherche de leur intégrale ne dépend que de l'intégration d'une équation aux différences ordinaires à deux variables.

En effet, soit

$$(A) \qquad L dx + M dy + N dz = 0,$$

une équation aux différences ordinaires, linéaire, & qui ne satisfasse pas à la condition d'intégrabilité; d'après ce ce qu'on vient de voir sur les équations élevées, on mettra pour dz sa valeur $p dx + q dy$, ce qui donnera

$$(L + Np) dx + (M + Nq) dy = 0;$$

puis, après avoir différencié cette équation, en ne faisant varier que $\frac{dy}{dx}$, on éliminera $\frac{dy}{dx}$, ce qui se réduit à égaler à zéro les coéfficiens de dx & dy, & l'on aura les deux équations simultanées,

$$(B) \qquad L + Np = 0,$$

$$(C) \qquad N + Nq = 0.$$

Cela fait, on intégrera ou l'une ou l'autre de ces deux équations, en regardant comme constante la variable qui n'a pas varié dans la différence partielle; par exemple, on intégrera la première,

$$L dx + N dz = 0,$$

en regardant y comme constante, & on complétera l'intégrale par une fonction arbitraire de y; enfin on substituera dans (C) pour q sa valeur tirée de l'intégrale, ce qui produira une seconde équation sans différentielles; & ces deux équations appartiendront à la courbe à double courbure, qui est le lieu de la proposée.

XVII.

EXEMPLE I. Soit proposé d'intégrer l'équation

$$(A) \qquad dz = xy\,(x\,dx + y\,dy).$$

Les deux équations aux différences partielles sont, pour ce cas,

$$(B) \qquad p = x^2 y,$$
$$(C) \qquad q = xy^2,$$

l'intégrale de la première est

$$z = \frac{x^3 y}{3} + \varphi y;$$

φ étant une fonction arbitraire; je la différencie en regardant y comme seule variable, ce qui donne

$$q = \frac{x^3}{3} + \varphi' y;$$

& substituant pour q cette valeur dans (C), je trouve

$$xy^2 = \frac{x^3}{3} - \varphi' y;$$

donc l'intégrale de la proposée est le système des deux équations simultanées,

$$z = \frac{x^3 y}{3} + \varphi y$$
$$xy^2 = \frac{x^3}{3} + \varphi' y.$$

Cette intégrale peut être mise sous une autre forme, car les deux équations (B), (C), peuvent être remplacées par les suivantes,

$$py - qx = 0,$$
$$p = x^2 y.$$

Or l'intégrale de la première est $z = \varphi\,(x^2 + y^2)$; &

pour que la seconde soit satisfaite, il faut que l'on ait $xy = z\varphi'(x^2 + y^2)$; donc l'intégrale complète de la proposée est encore le système des deux équations simultanées,

$$z = \varphi(x^2 + y^2),$$
$$xy = z\varphi'(x^2 + y^2),$$

ce qu'il est facile de vérifier par la différenciation. Ainsi la proposée appartient à une courbe à double courbure tracée sur une surface quelconque de révolution, l'axe coïncidant avec la ligne des z; mais la projection de cette courbe sur le plan perpendiculaire à l'axe, dépend de la courbe génératrice, d'une manière énoncée par la seconde des deux équations intégrales.

XVIII.

Exemple II. Soit proposé d'intégrer

$$(A) \qquad dz = xy(dx - dy).$$

Les deux équations aux différences partielles deviennent

$$(B) \qquad p = xy,$$
$$(C) \qquad q = -xy;$$

l'intégrale de la première est $z = \frac{x^2 y}{2} + \varphi y$, & pour que l'équation (C) soit satisfaite, il faut que l'on ait

$$xy + \frac{x^2}{2} + \varphi' y = 0;$$

donc l'intégrale de l'équation (A) est le système des deux équations simultanées

$$z = \frac{x^2 y}{2} + \varphi y,$$
$$xy + \frac{x^2}{2} + \varphi' y = 0.$$

Autrement, les deux équations (B), (C), peuvent être remplacées par les deux suivantes,

$$p + q = 0,$$
$$p = xy.$$

L'intégrale de la première eſt

$$z = \varphi\,(x - y);$$

& pour que la ſeconde ſoit ſatisfaite, il faut que l'on aît

$$xy = \varphi'\,(x - y);$$

donc l'intégrale complète de la propoſée eſt encore le ſyſtème des deux équations ſimultanées

$$z = \varphi\,(x - y),$$
$$xy = \varphi'\,(x - y),$$

c'eſt-à-dire, que la propoſée (A) appartient à une courbe à double courbure, tracée ſur une ſurface cylindrique à baſe quelconque, les droites de la ſurface étant parallèles à la droite qui partage en deux parties égales l'angle formé par les axes des x & des y; mais la projection de la courbe ſur le plan des x, y, dépend de la baſe de la ſurface cylindrique, d'une manière exprimée par la ſeconde des deux équations intégrales.

XIX.

Si le nombre des variables étoit plus grand que trois, on ſe comporteroit d'une manière analogue, c'eſt-à-dire, qu'on ſubſtitueroit d'abord pour dz ſa valeur

$$p\,du + q\,dx + r\,dy \ldots\ldots \&c.$$

& qu'enſuite, pour éliminer $\frac{dx}{du}$, $\frac{dy}{du}$ ..... &c. on différencieroit le réſultat, en regardant chacune de ces quantités comme seule variable, ce qui produiroit un nombre d'équations suffisant pour l'élimination ; & alors on auroit des équations aux différences partielles, que l'on traiteroit comme celles des deux cas précédens.

Exemple III. Soit proposé d'intégrer

$$u\,du + y\,dx + z\,dy + x\,dz = 0.$$

Je substitue pour dz sa valeur, & je trouve

$$(u + px)du + (y + qx)dx + (z + rx)dy = 0;$$

je différencie, en regardant $\frac{dx}{du}$, $\frac{dy}{du}$, chacune en particulier, comme seule variable, & j'élimine ces deux quantités; ce qui, dans le cas où toutes les différences sont linéaires, se réduit à égaler à zéro les coéfficiens de du, dx, dy, & j'obtiens les trois équations aux différences partielles,

$$u + px = 0,$$
$$y + qx = 0,$$
$$z + rx = 0.$$

L'intégrale de la première est

$$xz + u^2 = \varphi(x, y),$$

φ étant une fonction de deux quantités ; & pour que les deux autres équations soient satisfaites, il faut que l'on ait

$$y + \varphi'(x, y) = 0,$$
$$z + \varphi''(x, y) = 0,$$

φ' & φ'' étant les coéfficiens de dx & dy, dans la différentielle de la fonction φ ; donc, l'intégrale complète de la proposée est le système des trois équations simultanées

$$xz + u^2 = \varphi(x, y),$$
$$y = \varphi'(x, y),$$
$$z = \varphi''(x, y).$$

X X.

LE nombre des équations intégrales n'eſt pas toujours, comme dans le cas précédent, égal au nombre des variables diminué d'une unité.

Exemple IV. Soit propoſée l'équation

$$(A) \quad udu + xdx + xdy + zdz = 0.$$

On voit d'abord qu'on peut la réduire à trois termes, ſous la forme ſuivante:

$$udu + x(dx + dy) + zdz = 0,$$

dont l'intégrale eſt évidemment le ſyſtème des deux équations ſimultanées

$$u^2 + z^2 + \varphi(x + y) = 0,$$
$$2x - \varphi'(x + y) = 0.$$

Ainſi toutes les fois que la propoſée ſera ſuſceptible d'être réduite à trois termes, ſon intégrale ne contiendra pas plus de deux équations; mais dans tous les cas où elle ſera ſuſceptible de cette forme, il ne ſera pas toujours auſſi facile que dans cet exemple ſimple, de l'y ramener; alors, en opérant comme dans l'*article XX,* le calcul indiquera la réduction des équations. En effet, ſi dans la propoſée on met pour dz ſa valeur $pdu + qdx + rdy$, on aura les trois équations aux différences partielles,

$$u + pz = 0,$$
$$x + qz = 0,$$
$$x + rz = 0;$$

l'intégrale de la première eſt

$$(E) \quad z^2 + u^2 = \varphi(x, y),$$

φ étant ſuppoſée une fonction de deux quantités; & pour que les deux autres ſoient ſatisfaites, il faut que l'on ait

$$(F) \qquad -2x = \varphi'(x, y),$$
$$(G) \qquad -2x = \varphi''(x, y),$$

φ' & φ'' étant les coéfficiens de dx & dy dans la différentielle de $\varphi(x, y)$.

Mais les deux équations (F), (G), étant entre les deux mêmes variables x & y, il s'enfuit que la fonction φ, qui étoit regardée comme composée de deux quantités, n'eft composée que d'une feule; car fi l'on fait

$$\varphi(x, y) = z', \ \& \ dz' = p'dx + q'dy,$$

les équations (F), (G), deviennent

$$(F') \quad -2x = p',$$

$$(G') \quad -2x = q',$$

ce qui donne $p' - q' = 0$, & par conféquent

$$z' = \psi(x + y),$$

ψ étant une fonction arbitraire de la feule quantité $x + y$; donc l'équation (E) deviendra

$$z^2 + u^2 = \psi(x + y),$$

& une des deux équations (F') ou (G') fera employée: & pour que l'autre foit fatisfaite, il faudra que l'on ait

$$-2x = \psi'(x + y);$$

donc l'intégrale de la propofée (A) eft le fyftème des deux dernières équations prifes fimultanément, comme on l'avoit trouvée d'abord.

Conclusion.

Les équations aux différences ordinaires, foit élevées, foit linéaires, qui ne fatisfont pas aux conditions d'intégrabilité, ne renferment rien d'abfurde, fi l'on entend par-là qu'elles expriment des propriétés impoffibles, imaginaires....; elles énoncent toutes des propriétés réelles, & elles font fufceptibles d'une véritable intégration en quantités finies. Ce qu'il y avoit d'abfurde, c'étoit que leurs intégrales puffent être exprimées par une feule équation; par exemple, pour le cas de trois variables, il étoit abfurde que l'équation appartînt à une furface courbe, ce que l'on fuppofoit tacitement; dans ce cas elle appartient à une courbe à double courbure, qui peut être déterminée par une seule équation différentielle, mais qui ne peut être exprimée en quantités finies, que par le système de deux équations simultanées.

Des Équations aux différences ordinaires élevées du second ordre, & pour un nombre de variables plus grand que deux.

X X I.

DANS le Mémoire que j'ai donné sur les développées des courbes à double courbure, imprimé parmi ceux des Savans étrangers, *tome X*, j'ai fait voir, 1.° que, quoique chaque courbe eût un nombre infini de développées, elle n'avoit cependant, pour chacun de ses points, qu'un seul rayon de courbure; 2.° que lorsque la courbe étoit à double courbure, la suite des centres de courbure formoit une ligne courbe qui n'étoit pas une des développées; 3.° que x, y, z, étant les coordonnées rectangulaires d'un point de la courbe, l'expression du carré du rayon de courbure pour ce point, en ne faisant nulle aucune différence seconde, étoit

$$(dx^2 + dy^2 + dz^2)^3 : \begin{cases} (dxddy - dyddx)^2, \\ + (dzddx - dxddz)^2, \\ + (dyddz - dzddy)^2. \end{cases}$$

Si donc on vouloit avoir l'équation différentielle de toutes les courbes à double courbure, dont le rayon de courbure est constant, il faudroit égaler l'expression précédente à une constante a, ce qui donneroit

$$(A)\ (dx^2 + dy^2 + dz^2)^3 = a^2 \begin{cases} (dxddy - dyddx)^2, \\ + (dzddx - dxddz)^2, \\ + (dyddz - dzddy)^2; \end{cases}$$

équation élevée, du genre de celles que l'on regarde ordinairement comme absurdes, & qui cependant exprime une

une propriété réelle, & qui eſt ſuſceptible d'une véritable intégration, même en quantités finies.

XXII.

D'ABORD il eſt évident que tous les cercles dont le rayon eſt a, quelles que ſoient d'ailleurs leurs poſitions dans l'eſpace, doivent ſatisfaire à cette équation; or les équations d'un cercle placé d'une manière quelconque dans l'eſpace, ſont

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = a^2,$$
$$x - \alpha + (y - \beta)\varepsilon + (z - \gamma)\eta = 0,$$

α, β, γ, étant les coordonnées du centre, & ε, η, déterminant les deux directions du plan du cercle; donc, ſi dans ces deux équations on regarde les cinq quantités α, β, γ, ε, η, comme des conſtantes arbitraires, elles ſatisferont à l'équation aux différences ordinaires du ſecond ordre (A); ce qu'il eſt facile de vérifier par la différenciation; car ſi l'on différencie aux différences ordinaires, premières & ſecondes, chacune de ces équations, on aura en tout ſix équations, entre leſquelles éliminant les cinq conſtantes arbitraires, on trouvera l'équation (A). Mais quoique les équations au cercle contiennent cinq arbitraires, elles ne ſont encore qu'un cas particulier de l'intégrale complète; car les angles que les élémens conſécutifs de la circonférence du cercle font entr'eux, ſont égaux & dans un même plan, & l'on peut concevoir une courbe telle que ces angles, ſans ceſſer d'être égaux, ſoient dans des plans perpétuellement différens: les équations de cette courbe ſatisferoient à l'équation (A), puiſque ſon rayon de courbure ſeroit conſtant; & elles ne ſeroient pas compriſes dans celle du cercle, puiſque la courbe ſeroit à double courbure.

Les trois coordonnées rectangulaires de la courbe que l'on conſidère étant x, y, z, ſoient α, β, γ, les coordonnées reſpectives du centre de courbure qui correſpond à ce point; de plus ſoient $\beta = \varphi\alpha$, $\gamma = \psi\alpha$, les équations de la courbe qui paſſe par tous les centres de courbure, φ & ψ, étant deux fonctions de α. Cela poſé, la longueur du rayon de courbure devant être égale à une conſtante a, on aura d'abord

$$(B)\quad (x - \alpha)^2 + (y - \varphi\alpha)^2 + (z - \psi\alpha)^2 = a.$$

Puis, dans toute courbe à double courbure, les diſtances d'un même centre quelconque de courbure aux trois points conſécutifs de la courbe, dont il eſt le centre, ſont toujours égales entr'elles; donc la diſtance du point de la courbe au centre de courbure correſpondant ne change pas, lorſqu'on fait varier deux fois de ſuite l'ordonnée α; donc les différences première & ſeconde de l'équation (B), priſes en regardant α comme ſeule variable, doivent avoir lieu; donc on aura encore

$$(C)\quad x - \alpha + (y - \varphi\alpha)\varphi'\alpha + (z - \psi\alpha)\psi'\alpha = 0,$$

$$(D)\quad \left\{\begin{array}{c} -1 - (\varphi'\alpha)^2 - (\psi'\alpha)^2 \\ + (y - \varphi\alpha)\varphi''\alpha + (z - \psi\alpha)\psi''\alpha \end{array}\right\} = 0.$$

La conſidération qui vient de fournir les dernières équations eſt générale, & elle appartient à toutes les courbes à double courbure; mais la courbe dont il s'agit, a cela de particulier, que ſon rayon de courbure étant conſtant, la diſtance du même centre de courbure à quatre points conſécutifs de la courbe eſt toujours la même; donc la diſtance du point de la courbe au centre de courbure ne change pas encore, lorſqu'on fait varier une troiſième fois l'ordonnée; donc la différence troiſième de l'équation (B), priſe en regardant α comme ſeule variable, doit encore avoir lieu; donc on aura la quatrième équation

$$(E)\quad \left\{\begin{array}{c} - 3\varphi'\alpha\varphi''\alpha - 3\psi'\alpha\psi''\alpha \\ + (y - \varphi\alpha)\varphi'''\alpha + (z - \psi\alpha)\psi'''\alpha \end{array}\right\} = 0.$$

Ainſi, en repréſentant l'équation *(B)* par $M = 0$, le ſyſtème des quatre équations ſimultanées,

$$(B) \quad M = 0,$$

$$(C) \quad \left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$(D) \quad \left(\frac{ddM}{d\alpha^2}\right) = 0,$$

$$(E) \quad \left(\frac{d^3M}{d\alpha^3}\right) = 0,$$

appartient à la courbe dont le rayon de courbure eſt conſtant & $= a$, & il exprime la même choſe que l'équation aux différences ſecondes ordinaires *(A)*.

Les quatre équations que je viens de trouver ſeroient l'intégrale finie de l'équation *(A)*, ſi leur nombre n'excédoit pas celui des variables x, y, z; mais, entre ces quatre équations, on peut éliminer x, y, z, & il reſte entre α, $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$, une équation de condition qui doit être ſatisfaite, pour que les trois équations employées à l'élimination ſoient l'intégrale demandée.

Il réſulte au moins de-là que les fonctions φ & ψ ne doivent pas être toutes deux arbitraires; & que l'une des deux étant priſe à volonté, la forme de l'autre s'enſuit, pour que la courbe dont les équations ſont $\beta = \varphi\alpha$, $\gamma = \psi\alpha$, paſſe par les centres de courbure d'une courbe dont la courbure eſt conſtante. De plus, ſi l'on élimine les coordonnées x, y, z, l'équation réſultante eſt en α, $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$, préciſément la même que l'équation *(A)* en x, y, z, ce qui tient à une propriété remarquable des courbes de courbure conſtante, & que nous expoſerons bientôt.

XXIII.

QUOIQUE les quatre équations *(B)*, *(C)*, *(D)*, *(E)*, ne préſentent qu'un réſultat différentiel, leur conſidération conduit cependant à l'intégrale première de l'équation *(A)*. En effet si, de ces quatre équations, on différencie les deux premières, en regardant α comme constante, ce qui est permis en vertu de la seconde & de la troisième; & qu'entre les quatre équations *(B)*, *(C)*, $d(B)$, $d(C)$, on élimine les fonctions φ, φ', on aura les deux équations

$$(b) \quad (x - \alpha)^2 (dy^2 + dx^2) + 2(x - \alpha)(z - \psi\alpha) dx dz + (z - \psi\alpha)^2 (dy^2 + dz^2) = a^2 dy^2,$$

$$(c) \quad (x - \alpha)(dy^2 + dx^2) + [(x - \alpha)\psi'\alpha + (z - \psi\alpha)] dx dz + (z - \psi\alpha)\psi'\alpha (dy^2 + dz^2) = 0.$$

Puis, après avoir pris dans l'équation $d.(B)$, la valeur de $\varphi'\alpha$, qui est $\varphi'\alpha = -\frac{\psi'\alpha dz + dx}{dy}$, si on la différencie en regardant α comme constante, ce qui est encore permis, en vertu de l'équation *(E)*, on trouvera

$$\varphi''\alpha = -\frac{dz}{dy}\psi''\alpha.$$

Enfin substituant cette valeur de $\varphi''\alpha$ dans *(D)*, on aura la troisième équation

$$(d) \quad -(dx^2 + dy^2) - (dy^2 + dz^2)(\psi'\alpha)^2 - 2 dx dz \psi'\alpha + (x - \alpha)\psi''\alpha dx dz + (z - \psi\alpha)\psi''\alpha (dy^2 + dz^2) = 0;$$

les trois équations *(b)*, *(c)*, *(d)*, sont le résultat de l'élimination de la fonction φ & de ses différences entre les quatre équations *(B)*, *(C)*, *(D)*, *(E)*, & celles de leurs différentielles que l'on a pu prendre en regardant α comme constante.

Or, si l'on représente l'équation *(b)* par $N = 0$, les équations *(c)*, *(d)* seront $\left(\frac{dN}{d\alpha}\right) = 0$, $\left(\frac{ddN}{d\alpha^2}\right) = 0$, ce quil est facile de reconnoître à l'inspection; donc une des intégrales, première & complète de l'équation *(A)*, aux différences ordinaires secondes, est le résultat de l'élimination de α entre les trois équations

$$(b) \qquad N = 0,$$

$$(c) \quad \left(\frac{dN}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$(d) \quad \left(\frac{ddN}{d\alpha^2}\right) = 0.$$

Il est facile de vérifier ce résultat par la différenciation, car si l'on différencie aux différences ordinaires les deux premières de ces équations, en regardant α comme constante, ce qui est permis en vertu de la seconde & de la troisième ; & qu'entre les quatre équations (b), (c), $d\,(b)$, $d\,(c)$, on élimine les trois quantités α, $\psi\alpha$, $\psi'\alpha$, le résultat de l'élimination sera l'équation (A) de l'*article XXII.*

XXIV.

Si, au lieu d'éliminer la fonction φ & ses différentielles φ', φ'' entre les équations (B), (C), $d\,(B)$, $d\,(C)$, on eût éliminé la fonction ψ & ses différentielles ψ', ψ'', on auroit trouvé, en faisant, pour abréger,

$$(x - \alpha)^2\,(dz^2 + dx^2) + 2\,(x - \alpha)\,(y - \varphi\alpha)\,dx\,dy + (y - \varphi\alpha)^2\,(dy^2 + dz^2) - a^2\,dz^2 = N',$$

que l'autre intégrale première & complète de l'équation (A) est le résultat de l'élimination de α entre les trois équations

$$(b') \qquad N' = 0,$$

$$(c') \qquad \left(\frac{dN'}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$(d') \qquad \left(\frac{ddN'}{d\alpha^2}\right) = 0,$$

intégrale qui est complétée par la fonction arbitraire φ, comme l'autre l'étoit par la fonction ψ, & qu'on peut vérifier de même par la différenciation.

XXV.

ACTUELLEMENT que nous avons les deux intégrales premières & complètes de l'équation (A), il est facile de trouver son intégrale finie. Pour cela il faut observer que, s'il étoit possible d'éliminer α entre les trois équations de la première intégrale, ce qui produiroit deux équations sans α, & ensuite d'éliminer encore α entre les trois équations de la seconde intégrale, ce qui produiroit deux autres équations sans α; on auroit alors quatre équations sans α, qui contiendroient les quantités différentielles $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, & les deux fonctions arbitraires φ, ψ; & en éliminant entre ces quatre équations les deux quantités $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, les deux équations résultantes seroient l'intégrale finie de l'équation (A). Mais, quoique les éliminations dont il s'agit ici ne puissent pas se faire en général, on peut néanmoins les indiquer; d'ailleurs il est nécessaire de remarquer que α devant être éliminé d'abord entre les trois équations (b), (c), (d), prises en particulier, & ensuite entre les trois autres (b'), (c'), (d'), prises de même en particulier, avant de combiner ces six équations, il faut accentuer α dans un des systèmes, par exemple, dans le second. D'après cela, en faisant, pour abréger,

$$(x - \alpha)(dy^2 + dx^2) + 2(x - \alpha)(z - \psi\alpha)\,dx\,dz + (z - \psi\alpha)^2(dy^2 + dz^2) - a^2dy^2 = N,$$

$$(x - \alpha')(dz^2 + dx^2) + 2(x - \alpha')(y - \varphi\alpha')\,dx\,dy + (y - \varphi\alpha')^2(dy^2 + dz^2) - a^2dz^2 = L,$$

l'intégrale finie & complète de l'équation (A) est le résultat de l'élimination des quatre quantités α, α', $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, entre les six équations suivantes,

$$L = 0, \qquad N = 0,$$
$$\left(\frac{dL}{d\alpha'}\right) = 0, \qquad \left(\frac{dN}{d\alpha}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{ddL}{d\alpha'^2}\right) = 0, \qquad \left(\frac{ddN}{d\alpha^2}\right) = 0:$$

& parce que les deux quantités $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, ne sont pas sous les fonctions arbitraires, l'élimination actuelle de ces quantités est possible. Cette élimination étant faite, il restera quatre équations sans différentielles, & l'intégrale finie de l'équation *(A)* sera le résultat de l'élimination des deux indéterminées α, α' entre ces quatre équations, que je ne rapporte pas, parce qu'elles sont d'un trop grand développement.

On opérera d'une manière analogue pour avoir l'intégrale finie d'une équation aux différences ordinaires d'un ordre quelconque, toutes les fois qu'on aura toutes ses intégrales premières complètes.

On voit donc, non-seulement que l'équation *(A)* aux différences secondes ordinaires, qui ne satisfait pas aux conditions d'intégrabilité, n'est pas absurde, & qu'elle exprime une propriété réelle, puisqu'elle appartient à toutes les courbes à double courbure, dont le rayon de courbure est constant & $= a$; mais encore que cette équation est susceptible de deux véritables intégrations aux différences premières & d'une intégration en quantités finies; enfin que ses deux intégrales premières sont complétées chacune par une fonction arbitraire particulière, & que son intégrale finie est complétée par ces deux fonctions.

XXVI.

Avant que de quitter cet exemple, je rapporterai quelques propriétés de la courbe qui en est l'objet, moins parce qu'elles sont très-remarquables, que pour donner une idée des résultats auxquels peut conduire la considération des équations aux différences ordinaires élevées.

1.° Nous avons vu, *article XXIII,* qu'en faisant, pour abréger,

$$(x-\alpha)^2+(y-\varphi\alpha)^2+(z-\psi\alpha)^2-a^2=M,$$

le système des quatre équations

$$M=0,$$

$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right)=0,$$

$$\left(\frac{ddM}{d\alpha^2}\right)=0,$$

$$\left(\frac{d^3M}{d\alpha^3}\right)=0,$$

appartient à la courbe dont la courbure est constante; mais que ce système n'est pas une intégrale, parce qu'en éliminant entre ces quatre équations, les trois coordonnées x, y, z, on arrive à une équation de condition qui est entre α, $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$, la même que l'équation aux différences ordinaires secondes, en x, y, z. Il résulte de-là que la courbe dont les coordonnées sont α, $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$, est aussi de courbure constante; & parce que les quatre équations expriment que quatre points consécutifs de la seconde courbe sont à égales distances du même point correspondant de la première, il s'ensuit que le rayon de courbure de la seconde courbe est le même, de grandeur & de position, que celui de la première.

Donc, *lorsque la courbure d'une courbe est constante, cette courbe, & celle qui passe par ses centres de courbure, sont réciproques, c'est-à-dire, que ces deux courbes sont réciproquement, l'une, la ligne des centres de courbure de l'autre.*

On

On pourroit arriver à ce résultat par une autre considération, car j'ai fait voir dans le Mémoire sur les développées *(Savans étrangers, tome X)*, que les équations d'une courbe à double courbure étant $y = \varphi x$, $z = \psi x$, & α, β, γ, étant les coordonnées de la courbe qui passe par ses centres, pour avoir en α, β, γ, les équations de cette dernière, il falloit, en faisant, pour abréger,

$$(\alpha - x)^2 + (\beta - \varphi x)^2 + (\gamma - \psi x)^2 - a^2 = M,$$

éliminer x entre les trois équations

$$\left(\frac{d\,M}{d\,x}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{d\,d\,M}{d\,x^2}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{d^3\,M}{d\,x^3}\right) = 0;$$

donc, si le rayon de courbure de la première courbe est constant, & $= a$, il faut de plus, que l'on ait $M = 0$. Ainsi, une courbe de courbure constante étant donnée, les équations de la ligne de ses centres satisfont aux quatre équations

$$M = 0, \qquad \left(\frac{d\,M}{d\,x}\right) = 0;$$

$$\left(\frac{d\,d\,M}{d\,x'^2}\right) = 0, \qquad \left(\frac{d^3\,M}{d\,x^3}\right) = 0.$$

Mais nous avons vu, *article XXIII*, que la ligne des centres étant donnée, les équations de la courbe de courbure constante satisfaisoient aux quatre équations

$$M = 0, \qquad \left(\frac{d\,M}{d\,\alpha}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{d\,d\,M}{d\,\alpha^2}\right) = 0, \qquad \left(\frac{d^3\,M}{d\,\alpha^3}\right) = 0.$$

De plus, les x, y, z entrent dans M, de la même manière que les α, β, γ; donc, la courbe de courbure constante, & celle qui passe par ses centres de courbure, se déduisent l'une de l'autre de la même manière, & sont par conséquent réciproques, comme je l'ai énoncé plus haut.

2.° L'élément de la courbe qui passe par les centres de courbure d'une autre courbe, est toujours dirigé dans le plan normal à la seconde, car deux centres de courbure consécutifs sont toujours sur le même plan normal; mais lorsque la courbure d'une courbe est constante, l'élément de sa ligne des centres est de plus perpendiculaire au rayon de courbure commun; donc les tangentes correspondantes des deux courbes sont toujours à la même distance, & dirigées dans des plans rectangulaires.

Donc, *lorsque la courbure d'une courbe est constante, cette courbe & celle qui passe par ses centres de courbure, sont par-tout à la même distance l'une de l'autre; elles s'entrelacent perpétuellement, en se présentant toujours leurs concavités, à peu-près comme les torons d'une corde à deux brins, & leurs tangentes aux extrémités du rayon de courbure commun sont dans des plans rectangulaires.*

Le filet d'une vis à base circulaire, est évidemment une courbe à courbure constante, & ses équations satisfont à l'équation *(A)*. La ligne des centres de cette courbe est le filet d'une autre vis de même pas & de même axe, mais tracée sur un cylindre d'un diamètre plus ou moins grand que celui de la première, suivant que l'inclinaison constante de la tangente de la première est plus ou moins grande que 45 degrés; & le diamètre du cylindre de la seconde courbe est tel que, pour le même pas, l'inclinaison des tangentes des deux courbes sont complément l'une de l'autre.

Enfin, tout le monde connoît les vis à deux filets équidistans; on les emploie fréquemment dans les arts, & principalement dans les balanciers des monnoies: lorsque les tangentes de ces filets font des angles de 45 degrés avec le plan de la base du cylindre, ces deux courbes sont réciproquement l'une la ligne des centres de courbure de l'autre.

XXVII.

THÉORÈME I. La différence dx de la variable principale étant constante, si l'on a une équation aux différences secondes ordinaires à trois variables

$$(A) \quad F\left(\frac{ddy}{dx^2}, \frac{ddz}{dx^2}\right) = 0,$$

dans laquelle il n'entre que les différences secondes & la différence première constante dx; l'intégrale première de cette équation sera le résultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les trois équations suivantes,

$$(B) \quad F\left(\frac{dy - \alpha dx}{x dx}, \frac{dz - \varphi\alpha . dx}{x dx}\right) = 0,$$

$$(C) \qquad \left(\frac{dF}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$(D) \qquad \left(\frac{ddF}{d\alpha^2}\right) = 0,$$

dans lesquelles la fonction F est la même que celle de la proposée, & où φ est une fonction arbitraire.

Pour le démontrer, soit fait, pour abréger,

$$\frac{dy - \alpha dx}{x dx} = u, \quad \frac{dz - \varphi\alpha dx}{x dx} = v,$$

les deux premières équations intégrales (B), (C), deviendront

$$(B') \quad F(u, v) = 0,$$

$$(C') \quad \left(\frac{dF}{du}\right) + \left(\frac{dF}{dv}\right)\varphi'\alpha = 0;$$

si l'on différencie ces deux dernières équations, en regardant α comme constante, ce qui est permis en vertu des deux équations (C), (D), les différentielles seront toutes deux de la forme

$$M du + N dv = 0;$$

elles ne pourront pas subsister simultanément, & indépendamment de la forme de la fonction F, à moins que l'on n'ait en même-temps $du = 0$, $dv = 0$; ou, développant les valeurs de du & dv, à moins que l'on n'ait

$$\frac{dy - \alpha\, dx}{x\, dx} = \frac{ddy}{dx^2},$$
$$\frac{dz - \varphi\alpha\, dx}{x\, dx} = \frac{ddz}{dx^2};$$

or si l'on élimine de l'équation (B) les quantités α, $\varphi\alpha$, au moyen des deux dernières équations, on aura la proposée (A); donc, &c.

XXVIII.

THÉORÈME II. La différence dx de la variable principale étant toujours regardée comme constante, & les quantités Y, Z étant composées l'une & l'autre, d'une manière quelconque, des trois variables x, y, z, & de leurs différences premières; si l'on a une équation aux différences ordinaires secondes

$$F\left(\frac{dY}{dx^2}, \frac{dZ}{dx^2}\right) = 0,$$

dans laquelle il n'entre que les différences des quantités x, Y, Z, l'intégrale première de cette équation sera le résultat de l'élimination de α entre les trois équations

$$F\left(\frac{Y - \alpha\, dx}{x\, dx}, \frac{Z - \varphi\alpha . dx}{x\, dx}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{dF}{d\alpha}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{ddF}{d\alpha^2}\right) = 0,$$

dans lesquelles F est la fonction de la proposée, & où φ est une fonction arbitraire.

Ce théorème est une suite du précédent.

XXIX.

THÉORÈME III. Quel que soit le nombre des variables $u, x, y, z \ldots$, parmi lesquelles u est la variable principale, dont la différence première du est regardée comme constante; de plus, les trois quantités X, Y, Z, étant composées d'une manière quelconque de toutes les variables & de leurs différences premières; si l'on a une équation aux différences ordinaires secondes

$$F\left(\frac{dY}{dX}, \frac{dZ}{dX}\right) = 0,$$

qui ne renferme que les différences des quantités X, Y, Z, une des intégrales premières de cette équation sera le résultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les trois équations

$$F\left(\frac{Y - \alpha du}{X}, \frac{Z - \varphi\alpha du}{X}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dF}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{ddF}{d\alpha^2}\right) = 0.$$

XXX.

THÉORÈME IV. Quel que soit le nombre des variables parmi lesquelles u est la variable principale, dont la différence première du est regardée comme constante; de plus, les trois quantités U, V, W, étant composées d'une manière quelconque de toutes les variables; si l'on a l'équation aux différences ordinaires secondes

$$F\left(\frac{ddU}{ddW}, \frac{ddV}{ddW}\right) = 0,$$

outre l'intégrale première déduite du théorème précédent, cette équation en aura encore une autre, qui sera le résultat de l'élimination de l'indéterminée α' entre les trois équations suivantes

$$F\left[\frac{u\,dU - (U - \alpha')\,du}{u\,dW - W\,du}, \frac{u\,dV - (V - \varphi\alpha')\,du}{u\,dW - W\,du}\right] = 0,$$

$$\left(\frac{dF}{d\alpha'}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{ddF}{d\alpha'^2}\right) = 0.$$

Ces deux derniers théorèmes ſe démontrent comme le premier.

CONCLUSION.

ON voit donc, 1.° que les équations aux différences ordinaires ſecondes, qui ne ſatisfont pas aux anciennes conditions d'intégrabilité, & par une analogie évidente celles des ordres ſupérieurs, n'énoncent rien d'abſurde; qu'elles ſont ſuſceptibles d'une véritable intégration, & que leurs intégrales ſont complétées par des fonctions arbitraires; 2.° que celles de ces équations qui ne renferment que trois variables, appartiennent à des courbes à double courbure, dont elles expriment la génération; & c'eſt lorſque cette génération ne dépend pas ſeulement de quelques points donnés à volonté, mais de courbes priſes arbitrairement, que les intégrales de ces équations différentielles ſont complétées par des fonctions arbitraires.

Des Équations aux différences partielles du premier ordre.

XXXI.

ON a déjà vu qu'étant propoſée une équation aux différences partielles du premier ordre, & à trois variables, repréſentée par $V = 0$, ſi l'on ſubſtitue dans cette équation pour p ou q, pour p, par exemple, ſa valeur priſe dans l'équation $dz = p\,dx + q\,dy$, & qu'on élimine q du réſultat, au moyen de ſa différentielle priſe en regardant q comme ſeule variable, on aura une équation aux différences ordinaires $U = 0$, qui en général ſera élevée. On a vu pareillement que ſi l'intégrale complète de l'équation aux différences ordinaires eſt le réſultat de l'élimination de α entre les trois équations

$$M = 0,$$

$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{ddM}{d\alpha^2}\right) = 0;$$

M étant trouvée par intégration, & contenant une fonction arbitraire de α, l'intégrale complète de l'équation aux différences partielles $V = 0$, eſt le réſultat de l'élimination de α entre les deux premiéres de ces équations intégrales; en ſorte que de la perfection du calcul intégral des équations aux différences ordinaires, s'enſuivroit celle du calcul des équations aux différences partielles.

Ce que j'ai dit dans le Mémoire précédent ſur l'intégration des équations aux différences partielles linéaires, eſt un cas particulier de la méthode que je viens de propoſer, car l'équation linéaire eſt toujours de la forme

$$Lp + Mq + N = 0.$$

Si l'on élimine p, au moyen de l'équation $dz = pdx + qdy$, on a

$$Ldz + Ndx + q\,(Mdx - Ldy) = 0;$$

& ſi l'on différencie cette dernière équation, en regardant q comme ſeule variable, on a

$$Mdx - Ldy = 0,$$

& par conſéquent

$$Ldz + Ndx = 0,$$

qui ſont les deux équations que j'ai données, & que M. de la Grange avoit publiées auparavant.

XXXII.

Les intégrales de toutes les équations aux différences partielles, même du premier ordre & à trois variables, ne ſont pas ſuſceptibles d'être miſes ſous la forme précédente, parce que cette forme ſuppoſe tacitement que l'équation appartient à une ſurface courbe; & il y a un nombre infini d'équations aux différences partielles qui appartiennent à des courbes à double courbure, & dont l'intégrale ne peut être exprimée que par le ſyſtème de deux équations ſimultanées, entre leſquelles il n'y a rien à éliminer, ou par le ſyſtème de trois équations, entre leſquelles il faut éliminer une indéterminée, comme je vais le faire voir dans l'exemple ſuivant.

Soit propoſé d'intégrer l'équation

$$p - Ay = \varphi(q + Ax),$$

dans laquelle A eſt une conſtante, & où φ eſt une fonction arbitraire.

Ce que cette équation a de remarquable, c'eſt que ſi l'on fait $A = 0$, elle devient $p = \varphi q$, qui appartient à toutes les ſurfaces développables, & dont l'intégrale eſt connue; tandis que ſi on laiſſe ſubſiſter A, elle n'appartient plus à une ſurface courbe, mais à une courbe à double courbure.

En effet, ſoit fait, pour abréger,

$$q + Ax = \alpha,$$

ce qui donnera

$$p - Ay = \varphi\alpha.$$

Il eſt clair que la quantité α eſt une indéterminée ſur la valeur de laquelle rien ne doit être prononcé, & qui eſt deſtinée à diſparoître par élimination. Si l'on ſubſtitue pour p & q les valeurs précédentes dans $dz = pdx + qdy$, on aura

$$dz = dx\varphi\alpha + \alpha dy - A(xdy - ydx).$$

Actuellement, ſi cette équation aux différences ordinaires étoit intégrable en regardant α comme conſtant, & ſi ſon intégrale complétée par une fonction arbitraire de α étoit $M = 0$, il eſt évident, par les principes de ce genre de calcul, que l'intégrale complète de la propoſée ſeroit feroit le réfultat de l'élimination de α entre les deux équations $M = 0$, $(\frac{dM}{d\alpha}) = 0$; mais l'équation aux différences ordinaires ne fatisfait pas aux conditions d'intégrabilité, elle appartient à une courbe à double courbure, qui ne peut être exprimée en quantités finies, que par le fyftème de deux équations, & d'après l'*article XVI*, fi la quantité α étoit une conftante abfolue, ces deux équations feroient

$$z = x\phi\alpha + \alpha y + \psi(\frac{y}{x}),$$

$$\psi'(\frac{y}{x}) = -Ax^2.$$

De plus, α n'eft pas une conftante abfolue, elle doit feulement être regardée comme conftante dans l'intégration précédente, c'eft-à-dire, que cette intégration eft prife en regardant comme conftantes les deux quantités $\frac{y}{x}$ & α ; donc la fonction ψ qui complète l'intégrale doit être compofée de ces deux quantités; donc l'intégrale complète de la propofée eft le réfultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les trois équations

$$(A) \quad z = x\phi\alpha + a y + \psi(\frac{y}{x}, \alpha)$$

$$(B) \quad x\phi'\alpha + y + \psi''(\frac{y}{x}, \alpha)$$

$$(C) \quad \psi'(\frac{y}{x}, \alpha) = -Ax^2,$$

dont la feconde eft la différentielle de la première, prife en regardant α comme feule variable, & dans lefquelles ψ eft une fonction arbitraire de deux quantités, ψ' & ψ'' étant les coéfficiens de du & dv dans la différentielle de $\psi(u, v)$. Le réfultat de cette élimination comporte deux équations qui font celles de la courbe à double courbure, à laquelle appartient l'équation aux différences partielles.

Parmi les équations aux différences partielles, il y en a donc qui appartiennent à des courbes à double courbure; leur intégrale finie ne peut être exprimée que par le ſyſtème de deux équations entre leſquelles il n'y a rien à éliminer, & cette intégrale eſt complétée par une fonction arbitraire de deux quantités, ce que les Géomètres ne s'étoient encore permis que pour les intégrales des équations à quatre variables.

Comme la concluſion précédente eſt extraordinaire, je vais la vérifier de pluſieurs manières.

1.° Si, dans l'intégrale, on fait $A = 0$, l'équation *(C)* donne $\psi' = 0$, ce qui indique que la quantité $\frac{y}{x}$ n'entre pas dans la fonction ψ; ainſi cette intégrale ſe réduit aux deux équations

$$z = x\phi\alpha + \alpha y + \psi\alpha$$
$$x\phi'\alpha + y + \psi'\alpha = 0,$$

qui ſont l'intégrale connue de l'équation $p = \phi q$, que l'on obtient en faiſant de même dans la propoſée $A = 0$.

2.° Si l'on différencie l'équation *(A)* en regardant α comme conſtante, ce qui eſt permis en vertu de *(B)*, on trouve

$$p = \phi\alpha - \frac{y}{x^2}\psi'\left(\frac{y}{x}, \alpha\right),$$

$$q = \alpha + \frac{1}{x}\psi'\left(\frac{y}{x}, \alpha\right):$$

ſi l'on ſubſtitue pour ψ', ſa valeur, priſe dans *(C)*, on a

$$p = \phi\alpha + Ay,$$
$$q = \alpha - Ax;$$

& enfin, éliminant α, on obtient

$$p - Ay = \phi(q + Ax),$$

qui eſt la propoſée.

3.° Si l'on prend des cas particuliers, c'est-à-dire, si l'on donne aux fonctions φ, ψ, des formes déterminées, & qu'on élimine α entre les trois équations *(A)*, *(B)*, *(C)*, on aura deux équations qui, par la différenciation, satisferont à la proposée.

XXXIII.

En opérant d'une manière analogue, on trouve qu'étant proposée l'équation aux différences partielles à quatre variables u, x, y, z,

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) + Aux = \varphi\left[\left(\frac{dz}{du}\right) - Axy, \left(\frac{dz}{dx}\right) - Auy\right],$$

dans laquelle A est une constante absolue, & φ une fonction arbitraire de deux quantités; son intégrale complète est le résultat de l'élimination des deux indéterminées α, β, entre les quatre équations suivantes,

$$z = \alpha u + \beta x + y\varphi(\alpha, \beta) + \psi\left(\frac{ux}{y}, \alpha, \beta\right),$$
$$u + y\varphi'(\alpha, \beta) + \psi'' = 0,$$
$$x + y\varphi''(\alpha, \beta) + \psi''' = 0,$$
$$\psi' = Ay^2,$$

dont la deuxième & la troisième sont les différentielles de la première, prises en regardant α pour l'une, & β pour l'autre, comme seule variable; dans lesquelles ψ est une fonction arbitraire de trois quantités; où φ' & φ'' sont les deux coéfficiens de la différence de φ; & où ψ', ψ'', ψ''', sont les coéfficiens de la différence de ψ.

Le calcul intégral des équations aux différences ordinaires, & celui des équations aux différences partielles, dépendant réciproquement l'un de l'autre, tous les pas que l'on fait dans la seconde de ces deux espèces de calculs, sont utiles à la première; ainsi, je vais rapporter quelques théorèmes, qui ne sont pas compris dans ceux de M. de la Grange.

XXXIV.

JE ſuppoſerai que le nombre des variables ſoit quelconque, & je ferai, pour abréger,

$$dz = p\,du + q\,dx + r\,dy \ldots\ldots\ldots$$

THÉORÈME I. Les quantités U, X, Y, étant des fonctions données reſpectivement en u, x, y, l'intégrale complète de l'équation aux différences partielles

$$F(z, pU, qX, rY \ldots\ldots) = 0,$$

ne dépend que des quadratures.

Soit fait

$$pU = \alpha rY,$$
$$qX = \beta rY,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

α, $\beta \ldots$ étant des indéterminées ſur la valeur deſquelles on ne doit rien ſtatuer, & qui ſont deſtinées à diſparoître par l'élimination; & ſoient ſubſtituées dans la propoſée pour pU, $qX \ldots$ leurs valeurs, l'équation deviendra

$$f(z, \alpha, \beta, \ldots\ldots rY) = 0,$$

de laquelle on pourra tirer la valeur de rY en z, α, $\beta \ldots\ldots$ Soit cette valeur

$$rY = \mathrm{f}(z, \alpha, \beta \ldots\ldots),$$

on en conclura

$$pU = \alpha \mathrm{f}(z, \alpha, \beta \ldots\ldots),$$
$$qX = \beta \mathrm{f}(z, \alpha, \beta \ldots\ldots);$$

ſubſtituant pour p, q, $r \ldots\ldots$ ces valeurs dans

$$dz = p\,du + q\,dx + r\,dy \ldots\ldots$$

on aura

$$\frac{dz}{\mathrm{f}(z, \alpha, \beta, \ldots)} = \frac{\alpha\,du}{U} + \frac{\beta\,dx}{X} + \frac{dy}{Y} \ldots\ldots$$

équation dont l'intégrale, en regardant α, β... comme conſtantes, ne dépend que des quadratures, & doit être complétée par une fonction arbitraire des conſtantes hypothétiques α, β.... Soit $M = 0$, cette intégrale ainſi complétée; elle ne pourra pas être employée ſeule, parce qu'il faut indiquer ce qui a été regardé comme conſtant dans l'intégration; on aura donc, ſimultanément,

$$M = 0,$$

$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{dM}{d\beta}\right) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Toutes ces équations devant avoir lieu, indépendamment des valeurs de α, β... ſi l'on élimine ces indéterminées, on aura l'intégrale complète de la propoſée. L'élimination dont il s'agit ici, ne peut pas s'exécuter en général, parce que les quantités α, β... ſont ſous la fonction arbitraire & ſous ſes différences partielles.

XXXV.

Théorème II. Les quantités L, M, N, P..... en même nombre que les variables, étant compoſées des variables & des différences partielles premières, de manière que toutes les équations ſuivantes, moins une, étant poſées, la dernière s'enſuive néceſſairement,

$$dL = 0,$$

$$dM = 0,$$

$$dN = 0,$$

$$dP = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

si l'on a une équation composée de toutes ces quantités, & que je représente par

$$F(L, M, N, P \ldots\ldots\ldots) = 0,$$

F étant une fonction quelconque donnée, algébrique ou transcendante, arbitraire ou déterminée; on aura l'intégrale de cette équation, en éliminant d'abord toutes les différences partielles, & une des deux fonctions arbitraires φ ou ψ, entre les équations suivantes,

$$L = \varphi(\alpha, \beta \ldots\ldots),$$
$$M = \psi(\alpha, \beta \ldots\ldots),$$
$$N = \alpha,$$
$$P = \beta,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$F(\varphi, \psi, \alpha, \beta \ldots\ldots) = 0,$$

dans lesquelles F est la même fonction que celle de la proposée; ce qui produira une équation unique que je représente par $M = 0$, puis en éliminant toutes les indéterminées α, $\beta \ldots\ldots$ entre les équations

$$M = 0,$$
$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{dM}{d\beta}\right) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple. Soit proposée l'équation

$$F[p, q, r \ldots\ldots (z - pu - qx - ry \ldots\ldots)] = 0,$$

dans laquelle F indique une fonction quelconque donnée. Comme de toutes les équations

$$dp = 0,$$

$$dq = 0,$$
$$dr = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$d(z - pu - qx - ry\ldots\ldots) = 0,$$

une quelconque ſuit de toutes les autres, la propoſée eſt dans le cas du théorème, & ſon intégrale eſt le réſultat de l'élimination des indéterminées α, $\beta\ldots$ entre les équations ſuivantes,

$$F\{\varphi(\alpha,\beta\ldots),\alpha,\beta\ldots[z - u\varphi(\alpha,\beta\ldots) - \alpha x - \beta y\ldots]\} = 0,$$
$$\left(\frac{dF}{d\alpha}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{dF}{d\beta}\right) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

M. de la Grange avoit donné un réſultat analogue, ſeulement pour le cas de deux variables principales.

XXXVI.

Sur les équations aux différences partielles des ordres ſupérieurs.

Ce que nous avons dit des équations aux différences partielles du premier ordre, a pareillement lieu pour celles des ordres ſupérieurs; c'eſt-à-dire qu'en faiſant, pour abréger,

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$
$$dp = r\,dx + s\,dy,$$
$$dq = s\,dx + t\,dy,$$

ſi l'on ſubſtitue dans une équation aux différences partielles ſecondes $V = 0$, pour r & t leurs valeurs en dp, dq, dx, dy, priſes dans les équations précédentes, on aura une équation qui ne renfermera plus d'autres différences partielles ſecondes que s; & ſi l'on différencie cette équation en regardant s comme ſeule variable, & qu'enſuite on élimine s au moyen de cette différentielle, on aura une équation $U = 0$ aux différences ordinaires entre les variables x, y, z, p, q, dont l'intégrale fournira celle de la propoſée.

Le réſultat aux différences ordinaires que j'ai repréſenté en général par $U = 0$, peut arriver ſous pluſieurs formes très-différentes.

1.° Ce réſultat peut comporter deux équations aux différences ordinaires, ce qui aura toujours lieu lorſque la propoſée ſera linéaire, & dans quelques cas des différences élevées; alors ſi les intégrales de ces deux équations aux différences ordinaires ſont $M = \alpha$, $N = \beta$, α & β étant les conſtantes arbitraires introduites par les intégrations, l'intégrale première de la propoſée ſera $M = \varphi N$.

2.° Si le réſultat aux différences ordinaires ne renferme qu'une ſeule équation élevée, & que l'intégrale complète de cette équation ſoit le réſultat de l'élimination de l'indéterminée α entre trois équations de cette forme

$$M = 0,$$
$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{ddM}{d\alpha^2}\right) = 0,$$

l'intégrale première de la propoſée ſera le réſultat de l'élimination de α entre les deux premières équations

$$M = 0,$$
$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0.$$

3.° Enfin ſi le réſultat aux différences ordinaires eſt une équation linéaire unique, & pour laquelle les anciennes conditions d'intégrabilité ne ſoient pas ſatisfaites, on ſe comportera

comportera d'une manière analogue à ce que j'ai fait, *article XXXII.*

Je vais apporter un exemple pour chacun de ces trois cas.

XXXVII.

EXEMPLE I. Soit proposé d'intégrer l'équation aux différences partielles secondes

$$rt - s^2 + A = 0,$$

dans laquelle A est une constante.

Je substitue pour r & t leurs valeurs prises dans

$$dp = rdx + sdy,\ dq = sdx + tdy,$$

ce qui donne

$$s(dqdy + dpdx) = dpdq + Adxdy.$$

Je différencie cette équation en regardant s comme seule variable, & j'élimine s, ce qui, dans ce cas où s est linéaire, se réduit à égaler à zéro chacun des deux membres; & j'ai les deux équations aux différences ordinaires

$$dqdy + dpdx = 0,$$
$$dpdq + Adxdy = 0,$$

desquelles on tire

$$dp = - dy\sqrt{(A)},$$
$$dq = \quad dx\sqrt{(A)}:$$

or ces deux équations sont des différences exactes, & leurs intégrales complètes sont

$$p + y\sqrt{(A)} = \alpha,$$
$$q + x\sqrt{(A)} = \beta;$$

donc faisant $\alpha = \varphi\beta$, l'intégrale complète première de la proposée est

$$p + y\sqrt{(A)} = \varphi[q - x\sqrt{(A)}].$$

Si dans la proposée on fait $A = 0$, elle devient $rt - s^2 = 0$, équation des surfaces développables; & si on fait la même supposition dans l'intégrale, on a $p = \varphi q$, qui est une des intégrales premières de cette équation.

Actuellement, l'intégrale que l'on vient de trouver, est précisément l'équation que j'ai traitée, *article XXXII*; donc l'intégrale complète de la proposée est le résultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les trois équations

$$z = x\varphi\alpha + \alpha y + \psi\left(\frac{y}{x}, \alpha\right),$$

$$x\varphi'\alpha + y + \psi''\left(\frac{y}{x}, \alpha\right),$$

$$\psi'\left(\frac{y}{x}, \alpha\right) = x^2 V(A),$$

dont la seconde est la différentielle de la première, prise en regardant α comme seule variable; & dans lesquelles φ est une fonction arbitraire d'une quantité, ψ est une fonction arbitraire de deux quantités, ψ' & ψ'' sont les coéfficiens de du & dv dans la différentielle de $\psi(u, v)$.

Ainsi la proposée appartient à une courbe à double courbure, excepté dans le cas où l'on a $A = 0$; alors elle appartient à toutes les surfaces développables.

XXXVIII.

EXEMPLE II. Soit proposé d'intégrer l'équation

$$(rt - s^2)^2 + 4rs = 0.$$

Je chasse r & t, au moyen des équations

$$dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy,$$

ce qui donne

$$\left.\begin{array}{l} [dpdq - s(dqdy + dpdx)]^2 \\ + 4sdxdy^2(dp - sdy) \end{array}\right\} = 0;$$

différenciant cette équation, en regardant s comme ſeule variable, & éliminant enſuite s au moyen de cette différentielle, je trouve l'équation aux différences ordinaires,

$$dpdq = dy^2.$$

Or, cette équation élevée eſt compriſe dans celles que j'ai traitées, *article VII*, & en faiſant, pour abréger,

$$(p - \alpha)(q - \varphi\alpha) - y^2 = M,$$

ſon intégrale eſt le réſultat de l'élimination de α entre les trois équations

$$M = 0,$$

$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{ddM}{d\alpha^2}\right) = 0;$$

donc une des intégrales premières de la propoſée eſt le ſyſtème des deux premières de ces trois équations, c'eſt-à-dire, le réſultat de l'élimination de l'indéterminée α entre les deux ſuivantes,

$$(p - \alpha)(q - \varphi\alpha) - y^2 = 0,$$

$$(p - \alpha)\varphi'\alpha + q - \varphi\alpha = 0.$$

Pour avoir l'intégrale finie, je tire de ces deux équations les valeurs de p & q, ce qui donne

$$p = \alpha + \frac{y}{\sqrt{(-\varphi'\alpha)}},$$

$$q = \varphi\alpha + y\sqrt{(-\varphi'\alpha)};$$

& ſubſtituant ces valeurs dans $dz = pdx + qdy$, je trouve

$$dz = \alpha dx + dy\varphi\alpha + \frac{y}{\sqrt{(-\varphi'\alpha)}}(dx - dy\varphi'\alpha).$$

Si cette dernière équation étoit intégrable, en regardant α comme conſtante, & que ſon intégrale, complétée par une fonction arbitraire de α, fût $M = 0$, l'intégrale finie demandée seroit le résultat de l'élimination de α entre les deux équations $M = 0$, $\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0$, & cette intégrale appartiendroit à une surface courbe. Mais la dernière équation aux différences ordinaires n'est pas intégrable en regardant α comme constante; & pour qu'elle le devînt, il faudroit encore regarder $x - y\varphi'\alpha$ comme constante; donc je pourrai l'intégrer dans cette double hypothèse, & alors il faudra, 1.° compléter l'intégrale par une fonction arbitraire des deux quantités regardées comme constantes dans l'intégration; 2.° exprimer par deux équations, que ces deux quantités n'ont pas varié, ce qui donnera

$$z = \alpha x + y\varphi\alpha + \psi\,[(x - y\varphi'\alpha),\ \alpha\,]$$

$$x + y\varphi'\alpha - y\varphi''\alpha\psi' + \psi'' = 0,$$

$$\psi' = \frac{y}{\sqrt{(-\varphi'\alpha)}};$$

donc l'intégrale finie de la proposée est le résultat de l'élimination de α entre les trois équations précédentes, dont la seconde est la différentielle de la première, prise en regardant α comme constante, & dans lesquelles φ est une fonction arbitraire d'une quantité, ψ est une fonction arbitraire de deux quantités, & ψ', ψ'' sont les coéfficiens de du & dv dans la différentielle de $\psi\,(u, v)$. Ainsi la proposée appartient à une courbe à double courbure.

XXXIX.

EXEMPLE III. Soit proposé

$$Ar + Bq + z = 0,$$

dans laquelle A & B sont des constantes.

Je substitue pour r sa valeur dans $dp = rdx + sdy$, & je trouve

$$Adp + (Bq + z)\,dx = Asdy;$$

éliminant s au moyen de la différentielle prise en regardant s comme seule variable, ce qui se réduit à égaler à zéro les deux membres de l'équation, j'obtiens les deux équations aux différences ordinaires simultanées,

$$Adp + (Bq + z)\,dx = 0,$$
$$dy = 0,$$

en sorte que si la premiére satisfaisoit aux conditions d'intégrabilité, & que son intégrale fût $M = \alpha$, l'intégrale première de la proposée seroit $M = \varphi y$. Mais la première équation ne satisfait pas aux conditions d'intégrabilité, & son intégrale, prise indépendamment de la seconde équation, seroit le système des deux équations simultanées,

$$Ap + \varphi x = 0,$$
$$\varphi' x = Bq + z;$$

donc cette intégrale devant être prise en supposant que la seconde équation ait lieu, l'arbitraire qui la complète doit être aussi fonction de y; & l'on doit avoir pour intégrale première de la proposée, le système des équations simultanées,

$$Ap + \varphi(x, y) = 0,$$
$$\varphi'(x, y) = Bq + z,$$

dans lesquelles φ' est le coéfficient de dx dans la différentielle de $\varphi(x, y)$.

Cette intégrale première peut être mise sous une autre forme; car si l'on tire de ces équations les valeurs suivantes de p, q,

$$p = \frac{-\varphi(x, y)}{A},$$

$$q = \frac{\varphi'(x,y) - z}{B},$$

& qu'on les ſubſtitue dans $dz = p\,dx + q\,dy$, on aura

$$dz = \frac{-dx\,\varphi(x,y)}{A} + \frac{dy\,\varphi'(x,y) - z\,dy}{B},$$

équation aux différences ordinaires du premier ordre, qui ne renferme aucune indéterminée, & qui devant ſubſiſter ſans condition, eſt elle-même la véritable intégrale première de l'équation aux différences partielles du ſecond ordre, c'eſt-à-dire, qu'elle exprime la même choſe, & qu'elle eſt de la même généralité que la propoſée; & parce que cette équation ne ſatisfait pas aux conditions d'intégrabilité, & que ſon intégrale ne peut être exprimée que par le ſyſtème de deux équations ſimultanées, il s'enſuit que la propoſée appartient à une courbe à double courbure.

Actuellement, pour intégrer encore une fois cette équation, ſoit $\varphi(x,y)$ le coéfficient de dx dans la différentielle d'une autre fonction arbitraire $\psi(x,y)$, de manière que l'on ait

$$\varphi(x,y) = \psi'(x,y),$$
$$\varphi'(x,y) = \psi''(x,y),$$

ψ'' étant le coéfficient de dx^2 dans la différence ſeconde de ψ, l'équation aux différences ordinaires deviendra

$$dz = -d\frac{\psi(x,y)}{A} + dy\left[\frac{\psi'(x,y) - z}{B} + \frac{\psi''(x,y)}{A}\right],$$

ψ'' étant le coéfficient de dy dans la différentielle de $\psi(x,y)$. Or d'après ce que j'ai dit ſur l'intégration des équations aux différences ordinaires linéaires, l'intégrale de cette équation eſt le ſyſtème des deux équations ſimultanées

$$z = -\frac{\psi(x,y)}{A} + \pi y,$$

$$\pi' y = \frac{\psi'(x,y) - z}{B} + \frac{\psi''(x,y)}{A},$$

dans lesquelles π est une fonction arbitraire de la seule quantité y; donc ce système d'équations est aussi l'intégrale finie & complète de la proposée; ce qu'il est très-facile de vérifier par la différenciation.

XL.

Le même procédé s'applique aux équations d'ordres supérieurs. Je ne me permettrai qu'un seul exemple.

Soit proposé d'intégrer l'équation aux différences partielles du troisième ordre

$$\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right)\left(\frac{d^3 z}{dy^3}\right) = \left(\frac{d^3 z}{dx^2 dy}\right)\left(\frac{d^3 z}{dx\, dy^2}\right),$$

je chasse trois de ces différences partielles au moyen des trois équations suivantes

$$dr = \left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right)dx + \left(\frac{d^3 z}{dx^2 dy}\right)dy,$$
$$ds = \left(\frac{d^3 z}{dx^2 dy}\right)dx + \left(\frac{d^3 z}{dx\, dy^2}\right)dy,$$
$$dt = \left(\frac{d^3 z}{dx\, dy^2}\right)dx + \left(\frac{d^3 z}{dy^3}\right)dy,$$

ce qui donne, en conservant $\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right)$,

$$\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right)(dt\,dy^2 - dr\,dx^2) = dr(ds\,dy - dr\,dx);$$

je différencie cette équation en regardant $\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right)$ comme seule variable, & j'élimine cette quantité au moyen de la différentielle, ce qui, à cause que $\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right)$ est linéaire, se réduit à égaler à zéro chacun des membres de l'équation, & j'ai les deux équations aux différences ordinaires

$$dr(ds\,dy - dr\,dx) = 0,$$
$$dt\,dy^2 - dr\,dx^2 = 0.$$

La première de ces deux équations a deux racines, dont l'une eſt $dr = 0$, en vertu de laquelle la ſeconde équation devient $dt\,dy^2 = 0$; dont une des racines eſt $dt = 0$; donc on a ſimultanément les deux équations

$$dr = 0,$$
$$dt = 0;$$

or les intégrales complètes de ces équations ſont $r = \alpha$, $t = \beta$; donc une des intégrales premières de la propoſée eſt

$$t = \varphi r,$$

ce qu'il eſt facile de vérifier par la différenciation.

X L I.

Les équations aux différences partielles élevées ne ſont pas les ſeules qui puiſſent appartenir à des courbes à double courbure; la plupart des équations linéaires ſont encore dans le même cas; nous nous contenterons de le faire voir par l'équation

$$(A)\quad Ar + Bs + Ct + Dp + Eq + F = 0,$$

dans laquelle tous les coéfficiens ſont conſtans. Nous avons déjà traité cette équation dans le Mémoire précédent, *article XXX;* mais l'intégrale que nous avons trouvée eſt encore trop particulière.

Si l'on ſubſtitue dans cette équation par r & t leurs valeurs priſes dans

$$dp = r\,dx + s\,dy,\ dq = s\,dy + t\,dy,$$

& qu'enſuite l'on élimine s au moyen de la différentielle priſe en regardant s comme ſeule variable, on aura les deux équations aux différences ordinaires ſimultanées

$$(B)\qquad A\,dy^2 - B\,dx\,dy + C\,dx^2 = 0,$$

$$(C)\quad A\,dp\,dy^2 - C\,dq\,dx + dx\,dy\,(Dp + Eq + F) = 0,$$

les

les racines de la première sont

$$dy - k\,dx = 0, \quad \& \quad dy + k'\,dx = 0,$$

k & k' étant les racines de l'équation algébrique

$$Ak^2 - Bk + C = 0;$$

ainsi, en employant la première racine, & l'introduisant dans l'équation (C), les deux équations aux différences ordinaires simultanées deviennent

$$(D) \qquad dy - k\,d\,x = 0,$$
$$(E) \quad A(dp + k'dq) + dx(Dp + Eq + F) = 0.$$

Ce sont ces deux équations qui doivent donner une des intégrales premières de la proposée.

L'intégrale de l'équation (D) est $y - kx = \alpha$, α étant la constante arbitraire; si celle de l'équation (E) étoit $M = \beta$, l'intégrale première seroit $M = \varphi\alpha$; mais, 1.° l'équation (E) n'appartient pas en général à une surface courbe, & son intégrale ne peut être une équation unique que dans le cas où les coéfficiens de la proposée satisfont à l'équation

$$CD^2 + AE^2 = BDE;$$

dans tous les autres cas, l'intégrale de l'équation aux différences ordinaires (E), considérée indépendamment de l'équation (D), ne peut être exprimée que par le système des deux équations simultanées

$$A(p + k'q) + \varphi x = 0,$$
$$\varphi' x = Dp + Eq + F;$$

2.° l'équation (E) ne doit pas être considérée seule, & son intégrale doit être prise en supposant que l'équation (D) ait lieu, c'est-à-dire, que α soit constant; donc cette intégrale doit être complétée, non pas par une fonction de x seulement, mais par une fonction de x & de α; donc la forme ſous laquelle ſe préſente d'abord l'intégrale première de la propoſée, eſt le ſyſtème des deux équations

$$(F)\ A(p + k'q) + \varphi(x, y - kx) = 0,$$
$$(G)\ \varphi'(x, y - kx) = Dp + Eq + F,$$

dans leſquelles φ eſt une fonction arbitraire de deux quantités, & où φ' eſt le coéfficient de du dans la différence de $\varphi(u, v)$.

Cette intégrale ſe vérifie par la différenciation; d'ailleurs ſi l'on fait $D = 0$, $E = 0$, $F = 0$, la propoſée devient

$$Ar + Bs + Ct = 0,$$

& l'équation (G) donne $\varphi'(x, y - kx) = 0$, ce qui exprime que la fonction φ, n'eſt compoſée que de la ſeule quantité $y - kx$; donc alors l'intégrale première ſe réduit à l'équation unique & connue

$$A(p + k'q) + \varphi(y - kx) = 0.$$

Des deux équations (F), (G) on tire les valeurs ſuivantes de p & de q,

$$p(Dk' - E) = \frac{E}{A}\varphi(x, y - kx) - k'[F - \varphi'(x, y - kx)],$$
$$q(Dk' - E) = -\frac{D}{A}\varphi(x, y - kx) + F - \varphi'(x, y - kx);$$

& en les ſubſtituant dans $dz = pdx + qdy$, on trouve

$$(H)\ dz(Dk' - E) = \frac{\varphi}{A}(Edx - Ddy) + (F - \varphi')(dy - k'dx),$$

équation aux différences ordinaires, qui exprime ſeule la même choſe que la propoſée, & qui eſt une de ſes intégrales premières, complétée par une fonction de deux quantités. Si dans cette équation, l'on change les deux quantités k, k' l'une en l'autre, il eſt évident que l'on aura l'autre intégrale première de la propoſée.

Les deux intégrales premières de l'équation *(A)* aux différences partielles linéaires, ſont donc l'une & l'autre une véritable équation aux différences ordinaires, dans laquelle il n'eſt plus queſtion des manières différentes dont la quantité z a pu varier; & parce que ces deux équations ne ſatisfont pas à la condition d'intégrabilité, & que leur intégrale commune ne peut être exprimée que par le ſyſtème de deux équations ſimultanées, il s'enſuit que la propoſée n'appartient pas en général à une ſurface courbe, mais à une courbe à double courbure.

Pour intégrer l'équation *(H)*, il faut obſerver d'abord que l'intégrale du premier membre doit être une fonction des deux quantités $Ex - Dy$ & $y - k'x$, & enſuite que les différences partielles de cette fonction doivent être égales aux deux termes reſpectifs du ſecond membre; ainſi l'intégrale finie de l'équation *(A)* eſt comportée par le ſyſtème des trois équations

$$z(Dk' - E) = \psi\,(Ex - Dy, y - k'x),$$
$$A\psi'\,(Ex - Dy, y - k'x) = \varphi\,(x, y - kx),$$
$$\psi''\,(Ex - Dy, y - k'x) = F - \varphi'(x, y - kx),$$

dans leſquelles ψ eſt une fonction arbitraire de deux quantités, & où ψ' & ψ'' ſont les coéfficiens de du & dv dans la différentielle de $\psi(u, v)$. De ces trois équations, la ſeconde eſt deſtinée à donner la forme de la fonction φ, d'après celle de la fonction ψ, & les deux autres équations ſont celles de la courbe à double courbure, qui eſt le lieu de la propoſée.

Si dans les équations *(D)*, *(E)* on ſubſtitue pour dx, dy, leurs valeurs tirées des deux ſuivantes,

$$dy - k\,dx = d\alpha, \quad dy - k'dx = d\alpha',$$

en opérant enſuite comme nous avons fait, on trouve que l'intégrale complète de la propoſée eſt le ſyſtème des deux équations

$$z = \pi(y - kx,\ y - k'x),$$

$$\left.\begin{array}{l}(kD - E)\pi' + (k'D - E)\pi'' \\ \quad + \frac{B^2 - 4AC}{A}\pi'^{\prime\prime} - F\end{array}\right\} = 0,$$

dans leſquelles π eſt une fonction arbitraire de deux quantités, où π' & π'' ſont les coéfficiens de du, dv dans la différentielle de $\pi(u, v)$, & où $\pi'^{\prime\prime}$ eſt la moitié du coéfficient de $du\,dv$ dans la différentielle ſeconde de la même fonction.

Comme l'équation d'une ſurface courbe quelconque peut toujours être miſe ſous la forme

$$z = \pi(y - kx,\ y - k'x),$$

il s'enſuit qu'il n'y a aucune ſurface courbe ſur laquelle on ne puiſſe tracer une des courbes à double courbure qui ſatisfont à la propoſée; & lorſque la fonction π eſt telle que la ſeconde équation eſt naturellement ſatisfaite, l'équation de la ſurface eſt elle-même un cas de l'intégrale complète, parce qu'alors la ſurface eſt toute compoſée de courbes qui ſatisfont à la propoſée.

Ce que nous venons de dire ſur cet exemple doit auſſi s'appliquer aux autres cas que nous avons traités dans le Mémoire précédent. Par un ſemblable raiſonnement, on trouve que pour l'équation $r - t - \frac{2p}{x} = 0$, de l'*article XV* du Mémoire, l'intégrale première complète eſt l'équation aux différences ordinaires

$$dz + dy\,\varphi(x, y - x) - \frac{dx + dy}{2x}\varphi'(x, y - x) = 0,$$

où φ eſt une fonction arbitraire de deux quantités, & où φ'

eſt le coéfficient de du dans la différentielle de $\varphi\,(u,\,v)$. Enfin l'intégrale finie eſt le ſyſtème des deux équations

$$z = \psi\,(x + y,\, x - y),$$

$$\psi' + \psi'' = 2\,x\,\psi'',$$

dans leſquelles ψ eſt une fonction arbitraire de deux quantités, où ψ', ψ'' ſont les coéfficiens de du, dv dans la différentielle de $\varphi\,(u,\,v)$, & où ψ'' eſt la moitié du coéfficient de $du\,dv$ dans la différentielle ſeconde de la même fonction.

Conclusion générale.

Il réſulte de ce ſupplément :

1.° que les équations aux différences ordinaires, pour leſquelles les conditions d'intégrabilité ne ſont pas ſatisfaites, ne contiennent rien d'abſurde, ni d'impoſſible, & qu'elles ſont ſuſceptibles d'une véritable intégration en quantités finies.

2.° Que les intégrales de ces équations ſont complétées, par des fonctions arbitraires de quantités variables, fonctions que l'on n'avoit encore employées que pour les intégrales des équations aux différences partielles.

3.° Que les conditions d'intégrabilité ont ſeulement pour objet d'indiquer le nombre des équations dont l'intégrale finie doit être compoſée, toute élimination d'indéterminées étant ſuppoſée faite.

4.° Que les intégrales du plus grand nombre des équations aux différences partielles ne ſont pas ſuſceptibles d'être exprimées par une ſeule équation, même en ſuppoſant que l'élimination de toutes les indéterminées ſoit faite; c'eſt-à-dire, par exemple, que dans le cas de trois variables, le plus grand nombre des équations aux différences partielles appartient à des courbes à double courbure, & non pas à des ſurfaces courbes, ce que toutes les méthodes ordinaires d'intégration ſuppoſent tacitement; & alors le nombre des quantités qui entrent dans les fonctions arbitraires eſt plus grand que celui des variables principales diminué d'une unité.

5.° Qu'il y a certaines équations aux différences partielles, dont les intégrales intermédiaires ſont de véritables équations aux différences ordinaires.

6.° Enfin, que la Géométrie peut encore faire de très-grands progrès, parce qu'on a le moyen de mettre en analyſe des manières nouvelles d'engendrer les courbes, & parce qu'on a la faculté d'entendre un grand nombre de propriétés de l'étendue, qui ſont exprimées par les relations qu'ont entr'elles des équations juſqu'ici regardées comme impoſſibles.

ADDITION.

DANS le ſupplément qui précède, j'ai conſtruit pluſieurs équations aux différences ordinaires élevées; mais de toutes les équations linéaires, qui ne ſatisfont pas aux conditions d'intégrabilité, & que j'ai intégrées, je n'en ai conſtruit aucune; je vais montrer, par un exemple, ce que ces ſortes d'équations ſignifient dans l'eſpace.

Si l'on ſuppoſe qu'un œil, réduit à un point unique, ſoit placé d'une manière quelconque, par rapport à une ſurface courbe, j'appelle *ligne du contour apparent* de cette ſurface, la courbe compoſée des points extrêmes de cette ſurface, que l'œil peut apercevoir; cette ligne eſt le contact de la ſurface courbe avec une ſurface conique qui lui ſeroit circonſcrite, & dont le ſommet ſeroit au point de l'œil; d'après cela, je ſuppoſe qu'il s'agiſſe de trouver la ligne du contour apparent d'une ſurface quelconque de révolution autour de l'axe des z, vue par un œil ſitué dans le point dont les coordonnées ſont a, b, c, indépendamment de la courbe génératrice de la ſurface.

L'équation de la ſurface de révolution eſt

$$z = \varphi(x^2 + y^2),$$

& ſon équation aux différences partielles eſt

$$py - qx = 0.$$

L'équation de la ſurface conique à baſe quelconque, & dont le ſommet eſt au point de l'œil, eſt

$$\frac{z-c}{x-a} = \psi\left(\frac{y-b}{x-a}\right),$$

& ſon équation aux différences partielles eſt

$$p(x-a) + q(y-b) = z - c.$$

Or, il eſt évident que pour la courbe demandée, non-ſeulement les x, y, z de la ſurface de révolution & de la ſurface conique, ſont reſpectivement les mêmes, mais encore que les quantités p, q, ſont les mêmes dans les deux ſurfaces, puiſque tout le long de la courbe, ces deux ſurfaces ont le même plan tangent. Donc dans les deux équations

$$py - qx = 0, \; p(x-a) + q(y-b) = z - c,$$

les cinq quantités x, y, z, p, q ont les mêmes valeurs; donc ſi l'on prend dans ces deux équations les valeurs de p & de q, & qu'on les ſubſtitue dans $dz = pdx + qdy$, qui a également lieu pour les deux ſurfaces, on aura

$$[x(x-a) + y(y-b)]\,dz = (z-c)(xdx + ydy),$$

équation aux différences ordinaires linéaires, qui ne ſatisfait pas à la condition d'intégrabilité, & qui, conſidérée ſeule, exprime le contour apparent d'une ſurface quelconque de révolution autour de l'axe des z, vue par un œil placé dans le point dont les coordonnées ſont a, b, c. L'intégrale de cette équation eſt le ſyſtème des deux ſuivantes

$$z = \varphi\,(x^2 + y^2),$$

$$2\,[\,x\,(x - a) + y\,(y - b)\,]\,\varphi' = \varphi - c,$$

dans lesquelles φ est une fonction arbitraire.

On voit donc que toute équation aux différences ordinaires à trois variables, linéaire, du premier ordre, & qui ne satisfait pas à la condition d'intégrabilité, appartient à la courbe de contact de deux surfaces courbes générales, c'est-à-dire, de deux surfaces données chacune par une équation aux différences partielles linéaires.

FAUTES à corriger dans ce Mémoire.

Pages,	*Lignes,*	*Au lieu de,*	*Lisez,*
502.	27.	faisant la, ...	faisant sur la,
504.	12.	le mot qu'elle exprime,	ce mot, qu'elle exprime,
507.	22.	sommes, ...	sommets,
517.	dernière, .	le.	la.
522.	25.	$d\left(\frac{\psi\epsilon}{d\epsilon}\right)$, ...	$\left(\frac{d.\psi\epsilon}{d\epsilon}\right)$,
528.	7.	THÉORÈME III, . .	THÉORÈME II,
529.	16.	N, ...	M,
533.	18 & 26,	u^2.	$\frac{u^2}{2}$,
533.	21.	o, ...	z,
533.	27.	y, ...	$z - y$,
533.	28.	z, ...	$-z$,
545.	19.	dx'^2.	dx^2.