

ENS CACHAN: MASTER MVA

Dynamique et contrôle des systèmes non-linéaires

(en collaboration avec Karine Beauchard)

Pierre Rouchon

Mines ParisTech

Deux liens pour télécharger les documents du cours:

<http://www.cmla.ens-cachan.fr/Membres/beauchard/enseignements.html>

<http://cas.ensmp.fr/~rouchon/index.html>

2011/2012

Observateurs asymptotiques et filtrage

Observabilité

Systemes linéaires

Observateurs asymptotiques linéaires

Observateurs asymptotiques non-linéaires

Observateur/contrôleur exemple du quadri-rotor

Observateurs invariants

Invariance et fusion de données inertielles/images

Modèle cinématique à base d'accéléromètres et gyromètres

Fusion après un premier traitement d'images

Fusion à partir d'images brutes

Références utiles

Distinguable et observabilité

Le système est $\frac{d}{dt}x = f(x, u)$ avec comme mesure $y = h(x)$.

Définition (distinguable)

Deux états initiaux x et \tilde{x} sont dits indistinguables (notés $x \sim \tilde{x}$) si pour tout $t \geq 0$, les sorties $y(t)$ et $\tilde{y}(t)$ sont identiques pour toute entrée $u(t)$ admissible. Ils sont dits distinguables sinon.

L'indistinguabilité est une relation d'équivalence. Notons $I(x)$ la classe d'équivalence de x .

Définition (observabilité globale)

Le système est dit observable en x si $I(x) = \{x\}$ et il est observable si $I(x) = \{x\}$ pour tout x .

Ainsi le système est observable si pour tous les états initiaux x et \tilde{x} , il existe une entrée admissible u qui distingue x et \tilde{x} , c'est à dire telle que $y(t) \neq \tilde{y}(t)$ pour au moins un temps $t \geq 0$ (injectivité).

Le système $\frac{d}{dt}x_1 = ux_2$, $\frac{d}{dt}x_2 = 0$, $y = x_1$ est observable (pour $u = 1$ par exemple). Cependant l'entrée $u = 0$ ne distingue pas les points x et \tilde{x} tels que $x_1 = \tilde{x}_1$ et $x_2 \neq \tilde{x}_2$. Plus généralement, il peut être nécessaire d'aller très loin dans le temps et dans l'espace d'état pour distinguer deux états initiaux, d'où

Définition (observabilité locale en temps et en espace)

L'état x est localement observable, si pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout voisinage U de x , il existe $\eta > 0$ plus petit que ε et un voisinage V de x contenu dans U , tel que pour tout $\tilde{x} \in V$, il existe une entrée $[0, \eta] \ni t \mapsto u(t)$ qui distingue x et \tilde{x} , i.e. telle que $y(\eta) \neq \tilde{y}(\eta)$. Le système est localement observable s'il l'est pour tout x .

Le système est **localement observable** si on peut **instantanément distinguer** chaque état de ses voisins en choisissant judicieusement l'entrée u .

Un test simple (dans un monde idéal)

Les données sont $t \mapsto (y(t), u(t))$ et le modèle $\frac{d}{dt}x = f(x, u)$ avec $y = h(x)$. **L'inconnue est x** . On suppose que tout est dérivable. Par dérivation successive de y on a pour ν entier

$$(\Sigma_\nu) \left\{ \begin{array}{l} h(x) \equiv h_0(x) = y \\ \frac{\partial h_0}{\partial x} f(x, u) \equiv h_1(x, u) = \frac{d}{dt}y \\ \frac{\partial h_1}{\partial x} f(x, u) + \frac{\partial h_1}{\partial x} \dot{u} \equiv h_2(x, u, \dot{u}) = \frac{d^2}{dt^2}y \\ \vdots \\ h_\nu(x, u, \dots, u^{(\nu-1)}) = y^{(\nu)} = \frac{d^\nu}{dt^\nu}y \end{array} \right.$$

Si à partir d'un certain ν on peut résoudre le système (Σ_ν) en x , alors le système est observable et **x s'exprime comme une fonction de y, u et un nombre fini de leurs dérivées.**

Difficile à utiliser en pratique car y est en général bruité.

Exemple d'un réacteur exothermique

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x_1 &= D(x_1^{in} - x_1) - k_0 \exp(-E/RT)x_1 \\ \frac{d}{dt}T &= D(T^{in} - T) + \alpha\Delta H \exp(-E/RT)x_1 + u \\ y(t) &= T.\end{aligned}$$

On a facilement x_1 en fonction de $(y, \frac{d}{dt}y)$ et u :

$$x_1 = \frac{\frac{d}{dt}y - D(T^{in} - y) - u}{\alpha\Delta H \exp(-E/Ry)}$$

Le système est donc observable. y et u sont reliés par une équation différentielle du second ordre en y et du premier ordre en u . On l'obtient en utilisant l'équation donnant $\frac{d}{dt}x_1$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\frac{d}{dt}y - D(T^{in} - y) - u}{\alpha\Delta H \exp(-E/Ry)} \right) = Dx_1^{in} - (D + k_0 \exp(-E/Ry)) \frac{\frac{d}{dt}y - D(T^{in} - y) - u}{\alpha\Delta H \exp(-E/Ry)}.$$

Il s'agit d'une condition de compatibilité

$F\left(y, \frac{d}{dt}y, \frac{d^2}{dt^2}y, u, \frac{d}{dt}u\right) = 0$ entre y et u à la base du diagnostic et de la détection de panne (relation non-linéaire entrée/sortie).

Systèmes linéaires à coefficients constants

On part de $\frac{d}{dt}x = Ax + Bu$, $y = Cx$ avec u et y connus à chaque instant t et x inconnu. **La méthode de base: on dérive la sortie pour faire apparaître x .** On obtient une infinité d'équations pour x ,

$$y = Cx$$

$$\dot{y} = CAx + CBu$$

$$\ddot{y} = CA^2x + CABu + CB\dot{u}$$

$$\vdots$$

$$y^{(\nu)} = CA^\nu x + CA^{\nu-1}Bu + \dots + CBu^{(\nu-1)} \quad \dots$$

dont **seules les n premières** ($0 \leq \nu \leq n - 1$) donnent a priori des informations sur x . **Justification par le théorème de Cayley-Hamilton** qui dit qu'une matrice est solution de son polynôme caractéristique: si $P(s) = \det(sI - A)$ alors $P(A) \equiv 0$ et donc A^n est une combinaison linéaire des $(A^\nu)_{0 \leq \nu \leq n-1}$.

Le système en x à résoudre

Par Cayley-Hamilton, il suffit de regarder seulement les $n - 1$ premières dérivées de y :

$$y = Cx$$

$$\dot{y} = CAx + CBu$$

$$\ddot{y} = CA^2x + CABu + CB\dot{u}$$

\vdots

$$y^{(n-1)} = CA^{n-1}x + CA^{n-1}Bu + \dots + CBu^{(n-2)}$$

Ce système a **au plus une solution en x** , et seulement si, le rang de la matrice "colonne" $pn \times n$ ($p = \dim y$) ci-contre est égal à celui de ses colonnes (**opérateur injectif**), à savoir n .

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

Théorème (Critère de Kalman)

Le système $\frac{d}{dt}x = Ax + Bu$,
 $y = Cx$ ($A: n \times n$; $B: n \times m$;
 $C: p \times n$) est observable si, et
seulement si, le rang de la ma-
trice d'observabilité \mathcal{O} est égal à
 $n = \dim(x)$.

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

Pour abrégé, on dit souvent que la paire (A, C) est observable lorsque le rang de la matrice d'observabilité \mathcal{O} est maximum.

Dualité

Le système $\frac{d}{dt}x = Ax + Bu$, $y = Cx$ est observable (resp. commandable) si et seulement si $\frac{d}{dt}x = A^T x + C^T u$, $y = B^T x$ est commandable (resp. observable).

(A^T et B^T sont les transposées de A et B).

Forme normale (canonique) observateur (cas "SISO")

$$\frac{d}{dt}x = Ax + Bu, \quad y = Cx, \quad (\dim C = 1 \times n)$$

Changement de variables sur x et sur y ($x \mapsto Mx$ et $y \mapsto Ny$ avec M et N inversibles) mettant le système sous **forme canonique observateur**: il suffit de transposer les formules conduisant à la forme normale de Brunovsky.

La **forme canonique** est donc (B est arbitraire ici):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_0 \\ \dots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}$$
$$C = (0 \quad \dots \quad 0 \quad 1)$$

Observateur asymptotique sur la forme canonique (mono-sortie)

Avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad C = (0, \dots, 0, 1) \quad \text{et} \quad L = \begin{pmatrix} L_0 \\ \vdots \\ L_{n-1} \end{pmatrix}$$

on a

$$A - LC = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_0 - L_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 1 & a_{n-1} - L_{n-1} \end{pmatrix}$$

dont le polynôme caractéristique est:

$$s^n - (a_{n-1} - L_{n-1})s^{n-1} - \dots - (a_1 - L_1)s - (a_0 - L_0) = 0$$

On peut librement **choisir les pôles** de $A - LC$ si (A, C) est **observable** (transposition de la stabilisation par feedback et placement de pôles)

Observateur asymptotique pour $\frac{d}{dt}x = Ax + Bu, y = Cx$.

Soit \hat{x} solution de:

$$\frac{d}{dt}\hat{x} = \underbrace{A\hat{x} + Bu(t)}_{\text{prédiction}} - \underbrace{L(C\hat{x} - y(t))}_{\text{correction}}, \quad \hat{y} = C\hat{x}$$

Alors on voit que $\frac{d}{dt}(x - \hat{x}) = (A - LC)(x - \hat{x})$. Avec (A, C) observable on peut imposer les valeurs propres de $A - LC$ avec L . On les choisit stables. Alors \hat{x} est l'état d'un filtre stable des signaux $y(t)$ et $u(t)$ (passe bas) avec en plus $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t) - \hat{x}(t)) = 0$. On reconstitue **asymptotiquement** x via \hat{x} son estimée.

Le **filtre de Kalman** est une autre façon de calculer L en fonction des bruits Gaussiens sur le modèle et sur la mesure:

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t) + D\xi(t), \quad y(t) = Cx(t) + \varrho(t)$$

$\xi(t)$ et $\varrho(t)$ sont des **bruits blancs gaussiens centrés**

$$\mathbb{E}(\xi(t)) = 0, \quad \text{cov}(\xi(t), \xi(\tau)) = \mathbb{E}(\xi(t)\xi^T(\tau)) = M_\xi(t) \delta(t - \tau)$$

$$\mathbb{E}(\varrho(t)) = 0, \quad \text{cov}(\varrho(t), \varrho(\tau)) = \mathbb{E}(\varrho(t)\varrho^T(\tau)) = M_\varrho(t) \delta(t - \tau)$$

δ mesure de Dirac, M_ξ, M_ϱ **matrices de covariance** sym. déf. positives (ξdt et ϱdt sont des processus de Wiener vectoriels indépendants).

Observateur asymptotique pour $\frac{d}{dt}x = f(x, u)$, $y = h(x)$.

On cherche une estimation de \hat{x} solution de:

$$\frac{d}{dt}\hat{x} = \underbrace{f(\hat{x}, u(t))}_{\text{prédiction}} - \underbrace{L(\hat{x}, y(t), u(t))}_{\text{correction}}, \quad \hat{y} = h(\hat{x})$$

avec un terme $L(\hat{x}, y(t), u(t))$ vérifiant

- ▶ $L(x, h(x), u(t)) \equiv 0$ pour tout x et u : facile à satisfaire en général.
- ▶ $\lim_{t \rightarrow +\infty} \hat{x} - x = 0$: c'est la stabilité du filtre non-linéaire d'état \hat{x} ; on ne dispose pas de méthode générale garantissant sa convergence.

Le **filtre de Kalman étendu** est une méthode heuristique pour calculer les termes correctifs L . Elle est très utilisée par les ingénieurs. Elle nécessite des calculs assez lourds. Elle ne repose sur aucune preuve générale de convergence. En pratique, son bon fonctionnement repose sur un réglage adapté de ses paramètres et surtout sur le choix des bonnes variables pour écrire les équations du système. Ce choix dépend alors la nature des non-linéarités de $f(x, u)$ et $h(x)$.

Filtre de Kalman étendu pour les systèmes non-linéaires

On part de

$$\frac{d}{dt}x = f(x, u), \quad y = h(x)$$

où $t \mapsto y(t)$ et $t \mapsto u(t)$ sont des signaux connus du temps. A chaque instant, on cherche une estimation de $x(t)$, notée $\hat{x}(t)$ connaissant le modèle ci-dessus et aussi les valeurs passées des signaux $] - \infty, t] \ni \tau \mapsto (y(\tau), u(\tau))$ (estimation causale et temps-réel).
Le filtre de Kalman étendu d'état \hat{x} est donné par

$$\frac{d}{dt}\hat{x} = f(\hat{x}, u) - L \cdot (h(\hat{x}) - y)$$

où la matrice de gain de correction L est le résultat de l'intégration numérique d'une équation différentielle matricielle:

$$A = \partial_x f(\hat{x}, u)$$

$$L = -PC^T N$$

$$C = \partial_x h(\hat{x})$$

$$\frac{d}{dt}P = AP + PA^T + M^{-1} - PC^T NCP$$

où les matrices symétriques positives M et N sont des paramètres de réglage.

Observateur asymptotique non linéaire pour un réacteur exothermique

$$\frac{d}{dt}x_1 = D(x_1^{in} - x_1) - k_0 e^{-\frac{E}{RT}} x_1, \quad \frac{d}{dt}T = D(T^{in} - T) + k_1 e^{-\frac{E}{RT}} x_1 + u, \quad y = T.$$

Il est alors naturel de prendre (linéarisation par injection de sortie)

$$\frac{d}{dt}\hat{x}_1 = D(x_1^{in} - \hat{x}_1) - k_0 e^{-\frac{E}{RT}} \hat{x}_1, \quad \frac{d}{dt}\hat{T} = D(T^{in} - \hat{T}) + k_1 e^{-\frac{E}{RT}} \hat{x}_1 + u + L_T(T - \hat{T})$$

où L_T est un gain > 0 . Voici un raisonnement heuristique garantissant la convergence en deux étapes:

- ▶ comme $k_0 e^{-\frac{E}{RT}} > 0$ et $D > 0$, la dynamique sur \hat{x}_1 est stable et \hat{x}_1 converge vers x_1 car $\frac{d}{dt}(\hat{x}_1 - x_1) = -\left(D + k_0 e^{-\frac{E}{RT}}\right)(\hat{x}_1 - x_1)$.
- ▶ on peut donc remplacer \hat{x}_1 par x_1 dans l'équation donnant $\frac{d}{dt}\hat{T}$ et ainsi obtenir $\frac{d}{dt}(\hat{T} - T) = -(D + L_T)(\hat{T} - T)$ qui montre la convergence exponentielle vers 0 de $\hat{T} - T$.

Ce raisonnement heuristique peut être rendu parfaitement rigoureux mais au prix d'un obscurcissement quasi-total des arguments ci-dessus. Ces derniers utilisent la structure des non-linéarités du système pour se ramener à une forme triangulaire et au linéaire ...

Stabilité et contraction

On peut toujours écrire $\frac{d}{dt}\hat{x} = f(\hat{x}, u(t)) - L(\hat{x}, y(t), u(t))$ sous la forme $\frac{d}{dt}\hat{x} = \hat{f}(\hat{x}, t)$ où x est une solution particulière ($\frac{d}{dt}x = \hat{f}(x, t)$). La convergence de l'observateur veut dire heuristiquement qu'il oublie sa condition initiale: \hat{x} converge vers x quand t tend vers $+\infty$. Une condition suffisante de convergence souvent utile repose la notion de contraction. Supposons que la partie symétrique du jacobien

$$S(\hat{x}, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{x}} + \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{x}} \right)^T \right)$$

soit négative. Alors $\frac{d}{dt}\|x - \hat{x}\|^2 \leq 0$ pour la norme euclidienne. Si pour tout \hat{x} et t , $S(\hat{x}, t) \leq -\lambda I_d$ avec $\lambda > 0$ constant alors $\frac{d}{dt}\|x - \hat{x}\|^2 \leq -2\lambda\|x - \hat{x}\|^2$ et donc \hat{x} converge vers x exponentiellement $\|\hat{x}(t + \tau) - x(t + \tau)\| \leq \|\hat{x}(t) - x(t)\| e^{-\lambda\tau}$ pour tout t et $\tau > 0$.

Preuve de la contraction (cas euclidien)

Montrons que si $S(\hat{x}, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{x}} + \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{x}} \right)^T \right) \leq 0$, alors $\frac{d}{dt} \|x - \hat{x}\|^2 \leq 0$.

Soient \bar{t} , $\hat{x}(\bar{t})$, $x(\bar{t})$ et le segment $\gamma_{\bar{t}}(\sigma) = \sigma x(\bar{t}) + (1 - \sigma)\hat{x}(\bar{t})$ allant de $\hat{x}(\bar{t})$ à $x(\bar{t})$ pour $\sigma \in [0, 1]$. On note par $\gamma_t(\sigma)$ la solution de $\frac{d}{dt}\xi = \hat{f}(\xi, t)$ qui passe par $\gamma_{\bar{t}}(\sigma)$ en $t = \bar{t}$. Pour t fixé, la longueur de la courbe $\gamma_t(\sigma)$ est donnée par $L_t = \int_0^1 \left\| \frac{\partial}{\partial \sigma} \gamma_t(\sigma) \right\| d\sigma$. Un simple calcul donne

$$\frac{d}{dt} L_t = \int_0^1 \frac{\left\langle \frac{\partial^2}{\partial t \partial \sigma} \gamma_t(\sigma), \frac{\partial}{\partial \sigma} \gamma_t(\sigma) \right\rangle}{\left\| \frac{\partial}{\partial \sigma} \gamma_t(\sigma) \right\|} d\sigma \leq 0$$

car $\frac{\partial^2}{\partial t \partial \sigma} \gamma_t(\sigma) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \sigma} \gamma_t(\sigma)$. Comme $\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq L_t$ et $L_t \leq L_{\bar{t}}$ pour $t > \bar{t}$, on en déduit que $\|\hat{x}(t) - x(t)\| \leq \|\hat{x}(\bar{t}) - x(\bar{t})\|$ pour tout $t > \bar{t}$. D'où $\frac{d}{dt} \|x - \hat{x}\|^2 \leq 0$ en $t = \bar{t}$ avec \bar{t} arbitraire.

Exo: Reprendre la preuve avec comme hypothèse $S(\hat{x}, t) \leq -\lambda I_d$ et comme conclusion $\frac{d}{dt} \|x - \hat{x}\|^2 \leq -2\lambda \|x - \hat{x}\|^2$.

Contraction dans le cas Riemannien

Supposons que x (et \hat{x}) correspondent aux coordonnées locales sur une variété Riemannienne dont la métrique est donnée par la forme quadratique définie positive $G(x)$. Alors l'observateur asymptotique $\frac{d}{dt}\hat{x} = \hat{f}(\hat{x}, t)$ est dit contractant pour cette métrique si et seulement si,

$$\forall t, \hat{x}, \quad S(\hat{x}, t) = \frac{1}{2} \left(G \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{x}} + \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{x}} \right)^T G + \frac{\partial G}{\partial \hat{x}} \hat{f} \right) \leq 0.$$

Ainsi la distance riemannienne $d_G(\hat{x}, x)$ entre \hat{x} et x décroît au cours du temps. Si de plus $S(\hat{x}, t) \leq -\lambda G(\hat{x})$ avec $\lambda > 0$ constant alors

$$d_G(\hat{x}(t + \tau), x(t + \tau)) \leq d_G(\hat{x}(t), x(t)) e^{-\lambda \tau}$$

pour t et $\tau > 0$.

Exo: Montrer ce résultat en reprenant la preuve du cas euclidien où $G(x) \equiv I_d$.

Exemple d'observateur non linéaire asymptotique par contraction

Soit le système mécanique

$$\frac{d}{dt}x_1 = x_2, \quad \frac{d}{dt}x_2 = F(x_1, x_2, t), \quad y = x_1$$

avec $\frac{\partial F}{\partial x_2} \leq 0$. On considère l'observateur

$$\frac{d}{dt}\hat{x}_1 = \hat{x}_2 - L_1(\hat{x}_1 - y(t)), \quad \frac{d}{dt}\hat{x}_2 = F(y(t), \hat{x}_2) - L_2(\hat{x}_1 - y(t))$$

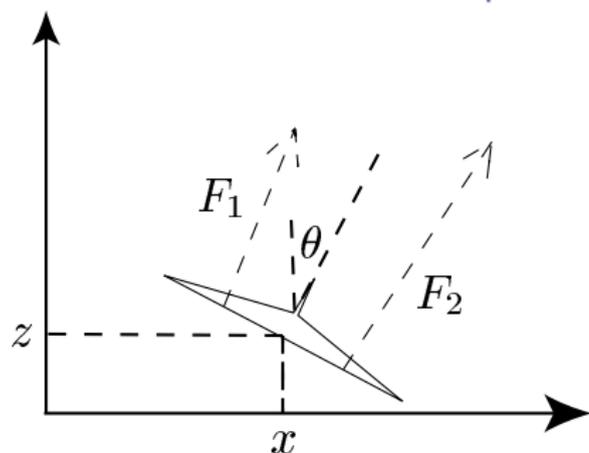
avec $L_1, L_2 > 0$ deux paramètres de réglage. Avec comme métrique

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \end{pmatrix} \text{ on a}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \hat{x}} \right)^T G + G \frac{\partial f}{\partial \hat{x}} = \begin{pmatrix} -2L_1 & 0 \\ 0 & \frac{2 \frac{\partial F}{\partial x_2}}{L_2} \end{pmatrix} \leq 0$$

Nous n'avons qu'une contraction au sens large. Si, en plus, $\frac{\partial F}{\partial x_2} \leq \beta < 0$ uniformément pour tout x avec $\beta > 0$, on a alors une contraction stricte avec la convergence exponentielle de \hat{x} vers x .

Observateur/Contrôleur sur le quadri-rotor 2D



Modèle mécanique simplifié:

$$\frac{d^2}{dt^2}x = -u_1 \sin \theta$$

$$\frac{d^2}{dt^2}z = u_1 \cos \theta - g$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta = u_2.$$

Le modèle en vitesse:

$$\frac{d}{dt}v_x = -u_1 \sin \theta, \quad \frac{d}{dt}v_z = u_1 \cos \theta - g, \quad \frac{d^2}{dt^2}\theta = u_2.$$

Tout l'état est mesuré mais avec du bruit:

- ▶ la caméra qui regarde le sol donne v_x
- ▶ le sonar qui regarde le sol donne v_z
- ▶ la centrale inertielle donne θ et aussi $v_\theta = \frac{d}{dt}\theta$.

Synthèse du feedback de suivi en supposant $|\theta| \ll 1$

Le modèle aux petits angles avec $x = (v_z, v_x, \theta, v_\theta)$:

$$\frac{d}{dt}v_z = u_1 - g, \quad \frac{d}{dt}v_x = -g\theta, \quad \frac{d}{dt}\theta = v_\theta, \quad \frac{d}{dt}v_\theta = u_2.$$

On souhaite suivre la trajectoire de référence

$t \mapsto (\bar{x}, \bar{u}) = (\bar{v}_z, \bar{v}_x, \bar{\theta}, \bar{v}_\theta, \bar{u}_1, \bar{u}_2)$:

- ▶ $u_1 = \bar{u}_1 - \frac{v_z - \bar{v}_z}{T_z}$ avec $T_z > 0$ assure le suivi en vertical avec $\frac{d}{dt}(v_z - \bar{v}_z) = -\frac{v_z - \bar{v}_z}{T_z}$.

- ▶ $u_2 = \bar{u}_2 + \frac{s_1(-g v_\theta + \ddot{v}_x)}{g} + \frac{s_2(-g\theta - \dot{v}_x)}{g} + \frac{s_3(v_x - \bar{v}_x)}{g}$ avec $X^3 + s_1X^2 + s_2X + s_3$ polynôme ayant toutes ces racines à parties réelles < 0 assure le suivi horizontal avec

$$\frac{d^3}{dt^3}(v_x - \bar{v}_x) + s_1 \frac{d^2}{dt^2}(v_x - \bar{v}_x) + s_2 \frac{d}{dt}(v_x - \bar{v}_x) + s_3(v_x - \bar{v}_x) = 0.$$

Filtrage des mesures de l'état

L'estimation \hat{x} à partir des mesures bruitées x^m de x est donnée par l'observateur suivant:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\hat{v}_z &= u_1 - g - L_{v_z}(\hat{v}_z - v_z^m), & \frac{d}{dt}\hat{v}_x &= -g\theta^m - L_{v_x}(\hat{v}_x - v_x^m), \\ \frac{d}{dt}\hat{\theta} &= v_\theta^m - L_\theta(\hat{\theta} - \theta^m), & \frac{d}{dt}\hat{v}_\theta &= u_2 - L_{v_\theta}(\hat{v}_\theta - v_\theta^m)\end{aligned}$$

avec des gains $L_\bullet > 0$. On remplace alors x par \hat{x} dans le feedback de suivi

$$\begin{aligned}u_1 &= \bar{u}_1 - \frac{v_z - \bar{v}_z}{T_z} \\ u_2 &= \bar{u}_2 + \frac{s_1(-gv_\theta - \ddot{v}_x)}{g} + \frac{s_2(-g\theta - \dot{v}_x)}{g} + \frac{s_3(v_x - \bar{v}_x)}{g}\end{aligned}$$

Génération temps-réel de la trajectoire de référence $t \mapsto (\bar{x}, \bar{u})$

On part de deux signaux bornés $t \mapsto (v_z^c, v_x^c)$ (consignes continues par morceaux sur (v_z, v_x) , les deux sorties de Brunovsky). On les régularise via les filtres passe-bas ($s = \frac{d}{dt}$ est la variable de Laplace):

$$\bar{v}_z = \frac{1}{P_z(s)} v_z^c, \quad \bar{v}_x = \frac{1}{P_x(s)} v_x^c$$

où $P_z(s)$ (resp. $P_x(s)$) est un polynôme en s avec racines stables de degré 2 (resp. 4) vérifiant $P_z(0) = 1$ (resp.

$P_x(0) = 1$). On peut prendre par exemple $P_z(s) = \frac{s^2}{\omega^2} + 2\xi \frac{s}{\omega} + 1$ et $P_x(s) = P_z(s)^2$ ($\omega, \xi > 0$ paramètres de réglage du filtre). Alors la trajectoire de référence sur l'état

$$\bar{x} = (\bar{v}_z, \bar{v}_x, -\dot{\bar{v}}_x/g, -\ddot{\bar{v}}_x/g)$$

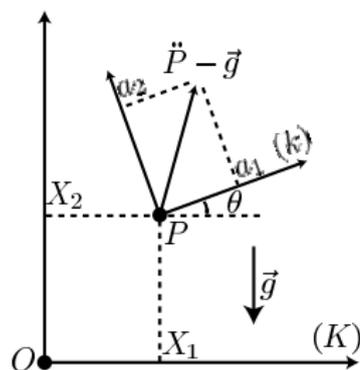
est C^1 en temps et sur le contrôle

$$\bar{u} = (\dot{\bar{v}}_z + g, -\bar{v}_x^{(3)}/g)$$

est continu en temps.

Navigation inertielle dans un plan vertical (correction à la séance suivante)

Exo:



Un corps solide (un avion par exemple) se déplace dans un plan vertical. On dispose à bord de deux accéléromètres et d'un gyromètre. Ces trois capteurs fournissent avec une fréquence d'échantillonnage rapide (de l'ordre du kHz) les deux composantes $a_1(t)$ et $a_2(t)$ de $\ddot{P} - \vec{g}$ dans le repère mobile (k) et la vitesse de rotation $\omega(t)$ de (k) par rapport au repère fixe (K) . On dispose aussi d'un GPS, qui fournit avec une fréquence d'échantillonnage bien plus lente (de l'ordre de quelques fractions de Hz) les coordonnées (X_1, X_2) de P dans (K) . L'objectif est de faire la fusion des données issues de ces deux types de capteurs pour en déduire une estimation, à la fréquence rapide, de la position (X_1, X_2) et de l'orientation θ . On souhaite aussi être robuste à des biais constants sur les accéléromètres et sur le gyromètre.

Le modèle du système est alors simplement ($g > 0$ paramètre)

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} X_1 &= a_1(t) \cos \theta - a_2(t) \sin \theta \\ \frac{d^2}{dt^2} X_2 &= a_1(t) \sin \theta + a_2(t) \cos \theta - g \\ \frac{d}{dt} \theta &= \omega(t) \end{cases} \quad (1)$$

où $t \mapsto (a_1(t), a_2(t), \omega(t))$ sont des signaux connus du temps et la sortie $y = (X_1, X_2)$ correspond à la position de P .

Navigation inertielle dans un plan vertical (suite et fin)

1. Montrer que (1) est observable avec comme données d'entrée $t \mapsto (a_1(t), a_2(t), \omega(t))$ et comme mesure (sortie) $y(t) = (X_1, X_2)$.
2. On suppose θ petit, $|a_1| \ll g$ et $|a_2 - g| \ll g$. Montrer que

$$\frac{d^2}{dt^2} X_1 = a_1(t) - g\theta, \quad \frac{d^2}{dt^2} X_2 = a_2(t) - g, \quad \frac{d}{dt} \theta = \omega(t) \quad (2)$$

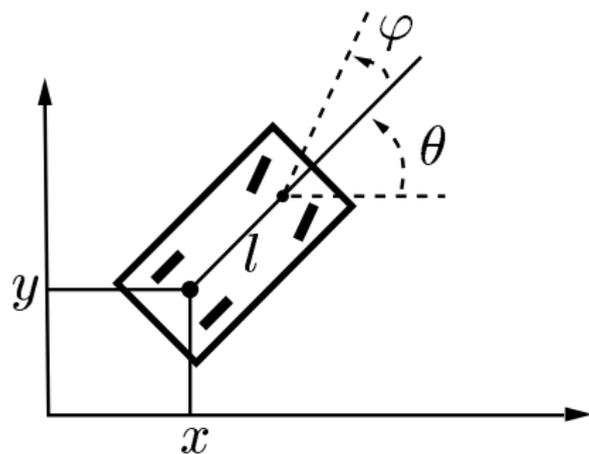
est alors une bonne approximation de (1).

3. Vérifier que (2) reste bien observable (au sens de la question 1) et construire un observateur asymptotique qui reconstruit l'état $(X_1, \dot{X}_1 = V_1, X_2, \dot{X}_2 = V_2, \theta)$.
4. On suppose que les mesures en temps quasi-continu a_1 , a_2 et ω ont des biais constants mais inconnus. Ainsi (2) devient:

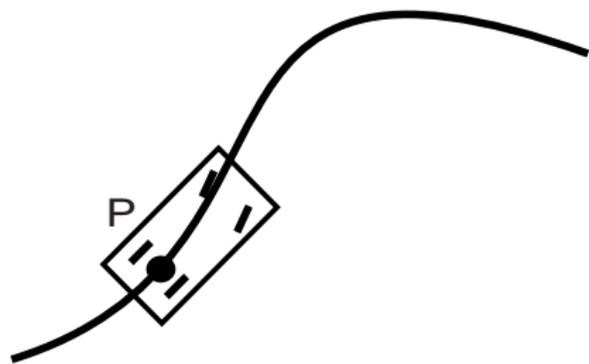
$$\frac{d^2}{dt^2} X_1 = a_1(t) + p_1 - g\theta, \quad \frac{d^2}{dt^2} X_2 = a_2(t) + p_2 - g, \quad \frac{d}{dt} \theta = \omega(t) + p$$

où (p_1, p_2, p) sont trois paramètres constants inconnus. Ce système avec biais est-il observable avec $y = (X_1, X_2)$ comme sortie ? Quel nombre de biais peut-on espérer estimer à partir de y ?

Cinématique de la voiture



$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x = u \cos \theta \\ \frac{d}{dt}y = u \sin \theta \\ \frac{d}{dt}\theta = u \frac{\tan \varphi}{l} = uv \end{cases}$$



$$\begin{cases} u = \pm \left\| \frac{d}{dt}P \right\| \\ \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} = \frac{\frac{d}{dt}P}{u} \\ v = \frac{\tan \varphi}{l} = \frac{\det(\ddot{P}, \dot{P})}{u\sqrt{|u|}} \end{cases}$$

Le groupe des déplacements du plan $SE(2)$, comme groupe de symétries

Pour tout (a, b, α) , la transformation

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \cos \alpha - Y \sin \alpha + a \\ X \sin \alpha + Y \cos \alpha + b \end{bmatrix}, \quad \theta = \Theta - \alpha, \quad (u, v) = (U, V)$$

laisse les équations

$$\frac{d}{dt}x = v \cos \theta, \quad \frac{d}{dt}y = v \sin \theta, \quad \frac{d}{dt}\theta = uv$$

inchangées :

$$\frac{d}{dt}X = V \cos \Theta, \quad \frac{d}{dt}Y = V \sin \Theta, \quad \frac{d}{dt}\Theta = UV.$$

Il faut que notre méthode de contrôle préserve cette invariance.

Systèmes invariants et symétries

- ▶ Les données sont un système commandé $\frac{d}{dt}x = f(x, u)$, $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ et $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ et un **groupe** G (a priori non commutatif) dont la loi de composition est notée $g_1 \cdot g_2 \in G$ pour tout $g_1, g_2 \in G$ et l'élément neutre est noté e ($e \cdot g = g$ et $g^{-1} \cdot g = g \cdot g^{-1}$ pour tout $g \in G$).
- ▶ On considère, associé à G , le **groupe de transformations** sur l'espace d'état \mathcal{X} , $(\varphi_g)_{g \in G}$ où pour chaque g , φ_g est un difféomorphisme régulier (au moins C^1) sur \mathcal{X} avec $\varphi_g^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$ et $\varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2} = \varphi_{g_1 \cdot g_2}$. On parle alors de **l'action de G sur \mathcal{X}** via le groupe de transformations (φ_g) . On considère de même l'action de G sur \mathcal{U} via le groupe de transformations $(\psi_g)_{g \in G}$.
- ▶ On en déduit l'action de G sur $\mathcal{X} \times \mathcal{U}$ via $(X, U) = (\varphi_g(x), \psi_g(u))$. Le système $\frac{d}{dt}x = f(x, u)$ est dit **invariant** si, et seulement si, $f(\varphi_g(x), \psi_g(u)) = D\varphi_g(x) \cdot f(x, u)$ pour tout g, x, u . Cela signifie que les équations en (X, U) $\frac{d}{dt}X = f(X, U)$ sont les mêmes que celles en (x, u) . G est simplement un **groupe de symétries** du système: si $(x(t), u(t))$ est une trajectoire, alors $\forall g \in G$, $(\varphi_g(x(t)), \psi_g(u(t)))$ est aussi une trajectoire du système.

Observateur invariant: exemple de la voiture

$$\frac{d}{dt}x_1 = u \cos \theta$$

$$\frac{d}{dt}x_2 = u \sin \theta$$

$$\frac{d}{dt}\theta = uv$$

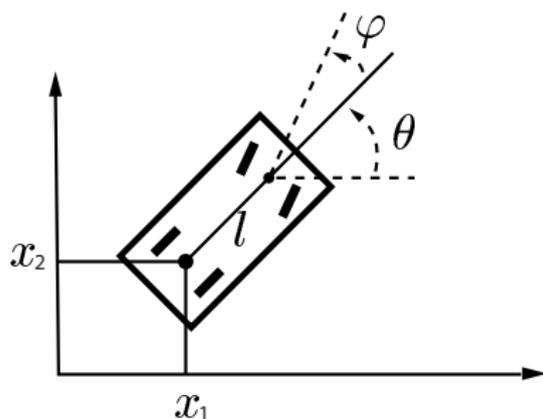
$$y = (y_1, y_2) = (x_1, x_2)$$

u et $v = \frac{\tan \varphi}{l}$ connus

Un observateur "géométrique":

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}\hat{x}_1 \\ \frac{d}{dt}\hat{x}_2 \\ \frac{d}{dt}\hat{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \cos \hat{\theta} \\ u \sin \hat{\theta} \\ uv \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{-\hat{\theta}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot L \cdot R_{\hat{\theta}} \cdot \begin{pmatrix} \hat{x}_1 - y_1 \\ \hat{x}_2 - y_2 \end{pmatrix}$$

où L est une matrice 3×2 de gains $R_{\hat{\theta}} := \begin{pmatrix} \cos \hat{\theta} & \sin \hat{\theta} \\ -\sin \hat{\theta} & \cos \hat{\theta} \end{pmatrix}$



Analyse de la convergence dans les bonnes variables

La bonne erreur $(\eta_1, \eta_2, \eta_\theta)$ entre l'état et son estimée:

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = R_{\hat{\theta}} \cdot \begin{pmatrix} \hat{x}_1 - x_1 \\ \hat{x}_2 - x_2 \end{pmatrix}, \quad \eta_\theta = \hat{\theta} - \theta, \quad R_{\hat{\theta}} := \begin{pmatrix} \cos \hat{\theta} & \sin \hat{\theta} \\ -\sin \hat{\theta} & \cos \hat{\theta} \end{pmatrix}$$

La dynamique de l'erreur ne dépend que de u, v :

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt} \eta_1 \\ \frac{d}{dt} \eta_2 \\ \frac{d}{dt} \eta_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(1 - \cos \eta_\theta) + uv\eta_2 \\ u \sin \eta_\theta - uv\eta_1 \\ 0 \end{pmatrix} + L \cdot \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

Choix des gains L sur l'approximation au premier ordre:

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt} \delta\eta_1 \\ \frac{d}{dt} \delta\eta_2 \\ \frac{d}{dt} \delta\eta_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uv\delta\eta_2 \\ u\delta\eta_\theta - uv\delta\eta_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -|u|a & -uv \\ uv & -|u|c \\ 0 & -ub \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\eta_1 \\ \delta\eta_2 \end{pmatrix}$$

avec les paramètres $a, b, c > 0$ directement liés aux constantes de temps de convergence locale.

Groupe de transformations et invariance

Soit G un groupe de Lie avec e comme élément neutre et Σ un ouvert dans \mathbb{R}^n . Un **groupe de transformations (locales)** $(\phi_g)_{g \in G}$ sur Σ est une application régulière

$$(g, \xi) \in G \times \Sigma \mapsto \phi_g(\xi) \in \Sigma$$

telle que :

- ▶ $\phi_e(\xi) = \xi$ pour tout ξ
- ▶ $\phi_{g_2} \circ \phi_{g_1}(\xi) = \phi_{g_2 g_1}(\xi)$ pour tout g_1, g_2, ξ

Une application $\Sigma \ni \xi \mapsto J(\xi) \in \mathbb{R}$ est **invariante** ssi

$$J(\phi_g(\xi)) = J(\xi) \quad \text{pour tout } g, \xi$$

Un champ de vecteurs sur Σ $\xi \mapsto w(\xi)$ est **invariant** ssi

$$w(\phi_g(\xi)) = D\phi_g(\xi) \cdot w(\xi) \quad \text{pour tout } g, \xi$$

¹On peut voir un champ de vecteurs comme une équation différentielle $\frac{d}{dt}\xi = w(\xi)$.

Calcul d'invariants par la méthode du repère mobile de Darboux/Cartan

On suppose $\dim g \leq \dim \xi$. On pose $\phi_g = (\phi_g^a, \phi_g^b)$, $\xi = (\xi^a, \xi^b)$ avec, pour chaque $\xi \in \Sigma$, $g \mapsto \phi_g^a(\xi)$ inversible par rapport à g :²

- ▶ On **normalise** i.e. on résout $\phi_g^a(\xi) = \bar{\xi}^a$ pour g , soit $g = \gamma(\xi)$ (i.e. $\phi_{\gamma(\xi)}^a(\xi) = \bar{\xi}^a$ où la normalisation $\bar{\xi}^a$ est fixée une fois pour toute). Alors l'application $\xi \mapsto I(\xi) := \phi_{\gamma(\xi)}^b(\xi)$ est **invariante**. On a même plus: toute autre fonction invariante $K(\xi)$, il existe une fonction Φ telle que $K(\xi) = \Phi(I(\xi))$; On dit que les composantes de I forment un **ensemble complet d'invariants scalaires**.
- ▶ Le **champ de vecteurs** $\xi \mapsto w(\xi) := (D\phi_{\gamma(\xi)}(\xi))^{-1} \cdot e$, où e est un vecteur constant, est invariant.
- ▶ En particulier la collection des $\dim \xi$ champs de vecteurs invariants, $w_i(\xi) := [D\phi_{\gamma(\xi)}(\xi)]^{-1} \cdot e_i$, $i = 1, \dots, \dim \xi$ forme un **repère (mobile) invariant** dès que les vecteurs e_i forment une base de $\mathbb{R}^{\dim \xi}$.
- ▶ Tout champ de vecteurs invariant $w(\xi)$ est une combinaison linéaire des w_i , $w(\xi) = \sum_i K_i(\xi) w_i(\xi)$ les fonctions $K_i(\xi)$ étant des invariants scalaires.

²On a $\dim \phi_g^a = \dim g = \dim \xi^a$ et $\dim \phi_g^b = \dim \phi_g - \dim g = \dim \xi^b$ ▶ ☰ ↻ 🔍

Systèmes et observateurs invariants

Les données sont un système d'entrée u , d'état x , de sortie y

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x &= f(x, u), & x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n, u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m \\ y &= h(x, u), & y \in \mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^p\end{aligned}$$

et un groupe de transformations associé au groupe de Lie G de dimension r : $(X, U, Y) = (\varphi_g(x), \psi_g(u), \varrho_g(y))$

Le système $\frac{d}{dt}x = f(x, u)$ est *invariant* ssi

$$f(\varphi_g(x), \psi_g(u)) = D\varphi_g(x) \cdot f(x, u) \quad \text{pour tout } g, x, u$$

La sortie $y = h(x, u)$ est *équivariante* ssi

$$h(\varphi_g(x), \psi_g(u)) = \varrho_g(h(x, u)) \quad \text{pour tout } g, x, u$$

Le système $\frac{d}{dt}\hat{x} = F(\hat{x}, u, y)$ est un *pré-observateur* ssi

$$F(x, u, h(x, u)) = f(x, u) \quad \text{pour tout } x, u$$

Le pré-observateur $\frac{d}{dt}\hat{x} = F(\hat{x}, u, y)$ est *invariant* ssi

$$F(\varphi_g(\hat{x}), \psi_g(u), \varrho_g(y)) = D\varphi_g(\hat{x}) \cdot F(\hat{x}, u, y) \quad \text{pour tout } g, \hat{x}, u, y$$

Forme générale des pré-observateurs invariants

Chaque pré-observateur invariant s'écrit

$$\frac{d}{dt} \hat{x} = \underbrace{f(\hat{x}, u)}_{n \times 1} + \underbrace{W(\hat{x})}_{n \times n} \cdot \underbrace{L(I(\hat{x}, u), E(\hat{x}, u, y))}_{n \times p} \cdot \underbrace{E(\hat{x}, u, y)}_{p \times 1}$$

avec $\dim x = n$, $\dim u = m$, $\dim y = p$ et où

- ▶ $E(\hat{x}, u, y)$ est une erreur de sortie invariante (voir ci-dessous la définition)
- ▶ $W(\hat{x}) = (w_1(\hat{x}), \dots, w_n(\hat{x}))$ est un repère mobile invariant et $I(\hat{x}, u)$ est invariant
- ▶ $L(I, E)$ est une matrices $n \times p$ de gains dont les éléments dépendent de I et E . Il faut les choisir astucieusement de façon à assurer la convergence de \hat{x} vers x .

$(\hat{x}, u, y) \mapsto E(\hat{x}, u, y) \in \mathcal{Y}$ est une **erreur de sortie invariante** ssi

- ▶ $y \mapsto E(\hat{x}, u, y)$ est inversible pour tout \hat{x}, u
- ▶ $E(\hat{x}, u, h(\hat{x}, u)) = 0$ pour tout \hat{x}, u
- ▶ $E(\varphi_g(\hat{x}), \psi_g(u), \varrho_g(y)) = E(\hat{x}, u, y)$ pour tout \hat{x}, u, y

Construction de pré-observateurs invariants

$$\frac{d}{dt}\hat{x} = f(\hat{x}, u) + W(\hat{x}) \cdot L\left(l(\hat{x}, u), E(\hat{x}, u, y)\right) \cdot E(\hat{x}, u, y)$$

Lorsque l'action de G sur \mathcal{X} est de rang $r = \dim G$ (implique $r \leq \dim \mathcal{X}$) alors on sait construire (méthode du repère mobile)

- ▶ une **normalisation** $g = \gamma(x)$ via l'action de G sur \mathcal{X} :
 $\varphi_g = (\varphi_g^a, \varphi_g^b)$ avec $g \mapsto \varphi_g^a(x)$ inversible par rapport à g et $\gamma(x)$ défini par $\varphi_{\gamma(x)}^a(x) = \bar{x}^a$ où \bar{x}^a est une normalisation portant sur r composantes de $x = (x^a, x^b)$.
- ▶ un **repère invariant** comme par exemple
 $W(\hat{x}) = (w_1(\hat{x}), \dots, w_n(\hat{x})) = (D\phi_{\gamma(\hat{x})}(\hat{x}))^{-1}$.
- ▶ un **ensemble complet d'invariants** $l(\hat{x}, u)$ liés à l'action de G sur $(\hat{x}, u) \in \mathcal{X} \times \mathcal{U}$: $l(\hat{x}, u) = (\varphi_{\gamma(\hat{x})}^b(\hat{x}), \psi_{\gamma(\hat{x})}(u))$.
- ▶ Une **erreur de sortie invariante** $E(\hat{x}, u, y)$ en considérant l'action de G sur $(\hat{x}, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$:

$$E(\hat{x}, u, y) = \varrho_{\gamma(\hat{x})}(h(\hat{x}, u)) - \varrho_{\gamma(\hat{x})}(y).$$

Dynamique de l'erreur invariante sur l'état

$(\hat{x}, x) \mapsto \eta(\hat{x}, x) \in \mathcal{X}$ est une **erreur d'état invariante** ssi

- ▶ pour tout \hat{x} , $x \mapsto \eta(\hat{x}, x)$ est inversible (ou pour tout x , $\hat{x} \mapsto \eta(\hat{x}, x)$ inversible) et $\eta(x, x) = 0$ pour tout x .
- ▶ $\eta(\varphi_g(\hat{x}), \varphi_g(x)) = \eta(\hat{x}, x)$ pour tout \hat{x}, x .

Lorsque l'action de G sur \mathcal{X} est de rang $r = \dim G$

- ▶ On considère l'action de G sur $(x, \hat{x}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, on utilise la normalisation $\gamma(x)$ et alors $\eta(\hat{x}, x) = \varphi_{\gamma(x)}(\hat{x}) - \varphi_{\gamma(x)}(x)$ (ou $\eta(\hat{x}, x) = \varphi_{\gamma(\hat{x})}(\hat{x}) - \varphi_{\gamma(\hat{x})}(x)$) est une **erreur invariante sur l'état**.
- ▶ la dynamique de l'erreur η est de la forme $\frac{d}{dt}\eta = Q(\eta, I(\hat{x}, u))$ où $I(\hat{x}, u)$ est un **ensemble complet d'invariants** $I(\hat{x}, u)$ liés à l'action de G sur $(\hat{x}, u) \in \mathcal{X} \times \mathcal{U}$.

Lorsque $\dim G = \dim \mathcal{X}$ alors on peut considérer que $G \equiv \mathcal{X}$, que l'action de G sur \mathcal{X} correspond à $\varphi_g(x) = g \cdot x$ (translations à gauche). Alors $I = I(u)$ et la **dynamique de l'erreur est alors autonome**: $\frac{d}{dt}\eta = Q(\eta, I(u))$.³

³Les gains L de l'observateur sont alors ajustés pour garantir la convergence locale autour des points d'équilibres de $\frac{d}{dt}\eta = Q(\eta, I(u))$ (trajectoires permanentes associées à u constant).

Retour à l'exemple de la voiture

L'invariance par rotations/translations ($G = SE(2)$, groupe de Lie à $r = 3$ paramètres $g \equiv (g_1, g_2, g_3)$) vient de

$$\varphi_{(g_1, g_2, g_3)}(x_1, x_2, \theta) \equiv \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos g_3 - x_2 \sin g_3 + g_1 \\ x_1 \sin g_3 + x_2 \cos g_3 + g_2 \\ \theta + g_3 \end{pmatrix}$$

$$\psi_{(g_1, g_2, g_3)}(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \varrho_{(g_1, g_2, g_3)}(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_1 \cos g_3 - y_2 \sin g_3 + g_1 \\ y_1 \sin g_3 + y_2 \cos g_3 + g_2 \end{pmatrix}.$$

L'observateur géométrique est en fait un observateur invariant:

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt} \hat{x}_1 \\ \frac{d}{dt} \hat{x}_2 \\ \frac{d}{dt} \hat{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \cos \hat{\theta} \\ u \sin \hat{\theta} \\ uv \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} R_{-\hat{\theta}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{W(\hat{x})} \cdot L \cdot \underbrace{R_{\hat{\theta}} \cdot \begin{pmatrix} \hat{x}_1 - y_1 \\ \hat{x}_2 - y_2 \end{pmatrix}}_{E(\hat{x}, y, u)}$$

où L est une matrice de gains 3×2 et $R_{\hat{\theta}} := \begin{pmatrix} \cos \hat{\theta} & \sin \hat{\theta} \\ -\sin \hat{\theta} & \cos \hat{\theta} \end{pmatrix}$

Navigation inertielle et invariance

Exo: On reprend ici l'exercice précédent sur la navigation inertielle en notant $(u_1, u_2) = (a_1, a_2)$, $(u_3, u_4) = (0, -g_{\text{grav}})$ et $u_5 = \omega$. Avec la sortie $y = (X_1, X_2)$ le système s'écrit $\frac{d^2}{dt^2} X_1 = u_1 \cos \theta - u_2 \sin \theta + u_3$, $\frac{d^2}{dt^2} X_2 = u_1 \sin \theta + u_2 \cos \theta + u_4$, $\frac{d}{dt} \theta = u_5$.

1. Montrer que ce système est invariant par rapport à l'action du groupe $G = SE(2)$ des translations/rotations du plan. Donner les formules pour les transformations φ_g , ψ_g et ρ_g sur l'espace d'état \mathcal{X} , l'espace des entrées \mathcal{U} et l'espace de sortie \mathcal{Y} . On notera $x = (X_1, X_2, \dot{X}_1 = V_1, \dot{X}_2 = V_2, \theta)$ l'état du système et $g = (g_1, g_2, g_3)$ les trois paramètres de G (translation (g_1, g_2) et rotation g_3).
2. Reprendre l'observateur asymptotique sur le système linéarisé $\frac{d^2}{dt^2} X_1 = u_1 + g_{\text{grav}} \theta$, $\frac{d^2}{dt^2} X_2 = u_2 - g_{\text{grav}} \theta$, $\frac{d}{dt} \theta = u_5$ et $y = (X_1, X_2)$ liés aux hypothèses θ petit, $(u_1 - u_3)^2 + (u_2 - u_4)^2 \ll g_{\text{grav}}^2$ ($u_3 = 0$, $u_4 = -g_{\text{grav}}$).
3. Construire un observateur invariant d'état ayant le même linéaire tangent que l'observateur linéaire de la question précédente.

Correction de l'exercice

Question 1: Il suffit de remarquer que $y = (X_1, X_2)$ sont les coordonnées d'un point dans le repère fixe, que (u_1, u_2) celles d'un vecteur dans le repère engin et (u_3, u_4) celles d'un vecteur dans le repère fixe. On a alors

$$\varphi_g(x) = \begin{pmatrix} R_{-g_3} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \\ R_{-g_3} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \\ \theta + g_3 \end{pmatrix}, \quad \psi_g(u) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ R_{-g_3} \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \\ u_5 \end{pmatrix}$$
$$\varrho_g(y) = \begin{pmatrix} R_{-g_3} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, \quad R_{g_3} = \begin{pmatrix} \cos g_3 & \sin g_3 \\ -\sin g_3 & \cos g_3 \end{pmatrix}$$

où R_{g_3} est associée à une rotation d'angle g_3 partant du repère fixe.

Question 2: On a affaire à deux sous-systèmes indépendants: avec $L_{X_2}, L_{V_2} > 0$, les estimées \hat{X}_2 et \hat{V}_2 vérifiant

$$\frac{d}{dt} \hat{X}_2 = \hat{V}_2 - L_{X_2}(\hat{X}_2 - y_2), \quad \frac{d}{dt} \hat{V}_2 = u_2 - g_{\text{grav}} - L_{V_2}(\hat{X}_2 - y_2),$$

convergent vers $y_2 = X_2$ et V_2 . Avec $L_{X_1}, L_{V_1}, L_\theta$ calculés en fonction de trois valeurs propres stables (placement de pôles) les estimées \hat{X}_2, \hat{V}_2 et $\hat{\theta}$

$$\frac{d}{dt} \hat{X}_1 = \hat{V}_1 - L_{X_1}(\hat{X}_1 - y_1), \quad \frac{d}{dt} \hat{V}_1 = u_1 + g_{\text{grav}} \hat{\theta} - L_{V_1}(\hat{X}_1 - y_1), \quad \frac{d}{dt} \hat{\theta} = u_5 - L_\theta(\hat{X}_1 - y_1)$$

convergent vers $y_1 = X_1, V_1$ et θ .

Correction de l'exercice (suite)

Question 3 Tout repose sur la construction du repère et des erreurs de sorties invariantes. On utilise la méthode du repère mobile avec la normalisation $\gamma(x)$ où $\varphi_g^a(x)$ est formé par les trois composantes associées à X_1 , X_2 et θ : $\varphi_g^a(x) = (0, 0, 0)$ donne alors

$$g_1 = -X_1 \cos \theta - X_2 \sin \theta, \quad g_2 = X_1 \sin \theta - X_2 \cos \theta, \quad g_3 = -\theta.$$

L'erreur de sortie invariante $\varrho_{\gamma(\hat{x})}(\hat{y}) - \varrho_{\gamma(\hat{x})}(y)$ donne $R_{\hat{\theta}}(\hat{y} - y)$ soit les deux composantes suivantes

$$E_1 = (\hat{y}_1 - y_1) \cos \hat{\theta} + (\hat{y}_2 - y_2) \sin \hat{\theta}, \quad E_2 = -(\hat{y}_1 - y_1) \sin \hat{\theta} + (\hat{y}_2 - y_2) \cos \hat{\theta}.$$

Le repère invariant donne 5 champs de vecteurs invariants dont les composantes sont les colonnes de l'inverse de la matrice jacobienne $(D\varphi_{\gamma(x)}(x))^{-1}$ formée par les dérivées partielles des composantes de $\varphi_g(x)$ par rapport aux composantes de x :

$$\begin{pmatrix} \cos \hat{\theta} & \sin \hat{\theta} & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \hat{\theta} & \cos \hat{\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \hat{\theta} & \sin \hat{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \hat{\theta} & \cos \hat{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \hat{\theta} & -\sin \hat{\theta} & 0 & 0 & 0 \\ \sin \hat{\theta} & \cos \hat{\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \hat{\theta} & -\sin \hat{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sin \hat{\theta} & \cos \hat{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice (suite et fin)

Pour $|\theta|$ petit, $E_1 \approx (\hat{X}_1 - y_1)$ et $E_2 \approx (\hat{X}_2 - y_2)$. Ainsi un prolongement invariant de l'observateur linéaire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{X}_2 &= \hat{V}_2 - L_{X_2}(\hat{X}_2 - y_2), & \frac{d}{dt} \hat{V}_2 &= a_2 - g_{\text{grav}} - L_{V_2}(\hat{X}_2 - y_2), \\ \frac{d}{dt} \hat{X}_1 &= \hat{V}_1 - L_{X_1}(\hat{X}_1 - y_1), & \frac{d}{dt} \hat{V}_1 &= a_1 + g_{\text{grav}} \hat{\theta} - L_{V_1}(\hat{X}_1 - y_1), & \frac{d}{dt} \hat{\theta} &= \omega - L_{\theta}(\hat{X}_1 - y_1) \end{aligned}$$

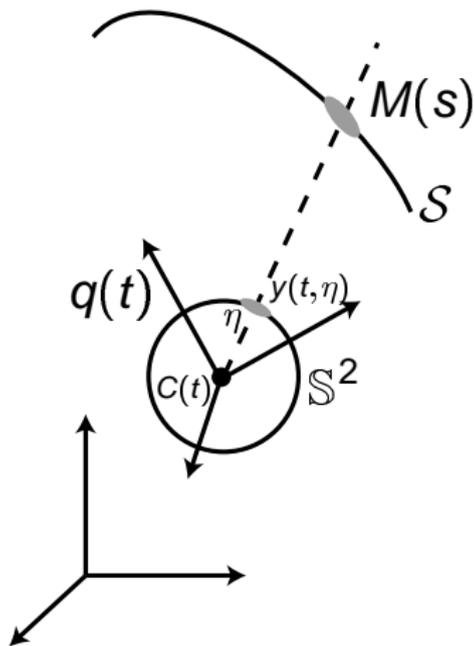
est alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{X}_1 &= \hat{V}_1 - L_{X_1} E_1 \cos \hat{\theta} + L_{X_2} E_2 \sin \hat{\theta} \\ \frac{d}{dt} \hat{X}_2 &= \hat{V}_2 - L_{X_1} E_1 \sin \hat{\theta} - L_{X_2} E_2 \cos \hat{\theta} \\ \frac{d}{dt} \hat{V}_1 &= a_1 \cos \hat{\theta} - a_2 \sin \hat{\theta} - L_{V_1} E_1 \cos \hat{\theta} + L_{V_2} E_2 \sin \hat{\theta} \\ \frac{d}{dt} \hat{V}_2 &= a_1 \sin \hat{\theta} + a_2 \cos \hat{\theta} - g_{\text{grav}} - L_{V_1} E_1 \sin \hat{\theta} - L_{V_2} E_2 \cos \hat{\theta} \\ \frac{d}{dt} \hat{\theta} &= \omega - L_{\theta} E_1. \end{aligned}$$

On rappelle que $u_1 = a_1$, $u_2 = a_2$, $u_3 = 0$, $u_4 = -g_{\text{grav}}$, $u_5 = \omega$ et

$$E_1 = (\hat{X}_1 - y_1) \cos \hat{\theta} + (\hat{X}_2 - y_2) \sin \hat{\theta}, \quad E_2 = -(\hat{X}_1 - y_1) \sin \hat{\theta} + (\hat{X}_2 - y_2) \cos \hat{\theta}.$$

Les principales hypothèses



Engin: position $C(t) \in \mathbb{R}^3$ et orientation $q(t) \in \mathbb{H}$ (définie par un quaternion unitaire (voir plus loin)).

Image: dans le repère engin $\mathbb{S}^2 \ni \eta \mapsto y(t, \eta) \in [0, 1]$: $y(t, \eta)$ correspond au flux de photons reçu de la direction η et émis par $M(s) \in \mathcal{S}$. La scène est modélisée par une surface $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ entourant l'engin et difféomorphe à la sphère unité $\mathbb{S}^2 \ni s$

(t, η, s) sont reliés par $q\eta q^* = \frac{\overrightarrow{C(t)M(s)}}{\|C(t)M(s)\|}$. Pour chaque t , on suppose que cette relation définit un **difféomorphisme** $\mathbb{S}^2 \ni \eta \mapsto s = \varphi(t, \eta) \in \mathbb{S}^2$ (les hypothèses du théorème des fonctions implicites sont supposées être remplies).

Quaternions et matrices de rotations

On part des trois **matrices de Pauli** ($\imath = \sqrt{-1}$)

$$I_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Elles vérifient $\sigma_k^2 = I_d$, $\sigma_k \sigma_j = -\sigma_j \sigma_k$ pour $k \neq j$, et $\sigma_1 \sigma_2 = \imath \sigma_3$, $\sigma_2 \sigma_3 = \imath \sigma_1$, $\sigma_3 \sigma_1 = \imath \sigma_2$. Toute matrice unitaire complexe $U \in SU(2)$ ($UU^\dagger = I_d$, $\det U = 1$) s'écrit $U = q_0 I_d - q_1 \imath \sigma_1 - q_2 \imath \sigma_2 - q_3 \imath \sigma_3$ avec $(q_0, q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^4$ tels que $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$. On pose

$$1 = I_d, \quad e_1 = -\imath \sigma_1, \quad e_2 = -\imath \sigma_2, \quad e_3 = -\imath \sigma_3$$

et on identifie le groupe $SU(2)$ avec celui des **quaternions unitaires** $q \in \mathbb{H}_1$, $q = q_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3$. Il s'agit des $q \in \mathbb{H}$ tels que $qq^* = 1$ où $q^* = q_0 - q_1 e_1 - q_2 e_2 - q_3 e_3$ est le conjugué de q . On a, pour $k = 1, 2, 3$, $j \neq k$ et $\phi \in \mathbb{R}$: $e_k^2 = -1$, $e_k e_j = -e_j e_k$, $e^{\phi e_k} = \cos \phi + e_k \sin \phi$, $e_1 e_2 = e_3$, $e_2 e_3 = e_1$ et $e_3 e_1 = e_2$.

Tout **vecteur** $p \in \mathbb{R}^3$ est **identifié** à $p = p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3 \in \mathbb{H}$. A tout $q \in \mathbb{H}_1$, on associe une matrice de rotation $R \in SO(3)$ via: $Rp = q^* p q$, pour tout $p \in \mathbb{R}^3$. Réciproquement, à toute rotation $R \in SO(3)$ sont associés deux quaternions q et $-q$ de longueur 1. On identifie, au signe près (spin), \mathbb{H}_1 et $SO(3)$. Le produit vectoriel de deux vecteurs $\omega, v \in \mathbb{R}^3$ correspond au commutateur: $\omega \wedge v = (\omega v - v \omega)/2$.

Equations différentielles ordinaires de l'engin

Avec

- ▶ $q(t) \in \mathbb{H}_1$, l'orientation de l'engin est représentée par le quaternion unitaire q dépendant du temps t .
- ▶ $\mathbb{R}^3 \ni v = q^* \frac{dC}{dt} q$, le vecteur vitesse dans le repère engin (multiplication au sens des quaternions);
- ▶ $\omega \in \mathbb{R}^3$, le vecteur vitesse instantanée de rotation dans le repère engin donnée par les gyroscopes.
- ▶ $a(t) \in \mathbb{R}^3$, le vecteur accélération spécifique dans le repère engin donnée par les accéléromètres;
- ▶ $A_{\text{grav}} \in \mathbb{R}^3$, le vecteur gravité dans le repère fixe;

on a (4+3 équations différentielles scalaires):

$$\frac{d}{dt} q = \frac{1}{2} q \omega, \quad \frac{d}{dt} v = v \wedge \omega + q^* A_{\text{grav}} q + a$$

où les signaux d'entrées sont les vecteurs a et ω issus des capteurs inertiels embarqués sur l'engin (ici A_{grav} est un vecteur fixe).

Fusion avec pré-traitement d'image

On suppose qu'un **traitement approprié d'image permet de suivre la position** $y_k(t) \in \mathbb{S}^2$ d'un point M_k qui est fixe dans l'environnement:

$$y_k = q^* \frac{\overrightarrow{C(t)M_k}}{\|\overrightarrow{C(t)M_k}\|} q. \text{ Avec } \Gamma_k = \frac{1}{\|\overrightarrow{C(t)M_k}\|} \text{ on a } \frac{d}{dt} y_k = y_k \wedge (\omega + \Gamma_k y_k \wedge v)$$

$$\text{et } \frac{d}{dt} \Gamma_k = \Gamma_k^2 y_k \cdot v.$$

On suppose que l'on suit m points M_1, \dots, M_m via un traitement approprié d'image. On est face à **l'estimation de la vitesse v et l'orientation $q \in \mathbb{H}_1$** à partir des mesures y_1, \dots, y_m dans \mathbb{S}^2 :

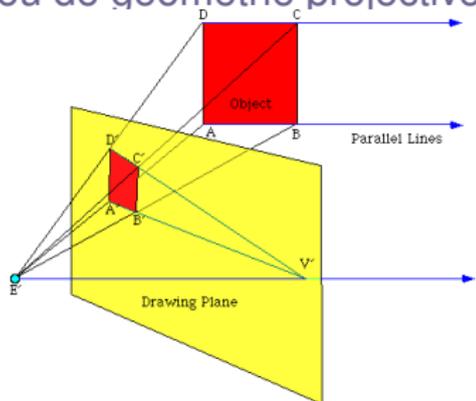
$$\frac{d}{dt} q = \frac{1}{2} q \omega, \quad \frac{d}{dt} v = v \wedge \omega + q^* A_{\text{grav}} q + a$$

$$\frac{d}{dt} y_k = y_k \wedge (\omega + \Gamma_k y_k \wedge v), \quad \frac{d}{dt} \Gamma_k = \Gamma_k^2 y_k \cdot v, \quad k = 1, \dots, m$$

L'état est $x = (q, v, y_1, \Gamma_1, \dots, y_m, \Gamma_m)$, la sortie $y = (y_1, \dots, y_m)$ et l'entrée $u = (\omega, a)$. Ce système est **invariant par rapport à $G = \mathbb{H}_1$** où, pour $g \in \mathbb{H}_1$, on pose:

$$\varphi_g \begin{pmatrix} q \\ v \\ y_k \\ \Gamma_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qg \\ g^* v g \\ g^* y_k g \\ \Gamma_k \end{pmatrix}, \quad \psi_g \begin{pmatrix} \omega \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^* \omega g \\ g^* a g \end{pmatrix}, \quad \varrho_g(y_k) = (g^* y_k g)$$

Un peu de géométrie projective avec le point à l'infini



Soient quatre points distinctes M_i, M_j, M_k et M_l tels que $\overrightarrow{M_i M_j}$ et $\overrightarrow{M_k M_l}$ sont colinéaires et définissent un vecteur connu et constant W dans le repère fixe. Comme $q^* W q$ est orthogonal à la fois à $y_i \wedge y_j$ et à $y_k \wedge y_l$, $q^* W q$ est nécessairement co-linéaire à $w = (y_i \wedge y_j) \wedge (y_k \wedge y_l)$ soit $q^* W q \wedge w = 0$.

Supposons que l'on ait r quadruples (M_i, M_j, M_k, M_l) avec $\overrightarrow{M_i M_j} \parallel \overrightarrow{M_k M_l}$. Alors on dispose de r vecteurs unitaires W_ν dans le repère fixe tels que $q^* W_\nu q \wedge w_\nu = 0$ où les w_ν sont des produits vectoriels de certains y_k . Se repose alors l'estimation de la vitesse v et de l'orientation $q \in \mathbb{H}_1$ à partir des mesures y_1, \dots, y_m complétées par $q^* W_\nu q \wedge w_\nu = 0$ pour $\nu = 1, \dots, r$:

$$\frac{d}{dt} q = \frac{1}{2} q \omega, \quad \frac{d}{dt} v = v \wedge \omega + q^* A_{\text{grav}} q + a$$

$$\frac{d}{dt} y_k = y_k \wedge (\omega + \Gamma_k y_k \wedge v), \quad \frac{d}{dt} \Gamma_k = \Gamma_k^2 y_k \cdot v, \quad k = 1, \dots, n$$

À la place de $q^* W_\nu q \wedge w_\nu = 0$, on peut aussi prendre, si on connaît les vecteurs fixes $\overrightarrow{M_i M_j}$ les $m(m-1)$ relations scalaires: $q^* \overrightarrow{M_i M_j} q \cdot (y_i \wedge y_j) = 0$, $i, j \in \{1, \dots, m\}, i \neq j$ (équation implicite de sortie).

Hypothèses photométriques sur la formation de l'image⁴

Un modèle physique multi-spectrale (modèle de Kubelka-Munk de surface mate et lambertienne)

$$f(\lambda, s) = i(s)R_{\infty}(\lambda, s), \quad \lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}], \quad M(s) \in \mathcal{S}$$

où

- ▶ $f(\lambda, s)$: flux de photons de longueur d'onde λ émis par $M(s)$ dans une direction quelconque (isotropie à l'émission).
- ▶ $i(s)$: flux de photons de longueur d'onde λ reçus par $M(s)$ (spectre d'illumination blanc).
- ▶ $R_{\infty}(\lambda, s)$: réflectivité de la surface \mathcal{S} autour de $M(s)$.

Le flux de photons reçus en C , de longueur d'onde λ et émis par $M(s)$ est alors **proportionnel** à $f(\lambda, s)$. Pour une image avec niveau de gris:

$$y(t, \eta) = I(s) \quad \text{avec} \quad s = \varphi(t, \eta), \quad I(s) \propto \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} f(\lambda, s) d\lambda.$$

⁴J.M. Geusebroek, R. van den Boomgaard, A.W.M. Smeulders, H. Geerts: Color Invariance. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 23, no. 12, december 2001

Modèle géométrique de l'image

On suppose que la caméra embarquée sur l'engin donne accès à une image sphérique sur un angle solide de 4π . Ainsi, les pixels sont repérés par un vecteur unitaire η dans le repère engin et la valeur du pixel η à l'instant t est donnée par $y(t, \eta) = I(s)$ où s est défini par $q\eta q^* = \frac{\overrightarrow{C(t)M(s)}}{\|\overrightarrow{C(t)M(s)}\|}$, q étant le quaternion donnant l'orientation de l'engin.

On suppose que tout est régulier. On **élimine** les fonctions inconnues $M(s)$ et $I(s)$ des équations $q\eta q^* = \frac{\overrightarrow{C(t)M(s)}}{\|\overrightarrow{C(t)M(s)}\|}$ et $y(t, \eta) = I(s)$ **en dérivant par rapport**

à t à s bloqué. On commence par $\left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_s = 0$. Comme $\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_s = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_\eta + \left. \frac{\partial}{\partial \eta} \right|_t \left. \frac{\partial \eta}{\partial t} \right|_s$ il nous faut calculer $\left. \frac{\partial \eta}{\partial t} \right|_s$ en dérivant par rapport à s l'équation

$q\eta q^* = \frac{\overrightarrow{C(t)M(s)}}{\|\overrightarrow{C(t)M(s)}\|}$. On trouve $\left. \frac{\partial \eta}{\partial t} \right|_s = \eta \wedge (\omega + \Gamma \eta \wedge \nu)$ où $\Gamma = \frac{1}{\|\overrightarrow{C(t)M(s)}\|}$.

Comme, pour tout vecteur tangent ξ à la sphère en η , $\left. \frac{\partial y}{\partial \eta} \right|_t \xi = \nabla y \cdot \xi$ où ∇y est le gradient de $\mathbb{S}^2 \ni \eta \mapsto y(t, \eta)$, défini comme un vecteur tangent à la sphère en η , on a

$$\left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_s = -\nabla y \cdot (\eta \wedge (\omega + \Gamma \eta \wedge \nu))$$

On dérive $\Gamma = \frac{1}{\|\overrightarrow{C(t)M(s)}\|}$ par rapport à t à s bloqué et on obtient après quelques calculs:

$$\left. \frac{\partial \Gamma}{\partial t} \right|_s = -\nabla \Gamma \cdot (\eta \wedge (\omega + \Gamma \eta \wedge \nu)) + \Gamma^2 \nu \cdot \eta$$

Le modèle mixte ODE/PDE

Avec les **équations différentielles de l'engin** et les **équations aux dérivées partielles de l'image** on a le modèle suivant:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}q &= \frac{1}{2}q\omega, & \frac{d}{dt}v &= v \wedge \omega + q^* A_{\text{grav}} q + a \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial t} &= -\nabla \Gamma \cdot (\eta \wedge (\omega + \Gamma \eta \wedge v)) + \Gamma^2 v \cdot \eta \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= -\nabla y \cdot (\eta \wedge (\omega + \Gamma \eta \wedge v))\end{aligned}$$

où les entrées sont $\omega, a \in \mathbb{R}^3$, les états sont $(q, v, \Gamma_\eta, y_\eta)$ (dimension infinie) et les sorties sont les $y_\eta, \eta \in \mathbb{S}^2$ ($\Gamma_\eta(t) = \Gamma(t, \eta)$ et $y_\eta(t) = y(t, \eta)$).⁵

L'invariance par rapport à $G = \mathbb{H}_1$ est associée à un changement sur l'origine des angles dans le repère engin:

$$\varphi_g \begin{pmatrix} q \\ v \\ \Gamma_\eta \\ y_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qg \\ g^*vg \\ \Gamma_{g^*\eta g} \\ y_{g^*\eta g} \end{pmatrix}, \quad \psi_g \begin{pmatrix} \omega \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^*\omega g \\ g^*ag \end{pmatrix}, \quad \varrho_g \begin{pmatrix} y_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{g^*\eta g} \end{pmatrix}$$

⁵On aurait aussi pu obtenir directement ce modèle "Eulerien" à partir du modèle "Lagrangien" précédent $\frac{d}{dt}y_k = y_k \wedge (\omega + \Gamma_k y_k \wedge v)$ et $\frac{d}{dt}\Gamma_k = \Gamma_k^2 y_k \cdot v$. ↻ 🔍 🔄

Environnement lointain

Comme $\Gamma = 1/\|\overrightarrow{CM}\|$, on peut considérer

- ▶ $\Gamma = 0$ (surface \mathcal{S} infiniment lointaine):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}q &= \frac{1}{2}q\omega, & \frac{d}{dt}v &= v \wedge \omega + q^* A_{\text{grav}} q + a \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= -\nabla y \cdot (\eta \wedge \omega)\end{aligned}$$

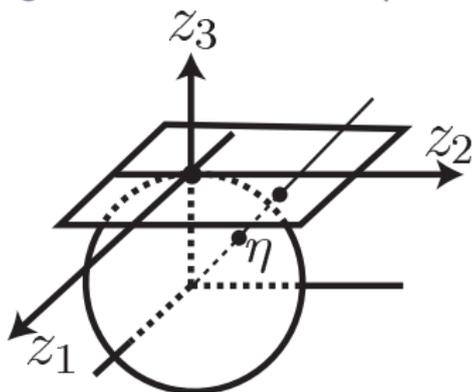
et alors ni q ni v ne sont observables; **seuls les biais statiques** sur le gyroscope le sont avec une image ayant suffisamment de contraste ($\frac{\partial y}{\partial \eta}$ non nul).

- ▶ Γ petit d'ordre 1 et on néglige les termes d'ordre 2 en Γ :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}q &= \frac{1}{2}q\omega, & \frac{d}{dt}v &= v \wedge \omega + q^* A_{\text{grav}} q + a \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial t} &= -\nabla \Gamma \cdot (\eta \wedge \omega), & \frac{\partial y}{\partial t} &= -\nabla y \cdot (\eta \wedge (\omega + \Gamma \eta \wedge v))\end{aligned}$$

et alors on devrait pouvoir estimer v et seulement une partie de q car **les rotations d'axe A_{grav} ne sont pas observables**: si $t \mapsto (q, v, \Gamma, y)$ est solution alors pour tout $g \in \mathbb{H}_1$ tel que $gA_{\text{grav}} = A_{\text{grav}}g$, $t \mapsto (gq, v, \Gamma, y)$ est aussi solution avec les mêmes sorties y et les mêmes entrées (a, ω) (non-observabilité valable aussi sur le modèle complet précédent).

Passage en coordonnées pinhole (z_1, z_2)



On suppose typiquement que l'axe optique de la caméra est selon z_3 . Tout repose sur une simple correspondance entre vecteurs unitaires $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)^T$ sur une calotte sphérique Σ autour du pôle nord $(0, 0, 1)^T$ et les points de coordonnées cartésiennes

$$(z_1 = \eta_1/\eta_3, z_2 = \eta_2/\eta_3, z_3 = 1)^T$$

du plan tangent en $(0, 0, 1)^T$. L'image $y(t, \cdot)$ est une fonction de (z_1, z_2) (les pixels ne sont plus "numérotés" selon η mais (z_1, z_2)).

∇y , vecteur tangent à la sphère en η ($\nabla y \cdot \eta \equiv 0$), et $d\sigma_\eta$ l'élément d'aire en η sont alors données par

$$\nabla y = \sqrt{1 + z_1^2 + z_2^2} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial z_1} \\ \frac{\partial y}{\partial z_2} \\ -z_1 \frac{\partial y}{\partial z_1} - z_2 \frac{\partial y}{\partial z_2} \end{pmatrix} \quad d\sigma_\eta = \frac{dz_1 dz_2}{(1 + (z_1)^2 + (z_2)^2)^{3/2}}.$$

Pour obtenir ces expressions, on a $\frac{\partial y}{\partial z_1} dz_1 + \frac{\partial y}{\partial z_2} dz_2 \equiv \nabla y \cdot (dz_1 w_1 + dz_2 w_2)$

pour toutes variations dz_1, dz_2 où $w_1 = \frac{\partial \eta}{\partial z_1} = \frac{(1+z_2^2, -z_1 z_2, -z_1)^T}{(1+(z_1)^2+(z_2)^2)^{3/2}}$ et

$w_2 = \frac{\partial \eta}{\partial z_2} = \frac{(-z_1 z_2, 1+z_1^2, -z_2)^T}{(1+(z_1)^2+(z_2)^2)^{3/2}}$ sont deux vecteur tangents en $\frac{(z_1, z_2, 1)^T}{\sqrt{1+z_1^2+z_2^2}} = \eta$, où

∇y est une combinaison linéaire de w_1 et w_2 , où $d\sigma_\eta$ est l'aire du petit parallélogramme formé par $dz_1 w_1$ et $dz_2 w_2$.

Le modèle mixte ODE/PDE en cartésien (z_1, z_2)

Les équations générales

$$\frac{d}{dt} \mathbf{q} = \frac{1}{2} \mathbf{q} \omega, \quad \frac{d}{dt} \mathbf{v} = \mathbf{v} \wedge \omega + \mathbf{q}^* \mathbf{A}_{\text{grav}} \mathbf{q} + \mathbf{a}$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} = -(\nabla \Gamma \wedge \eta) \cdot (\omega + \Gamma \eta \wedge \mathbf{v}) + \Gamma^2 \mathbf{v} \cdot \eta, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = -(\nabla y \wedge \eta) \cdot (\omega + \Gamma \eta \wedge \mathbf{v})$$

font apparaître en fait $\nabla y \wedge \eta$:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + (f_1 + \Gamma g_1) \frac{\partial y}{\partial z_1} + (f_2 + \Gamma g_2) \frac{\partial y}{\partial z_2} = 0$$

avec

$$f_1(z, \omega) = z_1 z_2 \omega_1 - (1 + z_1^2) \omega_2 + z_2 \omega_3, \quad g_1(z, \mathbf{v}) = \sqrt{1 + z_1^2 + z_2^2} (-v_1 + z_1 v_3)$$

$$f_2(z, \omega) = (1 + z_2^2) \omega_1 - z_1 z_2 \omega_2 - z_1 \omega_3, \quad g_2(z, \mathbf{v}) = \sqrt{1 + z_1^2 + z_2^2} (-v_2 + z_2 v_3).$$

Ici $y(t, z_1, z_2)$ est le flux de photons captés dans la direction

$$\eta = (z_1, z_2, 1)^T / \sqrt{1 + z_1^2 + z_2^2} \in \mathbb{S}^2.$$

Le modèle approché ODE/PDE

On suppose la **calotte sphérique Σ petite** (i.e., l'angle solide couvert par l'image est assez petit), alors, à l'ordre 1 en (z_1, z_2) on obtient le modèle suivant:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}q &= \frac{1}{2}q\omega, & \frac{d}{dt}v &= v \wedge \omega + q^* A_{\text{grav}} q + a \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial t} &= (\omega_2 - z_2 \omega_3 + \Gamma(v_1 - z_1 v_3)) \frac{\partial \Gamma}{\partial z_1} + (z_1 \omega_3 - \omega_1 + \Gamma(v_2 - z_2 v_3)) \frac{\partial \Gamma}{\partial z_2} \\ &+ \Gamma^2(z_1 v_1 + z_2 v_2 + v_3) \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= (\omega_2 - z_2 \omega_3 + \Gamma(v_1 - z_1 v_3)) \frac{\partial y}{\partial z_1} + (z_1 \omega_3 - \omega_1 + \Gamma(v_2 - z_2 v_3)) \frac{\partial y}{\partial z_2}\end{aligned}$$

Il serait intéressant d'étudier sur ce modèle simplifié l'estimation en temps réel de la vitesse $v \in \mathbb{R}^3$ et de l'orientation $q \in \mathbb{H}_1$ à partir des images $\Sigma \ni (z_1, z_2) \mapsto y(t, z_1, z_2)$ jouant ici le rôle de sortie.

Pour une caméra dont l'axe optique est selon $\eta = (0, 0, 1)^T$ et pour laquelle Σ est une image rectangulaire $(z_1, z_2) \in [-r_1, r_1] \times [-r_2, r_2]$: $y(t, z_1, z_2)$

correspond au flux de photons captés dans la direction $\frac{(z_1, z_2, 1)^T}{\sqrt{1+(z_1)^2+(z_2)^2}} \in \mathbb{S}^2$

avec pour garder un angle solide petit: $0 < r_1, r_2 \ll \sqrt{\pi}$.

Estimation des biais statiques du gyroscope en environnement lointain

On part de $\frac{\partial y}{\partial t} = -\nabla y \cdot (\eta \wedge (\omega + p))$ où $p \in \mathbb{R}^3$ est un **biais statique**. Alors l'observateur asymptotique

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{y}}{\partial t} &= -\nabla \hat{y} \cdot (\eta \wedge (\omega + \hat{p})) - k_y(\hat{y} - y) \\ \frac{d}{dt} \hat{p} &= k_p \int_{\mathbb{S}^2} (\hat{y} - y)(\nabla \hat{y} \wedge \eta) d\sigma\end{aligned}$$

est convergent pour tout gain $k_y, k_p > 0$. La convergence repose sur la **fonction de Lyapounov** suivante:

$$V = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^2} (\hat{y} - y)^2 d\sigma + \frac{1}{2k_c} \|\hat{p} - p\|^2$$

pour laquelle on montre que $\frac{d}{dt} V = -k_y \int_{\mathbb{S}^2} (\hat{y} - y)^2 d\sigma \leq 0$ à cause de l'identité

$$\int_{\mathbb{S}^2} (\hat{y}(t, \eta) - y(t, \eta))^2 d\sigma_\eta = \int_{\mathbb{S}^2} (\hat{y}(t, q^* \eta q) - y(t, q^* \eta q))^2 d\sigma_\eta$$

puisque $\eta \mapsto q^* \eta q$ est **une isométrie** sur la sphère unité \mathbb{S}^2 .

Distorsion et image localisée sur une calotte sphérique

La prise en compte de **distorsions systématiques liées à l'optique de la caméra** consistent alors à multiplier y par une fonction positive de η , $\phi(\eta)$. Cette fonction est à support sur une portion de la sphère. On considère donc des images $\Sigma \ni \eta \mapsto y(t, \eta)$ sur une calotte sphérique $\Sigma \subset \mathbb{S}^2$ (Σ fermée). Pour éviter les discontinuités sur $\partial\Sigma$, ϕ est une fonction régulière à support compact dans l'intérieur $\overset{\circ}{\Sigma}$ et proche de 1 sur une grande partie de Σ . Alors $Y(t, \eta) = \phi(\eta)y(t, \eta)$ s'annule doucement sur $\partial\Sigma$ et vérifie

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = -(\nabla Y - y\nabla\phi) \cdot (\eta \wedge (\omega + \Gamma\eta \wedge \nu))$$

où $y\nabla\phi$ est un vecteur tangent en η à \mathbb{S}^2 dont les dépendances en t et η sont connues et qui s'annule doucement sur $\partial\Sigma$.

On peut par exemple reprendre l'estimation des biais gyroscopiques en environnement lointain $\Gamma = 0$ avec l'image Y où **les effets de bord sont gérés correctement via ϕ** . De $\frac{\partial Y}{\partial t} = -(\nabla Y - y\nabla\phi) \cdot (\eta \wedge \omega)$ on obtient l'observateur

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{Y}}{\partial t} &= -(\nabla \hat{Y} - y\nabla\phi) \cdot (\eta \wedge (\omega + \hat{p})) - k_y(\hat{Y} - Y), \\ \frac{d}{dt}\hat{p} &= k_p \int_{\mathbb{S}^2} (\hat{Y} - Y)(\nabla \hat{Y} - y\nabla\phi) \wedge \eta \, d\sigma\end{aligned}$$

où les valeurs de $y(t, \eta)$ et $\phi(\eta)$ sont utilisées directement.

Estimation des biais des gyroscopes

Les biais gyroscopiques en environnement lointain: $\Gamma = 0$ avec l'image $Y = \phi y$ localisée sur Σ où les effets de bord sont tronqués via ϕ . De

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = -(z_2 \omega_3 - z_3 \omega_2) \left(\frac{\partial Y}{\partial z_1} - y \frac{\partial \phi}{\partial z_1} \right) - (z_3 \omega_1 - z_1 \omega_3) \left(\frac{\partial Y}{\partial z_2} - y \frac{\partial \phi}{\partial z_2} \right)$$

on obtient l'observateur estimant les biais p :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{Y}}{\partial t} = & -k_y (\hat{Y} - Y) - (z_2 (\hat{\omega}_3 + \hat{p}_3) - z_3 (\hat{\omega}_2 + \hat{p}_2)) \left(\frac{\partial \hat{Y}}{\partial z_1} - y \frac{\partial \phi}{\partial z_1} \right) \\ & - (z_3 (\hat{\omega}_1 + \hat{p}_1) - z_1 (\hat{\omega}_3 + \hat{p}_3)) \left(\frac{\partial \hat{Y}}{\partial z_2} - y \frac{\partial \phi}{\partial z_2} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \hat{p}_1 = k_p \int \int_{\Sigma} (\hat{Y} - Y) \left(\frac{\partial \hat{Y}}{\partial z_2} - y \frac{\partial \phi}{\partial z_2} \right) dz_1 dz_2$$

$$\frac{d}{dt} \hat{p}_2 = -k_p \int \int_{\Sigma} (\hat{Y} - Y) \left(\frac{\partial \hat{Y}}{\partial z_1} - y \frac{\partial \phi}{\partial z_1} \right) dz_1 dz_2$$

$$\frac{d}{dt} \hat{p}_3 = k_p \int \int_{\Sigma} (\hat{Y} - Y) \left(z_2 \frac{\partial \hat{Y}}{\partial z_1} - z_1 \frac{\partial \hat{Y}}{\partial z_2} - y z_2 \frac{\partial \phi}{\partial z_1} + y z_1 \frac{\partial \phi}{\partial z_2} \right) dz_1 dz_2.$$

où les valeurs de y et ϕ sont utilisées directement.

Références utiles

- ▶ *EDO, systèmes plans, et régulateurs (très pédagogique et pourtant d'un excellent niveau)* A. Andronov, S. Khaikin and A. Vitt: Theory of Oscillators. Dover (English Translation), 1987.
- ▶ *la BD des systèmes dynamiques en 4 volumes (que des portraits de phases et des dessins):* R.H. Abraham and C.D. Shaw. Dynamics – The Geometry of Behavior : I-IV. Aerial Press, Santa Cruz, California, 1981.
- ▶ *Systèmes dynamiques (très bonne introduction aux EDO)* V. Arnold: Equations différentielles ordinaires. Mir Moscou, 1974.
- ▶ *Bifurcation et théorie des perturbations et KAM (très avancé)* V. Arnold: Chapitres Supplémentaires de la Théorie des Equations Différentielles Ordinaires. Mir Moscou, 1980.
- ▶ *Idem ci-dessus* : J. Guckenheimer and P. Holmes: Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. Springer, New York, 1983.
- ▶ *Contrôle non linéaire, Lyapounov et Robotique:* J. Slotine et J. Li: Applied Nonlinear Control. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1991.
R. Sepulchre, M. Janković, P. Kokotović: Constructive nonlinear control, Springer Verlag, 1997.
- ▶ *Contrôle non linéaire (une partie importante sur les EDO, la stabilité et les systèmes lents/rapides):* H. Khalil: Nonlinear Systems. MacMillan, 1992.

Références utiles (suite et fin)

- ▶ *Equations de Lagrange* L. Landau, E. Lifchitz: Physique théorique: Mécanique, tome I. Mir-Moscou, 1964.
- ▶ *Systèmes linéaires et formes de Brunovsky* F. Bonnans et P. Rouchon: Commande et optimisation de systèmes dynamiques. 2005.
- ▶ *Systèmes différentiellement plats (dimension finie et infinie)*: Ph. Martin et P. Rouchon: Systèmes plats, planification et suivi de trajectoires, Notes, Journées X-UPS, 1999 . Cours téléchargeable à l'adresse:
<http://math.polytechnique.fr/xups/vol99.html>
- ▶ *Symétries et groupes de Lie*. P.J. Olver: Classical Invariant Theory. Cambridge University Press, 1999. Du même auteur: Equivalence, Invariants and Symmetry. Cambridge University Press. 1995.
- ▶ *Sur les observateurs invariants* : Silvère Bonnabel: observateurs asymptotiques invariants : théorie et exemples. PhD thesis, Mines-ParisTech, September 2007. http://www.silvere-bonnabel.com/pdf/These_Silvere.pdf. Et aussi l'article de base: S. Bonnabel, Ph. Martin, P. Rouchon: Invariant asymptotic observers. IEEE Trans. Automatic Control, vol.53, pp:2514-2526, 2008.
- ▶ *Sur la contraction* : W. Lohmiller, J.J.E. Slotine: On Metric Analysis and Observers for Nonlinear Systems. Automatica, vol.34, no.6, pp:683–696, 1998.