

# Contrôle de la recirculation de gaz brûlés pour un moteur essence suralimenté : apports d'une approche à retard dépendant de la commande

Delphine Bresch-Pietri \* Jonathan Chauvin \*\* Nicolas Petit \*\*\*

\* *MINES ParisTech, Centre Automatique et Systèmes, Unité Mathématiques et Systèmes, 60 Bd St-Michel, 75272 Paris, Cedex 06, France*  
(e-mail : [delphine.bresch-pietri@mines-paristech.fr](mailto:delphine.bresch-pietri@mines-paristech.fr))

\*\* *IFP Energies Nouvelles, Département Contrôle, Signal et Système, 1 et 4 avenue du Bois-Préau, 92852 Rueil-Malmaison, France*

\*\*\* *MINES ParisTech, Centre Automatique et Systèmes, Unité Mathématiques et Systèmes, 60 Bd St-Michel, 75272 Paris, Cedex 06, France*

---

**Résumé** Cet article traite du suivi de trajectoires pour un système de recirculation de gaz brûlés sur moteur essence. Cette dynamique est représentée par un système linéaire à entrée retardée, où le retard dépend implicitement de l'historique de la commande. On développe un résultat de robustesse de la compensation par prédiction aux variations temporelles du retard, obtenu en utilisant une transformation de backstepping appropriée. La dépendance du retard en la commande est exploitée pour appliquer ce résultat au système considéré et fournit une piste de traitement pour une classe importante de systèmes à retard.

---

## 1. INTRODUCTION

La recirculation de gaz brûlés (EGR) apparaît actuellement comme une architecture prometteuse pour les moteurs essence suralimentés à petites cylindrées. De tels moteurs (cf. Fig. 1) consomment peu, mais présentent un risque accru d'apparition du phénomène de cliquetis<sup>1</sup> à forte charge. L'introduction de gaz brûlés dans le cylindre permet alors d'éviter de dégrader l'avance à l'allumage, solution usuellement employée pour résoudre ce problème<sup>2</sup>. Ces gaz inertes diminuent en effet la température globale de combustion, ce qui limite les risques de cliquetis et préserve également l'efficacité de la combustion.

Cependant, la recirculation de gaz brûlés a une influence importante sur le fonctionnement global du moteur. Un procédé de contrôle performant est alors essentiel pour la gestion des transitoires de couple, notamment à faible charge où une trop forte présence de gaz brûlés peut éteindre la combustion.

Or, l'éloignement spatial entre le collecteur d'admission et l'actionneur de l'EGR, la vanne EGR, est relativement conséquent (cf. Fig. 1). Ceci induit un retard de transport important, pouvant aller jusqu'à plusieurs secondes. De plus, ce retard dépend du débit parcourant la ligne d'admission et donc de la quantité de gaz brûlés réintroduits, c'est-à-dire de la variable de contrôle. Cette particularité complique considérablement le développement de lois de contrôle, comme souligné dans Lauber

[2003], ce qui explique probablement pourquoi ce problème est encore peu traité dans la littérature<sup>3</sup>.

Dans cet article, nous nous proposons d'aborder ce problème sous l'angle des systèmes à entrée retardée, en tenant compte explicitement de la dépendance du retard en la variable de contrôle. Une telle stratégie de contrôle se généralise à un grand nombre d'autres applications industrielles impliquant des transports de matière : réacteurs chimiques (Harmand and Dochain [2005]), procédés de mélange (Chèbre et al. [2010] Petit et al. [1998]) ou encore échangeurs thermiques (Sbarciog et al. [2008]). Comme souligné dans la Table 1, ces systèmes impliquent tous un retard de transport intrinsèquement relié à la variable de contrôle. L'approche que nous présentons ici vise à fournir des pistes de traitement de ces différents problèmes.

En effet, de façon assez surprenante, ce type de problèmes, pourtant fréquemment évoqués dans la littérature, n'a que très peu été étudié d'un point de vue théorique, du moins à notre connaissance. Comme souligné dans Yildiz et al. [2010], on préfère classiquement négliger cette dépendance du retard (un exemple de ce type d'approche pour un système de broyeuse peut être trouvé dans Richard [2003]).

Nous proposons ici une stratégie de contrôle en boucle fermée par prédiction, inspirée de récents travaux sur l'analyse de la stabilité des systèmes linéaires à entrée retardée (Krstic [2008] et Krstic [2009]). Ces outils, fondés sur une relation de backstepping, ont été développés pour un retard constant dans de nombreux contextes (Bresch-Pietri and Krstic [2009], Bresch-Pietri et al. [2010] ou encore Bresch-Pietri et al. [2011]). Nous les étendons ici au cas d'un retard instationnaire en formu-

---

<sup>1</sup> Auto-inflammation non désirée du mélange qui peut, à terme, détériorer fortement la chambre de combustion Eriksson [May 1999]

<sup>2</sup> Cette solution engendre une augmentation de la température des gaz à l'échappement, préjudiciable aux organes de post-traitement. Cet effet est généralement compensé par un enrichissement du mélange à l'admission ce qui, en plus d'augmenter la consommation du moteur, détériore considérablement le fonctionnement du catalyseur placé en aval du collecteur d'échappement.

<sup>3</sup> En revanche, pour les moteurs diesel, ce problème a été intensivement étudié ces dernières années. Le mode de fonctionnement d'un moteur diesel différant significativement de celui d'un moteur essence, la problématique de contrôle diffère également (cf. Ammann et al. [2003], Van Nieuwstadt et al. [2000], Zheng et al. [2004] et leurs références pour de plus amples détails)

Système	Variable d'état	Variable de contrôle	Origine du retard	N-L	$\tau(u)$ ?	
Contrôle de richesse des moteurs essence	Richesse échappement	Quantité d'essence injectée	Transport de l'injecteur à la sonde Lambda	Non	Non	Lauber et al. [2011]
Contrôle EGR des moteurs essence	Taux de gaz brûlés à l'admission	Débit massique de gaz brûlés réinjectés	Transport le long de la ligne d'admission	Non	Oui	
Mélangeurs de raffinerie	Propriétés du mélange final	Débites des mélanges de composition	Volumes de pré-mélange et transport	Non	Oui	Chèbre et al. [2010] Petit et al. [1998]
Chauffe-eau solaire	Température de sortie	Débit d'entrée	Transport dans la ligne d'échappement	Oui	Oui	Sbarciog et al. [2008]
Bain/douche	Température de sortie	Débites d'entrée	Transport	Oui	Oui	

TAB. 1. Comparaison de certains procédés impliquant un retard de transport (N-L signifie non-linéaire et  $\tau(u)$  représente une configuration où le retard  $\tau$  dépend de la commande  $u$ .)

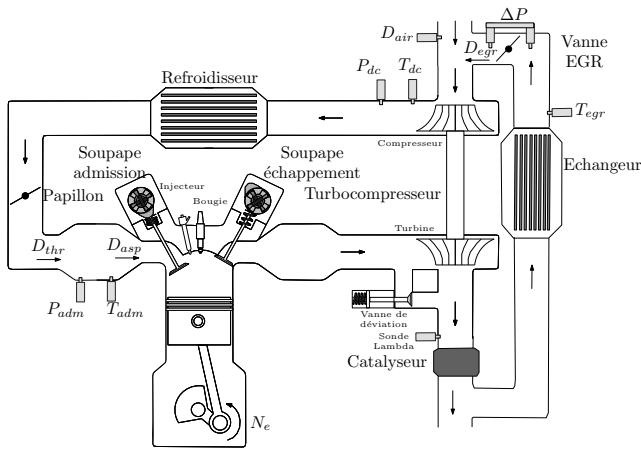


FIG. 1. Moteur essence suralimenté équipé d'une injection directe, d'une distribution variable et d'un circuit de recirculation basse-pression des gaz brûlés. Le capteur de pression différentielle  $\Delta P$ , situé au niveau de la vanne EGR, donne une mesure indirecte du débit massique de gaz brûlés réinjectés  $D_{egr}$  (cf. Annexe).

lant un résultat de robustesse du contrôle par prédiction aux variations du retard. Ce résultat est ensuite explicitement relié à la dépendance du retard en la variable de contrôle pour le problème de contrôle que nous considérons, celui du suivi de trajectoire du taux de gaz brûlés admission pour un moteur essence.

Dans un premier temps, nous présentons en Partie II un modèle de la dynamique du taux de gaz brûlés admission pour un moteur essence, permettant d'exprimer ce système sous la forme d'un modèle linéaire du premier ordre à entrée retardée et où ce retard dépend de l'historique de la variable de contrôle. Puis, en Partie III, nous développons pour cette classe de systèmes une loi de contrôle de type prédiction avec la preuve de convergence par Lyapunov correspondante. Enfin, des résultats de simulation et des orientations possibles de travail sont fournies et commentées dans la Partie IV.

## 2. MODÉLISATION

Le système que nous considérons ici est la boucle d'air d'un moteur essence suralimenté, muni d'un papillon admission, d'une distribution variable (deux actionneurs sur les soupapes, dits VVT) et d'un circuit basse-pression de recirculation de gaz brûlés (EGR), comme celui représenté en Fig. 1. Les notations qui sont introduites sur la Fig. 1 et celles utilisées dans le reste de l'article sont rassemblées dans la Table 4.

Nous nous intéressons au contrôle du taux dans le collecteur admission de gaz brûlés issus de la recirculation externe (EGR). La variable de contrôle est le débit massique de gaz brûlés s'écoulant depuis la vanne EGR,  $D_{egr}$  (un contrôleur bas-niveau reliant cette variable à la position de vanne EGR  $\theta_{egr}$ ). L'éloignement spatial entre cet actionneur et le collecteur d'admissions introduit un retard de transport important et variable. En supposant que le mélange en aval de la vanne EGR est ponctuel, on peut simplement écrire le taux de gaz brûlés de cette zone de la ligne d'admission comme étant

$$u(t) = \frac{D_{egr}(t)}{D_{air}(t) + D_{egr}(t)} \quad (1)$$

avec  $D_{air}$  mesuré par un débitmètre et  $D_{egr}$  connu car directement déterminé par la mesure de pression différentielle au niveau de la vanne EGR  $\Delta P$  (cf. Annexe). Par ailleurs, en représentant l'écoulement comme ayant une composition uniforme dans la direction perpendiculaire à celle de l'écoulement (hypothèse "plug-flow"), on peut caractériser implicitement le retard de transport  $\tau(t)$  sous la forme

$$L_P = \int_{t-\tau(t)}^t v_{air+egr}(s) ds \quad (2)$$

où  $L_P$  est la longueur de canalisations entre la vanne EGR et le collecteur admission et où  $v_{egr}$  et  $v_{air}$  représentent les vitesses d'écoulement des deux fluides (la relation entre vitesse et débit massique est détaillée ci-dessous). Enfin, la dynamique de mélange dans le collecteur s'écrit comme un bilan de composition <sup>4</sup>

$$\dot{x}(t) = \alpha[-D_{asp}x(t) + D_{thr}u(t - \tau(t))] \quad (3)$$

avec  $x$  le taux de gaz brûlés dans le collecteur admission et  $\alpha = \frac{rT_{adm}}{P_{adm}V_{adm}}$  connu (température et pression sont mesurées par des capteurs dédiés).

### 2.1 Modélisation du débit

Pour caractériser totalement la dynamique (3), nous cherchons à estimer les débits massiques en jeu (qui ne sont pas mesurés en général). Pour cela, nous utilisons le modèle de remplissage présenté dans Leroy et al. [2009] où  $D_{asp}$  est représenté comme une fonction du régime moteur  $N_e$ , de la pression admission  $P_{adm}$  et des positions des actionneurs VVT. En utilisant la loi des gaz parfaits, on peut relier dynamiquement ce débit massique aspiré à celui parcourant le papillon admission selon

<sup>4</sup> Cette équation bilan suppose que le circuit EGR est rempli uniquement de gaz brûlés, i.e. que son taux de gaz brûlés est de 1. En effet, pour maximiser l'efficacité de conversion du catalyseur, un moteur essence fonctionne à stoechiométrie.

Symbole	Description	Unité
$D_{air}$	Débit massique d'air en amont du compresseur	kg/s
$D_{egr}$	Débit massique d'EGR via la vanne EGR	kg/s
$D_{thr}$	Débit massique via le papillon	kg/s
$D_{asp}$	Débit massique aspiré	kg/s
$T_{adm}$	Température dans le collecteur admission	K
$P_{adm}$	Pression dans le collecteur admission	Pa
$T_{dc}$	Température en aval du compresseur	K
$P_{dc}$	Pression en aval du compresseur	Pa
$T_{atm}$	Température atmosphérique	K
$P_{atm}$	Pression atmosphérique	Pa
$r$	Ratio de chaleur spécifique	J/kg/K
$N_e$	Régime moteur	rpm
$L_p$	Longueur de canalisation depuis la vanne EGR au collecteur admission	m
$\theta_{egr}$	Position de la vanne EGR	%
$m_{air}$	Masse d'air aspirée	mg/cp

TAB. 2. Notations

$$D_{thr} = D_{asp}(N_e, P_{int}, VVT) + \frac{V_{int}}{rT_{int}} \dot{P}_{int} \quad (4)$$

avec  $r = r_{air} = r_{bg}$  ratio de chaleur spécifique, identique pour tous les gaz.

## 2.2 Calcul du retard de transport

Le retard de transport est implicitement déterminé par la relation (2) qui utilise les vitesses d'écoulement des gaz le long de la ligne d'admission. En pratique, ces vitesses ne sont pas connues, mais on peut néanmoins les exprimer en fonction des débits massiques et des conditions thermodynamiques ambiantes qui sont mesurées. En d'autres termes, (2) peut être reformulée sous la forme

$$V_P = \int_{t-\tau(t)}^t \frac{rT(s)}{P(s)} (D_{air}(s) + D_{egr}(s)) ds$$

avec  $V_P$  le volume occupé par les canalisations de la ligne d'admission et  $T, P$  les températures et pression courantes.

En observant l'architecture représentée sur la Fig. 1, on peut segmenter la ligne d'admission en trois portions distinctes où les conditions thermodynamiques sont homogènes :

– entre la vanne EGR et le compresseur, les conditions thermodynamiques sont atmosphériques

$$V_3 = \int_{t-\tau_3(t)}^t \frac{rT_{atm}}{P_{atm}} [D_{air}(s) + D_{egr}(s)] ds \quad (5)$$

– entre le compresseur et le refroidisseur, température et pression peuvent être supposées uniformes et égales aux valeurs mesurées  $T_{dc}$  et  $P_{dc}$

$$V_2 = \int_{t-\tau_3(t)-\tau_2(t)}^{t-\tau_3(t)} \frac{rT_{dc}}{P_{dc}} [D_{air}(s) + D_{egr}(s)] ds \quad (6)$$

– entre le refroidisseur et le collecteur admission, la température est supposée constante, égale à la température mesurée dans le collecteur, et la pression également, égale à celle en amont du refroidisseur

$$V_1 = \int_{t-\tau_3(t)-\tau_2(t)-\tau_1(t)}^{t-\tau_3(t)-\tau_2(t)} \frac{rT_{int}}{P_{dc}} [D_{air}(s) + D_{egr}(s)] ds \quad (7)$$

Chaque volume physique intermédiaire  $V_i$  étant connu, on peut déterminer le retard total  $\tau(t) = \tau_1(t) + \tau_2(t) + \tau_3(t)$  en inversant l'une après l'autre les relations (5), puis (6) et enfin (7),

comme fait dans Petit et al. [1998] par exemple (dans un contexte procédé).

Ce modèle (1)-(7) a été validé à l'aide d'un simulateur haute-fréquence de référence présenté dans Le Berr et al. [2006] et développé sous AMESim<sup>TM</sup> (logiciel de simulation pour le contrôle moteur, voir le site de IMAGINE).

On cherche à garantir le suivi d'une trajectoire  $x^r(t)$  par le système (3) et ce par une loi de contrôle de type prédiction, exploitant la connaissance du retard  $\tau(t)$  ainsi que sa dépendance en l'historique de la variable de contrôle par les relations (5)-(7). Pour cela et pour pouvoir généraliser sans difficulté notre approche à d'autres contextes tels que ceux présentés en Table 1, nous supposons ici que le taux de gaz brûlés est mesuré, ce qui n'est pas le cas en série usuellement (ce point est brièvement discuté à la fin de la Partie IV). Nous détaillons maintenant la loi de contrôle par prédiction utilisée, qui exploite un résultat de robustesse aux variations de retard.

## 3. CONTRÔLE PAR PRÉDICTION POUR LES SYSTÈMES À RETARD VARIABLE PORTANT SUR LA COMMANDE

Dans cette partie, nous nous intéressons à un système linéaire (potentiellement instable) de la forme

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t - \tau(t)) \quad (8)$$

avec  $X \in \mathbb{R}^n$  et  $U$  réel. Nous supposons également la paire  $(A, B)$  commandable et le retard  $\tau : \mathbb{R}_+ \mapsto [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$  borné et dérivable. Nous cherchons à stabiliser le système autour d'une trajectoire  $(X^r, U^r)$  correspondant au système équivalent non retardé, i.e.

$$\dot{X}^r(t) = AX^r(t) + BU^r$$

Nous utilisons également par la suite les variables d'erreur  $\tilde{X}(t) = X(t) - X^r(t)$  et  $\tilde{U}(t) = U(t) - U^r(t + \tau(t))$ .

*Théorème 1.* Soit le système boucle fermée composé du système (8) et de la loi de contrôle

$$U(t) = U^r(t + \tau(t)) + K \left[ e^{A\tau(t)} \tilde{X}(t) + \int_{t-\tau(t)}^t e^{A(t-s)} B [U(s) - U^r(s + \tau(t))] ds \right] \quad (9)$$

où le vecteur de gain  $K$  est choisi de sorte à ce que  $A + BK$  soit Hurwitz. Il existe  $\delta^* \in ]0, 1[$  tel que, si

$$\forall t \geq 0, \quad |\dot{\tau}(t)| < \delta^* \quad (10)$$

l'erreur de suivi de trajectoire  $\tilde{X}(t)$  converge exponentiellement vers 0 quand  $t \rightarrow \infty$ .

Le contrôle (9) s'inspire directement du cas où le retard est constant, en calculant la prédiction de l'état du système non plus sur un intervalle de temps de longueur  $D$ , mais de longueur variable  $D(t)$ . Une conséquence directe de cette modification est que ce contrôleur ne peut a priori plus compenser exactement le retard. En effet, pour cela, il faudrait être en mesure de calculer la prédiction sur un intervalle de temps dont la longueur correspondrait à la valeur que va prendre le retard à l'avenir, comme cela est fait dans Krstic [2009]<sup>5</sup>. Or, cela

<sup>5</sup> Plus précisément, si l'on définit un opérateur retard  $\phi(t) = t - D(t)$  que l'on suppose inversible et d'inverse connu, la loi de feedback  $U(t) = KX(\phi^{-1}(t))$  permet d'obtenir la compensation exacte du retard désirée. Une expression analytique de la prédiction est par ailleurs  $X(\phi^{-1}(t)) = \left[ e^{A(\phi^{-1}(t)-t)} + \int_t^{\phi^{-1}(t)} e^{A(\phi^{-1}(t)-s)} BU(\phi(s)) ds \right]$

nécessite de pouvoir prédire les variations futures du retard, ce qui n'est pas toujours le cas en pratique.

Ainsi, dans ce contexte, (10) peut être vue comme une condition de robustesse de la compensation. En d'autres termes, si le retard varie suffisamment lentement, sa valeur courante  $D(t)$ , utilisée pour calculer la prédiction, sera assez proche de celle correspondant à l'instant où le contrôle va atteindre le système dynamique. De la sorte, l'horizon de prédiction sera suffisamment précis pour assurer la stabilisation du système.

La même condition est formulée dans Yue and Han [2005], où la fonction retard est également supposée dérivable. Néanmoins, la stratégie de contrôle qui y est développée diffère considérablement de la nôtre, puisque le contrôleur proposé estime le retard par sa valeur moyenne, constante <sup>6</sup>, ce qui devrait naturellement induire de moins bonnes performances que celui que nous proposons ci-dessus.

Enfin, la preuve ci-dessous fournit une expression de la borne supérieure  $\delta^*$ . Malheureusement, cette expression est très conservative, comme la preuve de Lyapunov dont elle provient le laisse envisager (les résultats de simulation ci-dessous confirme cela). Son analyse permet néanmoins de conclure que plus la dynamique considérée est rapide, plus la borne sur le retard est faible. Nous détaillons maintenant cette preuve.

**Preuve** Ci-dessous, nous utilisons les outils de Lyapunov présentés dans Krstic [2008], spécifiques à l'analyse de la stabilité des systèmes à entrée retardée. Ces outils se fondent sur la transformation de backstepping d'un contrôle distribué donné, défini pour un retard constant <sup>7</sup>. Tout d'abord, pour les étendre au cas où le retard varie dans le temps, nous définissons la commande distribuée  $u(x, t) = U(t + D(t)(x - 1))$ ,  $x \in [0, 1]$ , qui permet de réécrire le système (8) sous la forme

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bu(0, t) \\ D(t)u_t(x, t) = u_x(x, t) + \dot{D}(t)(x - 1)u_x(x, t) \\ u(1, t) = U(t) \end{cases}$$

De la sorte, le retard portant sur l'entrée est maintenant vu comme le résultat d'un couplage entre une equation différentielle partielle (EDP) de transport, dont le terme source est le contrôle et dont la vitesse de propagation varie à la fois en temps et en espace.

De plus, pour alléger les notations, soient  $V^r(t) = U^r(t + \tau(t))$  le contrôle alternatif de référence et  $v^r(x, t) = V^r(t + \tau(t)(x - 1))$  le contrôle distribué associé. En nous inspirant de l'approche évoquée ci-dessus, nous définissons la relation de backstepping suivante, utilisant l'erreur de contrôle distribué  $e(x, t) = u(x, t) - v^r(x, t)$

$$w(x, t) = e(x, t) - \tau(t) \quad K \int_0^x e^{A\tau(t)x} Be(y, t) dy - Ke^{A\tau(t)x} \tilde{X}(t) \quad (11)$$

Cette transformation permet de réécrire la dynamique d'erreur correspondant au système boucle fermé (8)-(9) sous la forme

<sup>6</sup> La loi de contrôle est plus exactement issue d'une réduction de modèle exploitant cette valeur moyenne du retard.

<sup>7</sup> Cette transformation vise à transformer le système  $\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(0, t)$ ,  $\tau u_t(x, t) = u_x(x, t)$  de condition au bord  $u(1, t) = U(t)$  en un système cible  $\dot{X}(t) = (A + BK)X(t) + Bw(0, t)$ ,  $\tau w_t(x, t) = w_x(x, t)$  de condition au bord  $w(1, t) = 0$ .

$$\dot{\tilde{X}}(t) = (A + BK)\tilde{X}(t) + Bw(0, t) \quad (12)$$

$$\tau(t)w_t(x, t) = w_x(x, t) - \tau(t)\dot{\tau}(t)f(x, t) \quad (13)$$

$$w(1, t) = 0 \quad (14)$$

où la fonction  $f$  s'écrit

$$f(x, t) = \frac{1-x}{\tau(t)} e_x(x, t) + K \int_0^x e^{A\tau(t)(x-y)} Be_x(y, t) dy + KAxe^{A\tau(t)x} \tilde{X}(t) + K \int_0^x (I + A\tau(t)(x-y)) e^{A\tau(t)(x-y)} Be(y, t) dy$$

Pour l'analyse de Lyapunov ci-dessous, nous avons également besoin de la dynamique de la dérivée spatiale du contrôle distribué transformé

$$\begin{aligned} \tau(t)w_{xt}(x, t) &= w_{xx}(x, t) - \tau(t)\dot{\tau}(t)f_x(x, t) \\ w(1, t) &= \tau(t)\dot{\tau}(t)f(1, t) \end{aligned}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'étudier la fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii ci-dessous

$$V(t) = \tilde{X}(t)^T P \tilde{X}(t) + b_1 \tau(t) \int_0^1 (1+x)w(x, t)^2 dx + b_2 \tau(t) \int_0^1 (1+x)w_x(x, t)^2 dx \quad (15)$$

où la matrice  $P$ , symétrique définie positive, vérifié l'équation de Lyapunov  $P(A + BK) + (A + BK)^T P = -Q$ , avec  $Q$  matrice définie positive fixée. Après plusieurs intégrations par parties, la dérivée de  $V$  s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= -\tilde{X}(t)^T Q \tilde{X}(t) + 2\tilde{X}(t)^T PBw(0, t) - b_1 \|w(t)\|^2 \\ &\quad - b_1 w(0, t)^2 - b_2 \|w_x(t)\|^2 + 2b_2 w_x(1, t)^2 - b_2 w_x(0, t)^2 \\ &\quad - 2b_1 \tau(t)\dot{\tau}(t) \int_0^1 (1+x)w(x, t)f(x, t) dx \\ &\quad - 2b_2 \tau(t)\dot{\tau}(t) \int_0^1 (1+x)w_x(x, t)f_x(x, t) dx \\ &\quad + \dot{\tau}(t) \int_0^1 (1+x) [b_1 w(x, t)^2 + b_2 w_x(x, t)^2] dx \\ &\leq -\frac{\lambda_{\min}(Q)}{2} |\tilde{X}(t)|^2 - \left( b_1 - \frac{2|PB|^2}{\lambda_{\min}(Q)} \right) w(0, t)^2 \\ &\quad - b_1 \|w(t)\|^2 - b_2 \|w_x(t)\|^2 - b_2 w_x(0, t)^2 + 2b_2 w_x(1, t)^2 \\ &\quad + 2b_1 \tau(t)|\dot{\tau}(t)| \left| \int_0^1 (1+x)w(x, t)f(x, t) dx \right| \\ &\quad + 2b_2 \tau(t)|\dot{\tau}(t)| \left| \int_0^1 (1+x)w_x(x, t)f_x(x, t) dx \right| \\ &\quad + 2|\dot{\tau}(t)| (b_1 \|w(t)\|^2 + b_2 \|w_x(t)\|^2) \end{aligned}$$

En exploitant la transformée inverse suivante de (11), qui satisfait une équation intégrale de Volterra de deuxième espèce,

$$e(x, t) = w(x, t) + Ke^{(A+BK)\tau(t)x} \tilde{X}(t) + \tau(t)K \int_0^x e^{(A+BK)\tau(t)(x-y)} Bw(y, t) dy$$

on peut obtenir, à l'aide des inégalités de Cauchy-Schwartz et de Young, l'existence de constantes positives  $M_1, M_2$  et  $M_3$  telles que

$$\begin{aligned} &2w_x(1, t)^2 \\ &\leq M_1 |\dot{\tau}(t)|^2 \left( |\tilde{X}(t)|^2 + \|w(t)\|^2 + \|w_x(t)\|^2 \right) \\ &2\tau(t) \left| \int_0^1 (1+x)w(x, t)f(x, t) dx \right| \\ &\leq M_2 \left( |\tilde{X}(t)|^2 + \|w(t)\|^2 + \|w_x(t)\|^2 \right) \end{aligned}$$

$$2\tau(t) \left| \int_0^1 (1+x)w_x(x,t)f_x(x,t)dx \right| \leq M_3 \left( |\tilde{X}(t)|^2 + \|w(t)\|^2 + \|w_x(t)\|^2 + w_x(0,t)^2 \right)$$

A l'aide de ces inégalités et avec  $V_0(t) = |\tilde{X}(t)|^2 + \|w(t)\|^2 + \|w_x(t)\|^2$ , on peut écrire

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & -\frac{\lambda_{\min}(Q)}{2} |\tilde{X}(t)|^2 - \left( b_1 - \frac{2|PB|^2}{\lambda_{\min}(Q)} \right) w(0,t)^2 \\ & - b_1 \|w(t)\|^2 - b_2 \|w_x(t)\|^2 - b_2 (1 - M_3 |\dot{\tau}(t)|) w_x(0,t)^2 \\ & + |\dot{\tau}(t)| (b_2 M_1 |\dot{\tau}(t)| + b_1 M_2 + b_2 M_3 + 2b_1 + 2b_2) V_0(t) \end{aligned}$$

Ainsi, avec  $b_1 > 2|PB|^2/\lambda_{\min}(Q)$  et

$$\delta^* = \min \left\{ \frac{\min \{ \lambda_{\min}(Q)/2, b_1, b_2 \}}{b_2 M_1 + b_1 M_2 + b_2 M_3 + 2b_1 + 2b_2}, 1, \frac{1}{M_3} \right\}$$

on conclut qu'il existe une constante  $\mu > 0$  telle que, si  $|\dot{\tau}(t)| < \delta^*$ ,

$$\forall t \geq 0, \quad \dot{V}(t) \leq -\mu V_0(t)$$

Enfin, en observant que

$$\begin{aligned} \min \{ \lambda_{\min}(P), b_1 \underline{\tau}, b_2 \bar{\tau} \} V_0(t) &= \eta_1 V_0(t) \leq V(t) \\ V(t) &\leq \max \{ \lambda_{\max}(P), 2b_1 \bar{\tau}, 2b_2 \bar{\tau} \} V_0(t) = \eta_2 V_0(t) \end{aligned}$$

on a

$$\forall t \geq 0, \quad V_0(t) \leq \frac{\eta_2}{\eta_1} V_0(0) e^{-\frac{\mu}{\eta_2} t}$$

ce qui conclut la preuve.

#### 4. APPLICATION AU CONTRÔLE DU TAUX DE GAZ BRÛLÉS ADMISSION ET RÉSULTATS DE SIMULATION

Une application directe du Théorème 1 conduit au choix suivant

$$\begin{cases} D_{egr}(t) = D_{air}(t) \frac{u(t)}{1-u(t)} \\ u(t) = u^r(t + \tau(t)) - k \left[ e^{-\alpha D_{asp} \tau(t)} [x(t) - x^r(t)] \right. \\ \left. + \alpha D_{thr} \int_{t-\tau(t)}^t e^{-(t-s)\alpha D_{asp}} [u(t) - u^r(s + \tau(t))] ds \right] \end{cases} \quad (16)$$

En pratique, la loi de contrôle est saturée, du fait des limites physiques de l'actionneur (vanne EGR)<sup>8</sup>. Un exemple de sollicitation est fournie en Fig. 2, pour un point de fonctionnement donné (régime moteur 1200 tr/min et couple de 120 Nm) pour la courbe de référence donnée en pointillés sur la figure en haut à gauche. Le gain est fixe,  $k = 0.1$ .

A partir d'une recirculation de gaz brûlés nulle ( $x(0) = 0\%$ ), le suivi de trajectoire désiré est bien obtenu. L'effet de la correction est visible principalement au début de la simulation, lors du dépassement du débit d'EGR visant à réduire le temps de réponse du retard (ce qui s'obtient entre autre par une diminution du retard). La suite du suivi de trajectoire est essentiellement l'oeuvre de la précompensation.

Par ailleurs, si l'on étudie les conditions de réalisation de l'inégalité (10), un calcul direct fournit une valeur  $\delta^*$  de l'ordre de  $10^{-2}$ , ce qui est extrêmement conservatif et n'a donc pas

<sup>8</sup> Plus précisément, la loi de contrôle est transcrite en position actionneur en utilisant le modèle de débit donné en Annexe. Ce modèle exploite la mesure de pression différentielle  $\Delta P$  fournie par un capteur dédié, représenté en Fig. 1. Une étude plus poussée de ce modèle révèle également que les débits de recirculation réalisables sont principalement limités non pas par la limitation de l'actionneur, mais par la perméabilité du circuit de recirculation, qui varie essentiellement avec le point de fonctionnement.

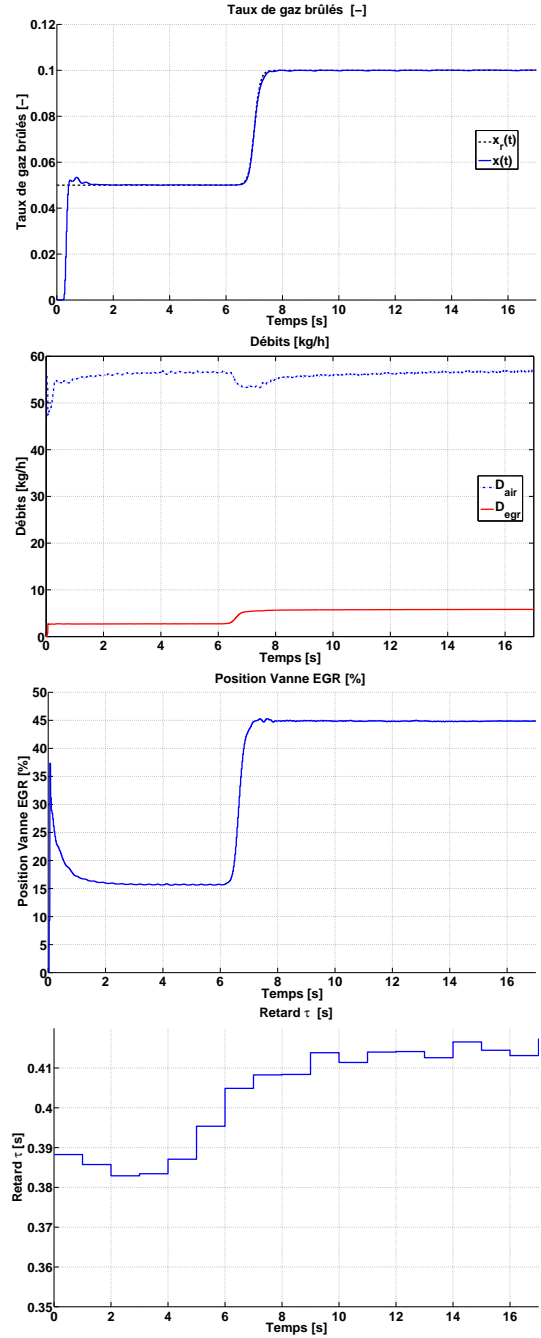


FIG. 2. Résultats de simulation pour un point de fonctionnement (régime moteur constant,  $N_e = 1200$  tr/min, et demande de couple constante  $T_q = 120$  Nm). La trajectoire de référence de taux de gaz brûlés est représentée en haut à gauche (en pointillés).

vocation à être utilisé en pratique. Cependant, on peut observer sur la Fig. 2 que le retard varie assez lentement, comportement qui est cohérent avec cette condition. On peut également, en dérivant (2), obtenir l'expression suivante de la dérivée du retard comme une fonction des débits d'air (variable que l'on considère ici comme externe et non-commandable, car réalisant la demande de couple du conducteur) et de gaz brûlés (variable de commande) courants et retardés

$$\dot{\tau}(t) = 1 - \frac{D_{air}(t) + D_{egr}(t)}{D_{air}(t - \tau) + D_{egr}(t - \tau)}$$

Au premier ordre, avec les ordres de grandeur de débits indiqués sur la Fig. 2, on peut raisonnablement écrire

$$\hat{\tau}(t) \approx 1 - \frac{D_{air}(t)}{D_{air}(t - \tau)}$$

Au premier ordre, les variations du retard sont ainsi celles du débit d'air. Le schéma de régulation proposé ne semble donc pas applicable en l'état pour une prise de charge (ou, à l'inverse dans une moindre mesure, pour une levée de pied). La gestion de ces transitoires extrêmes est l'une des perspectives de travail envisagées.

Au second ordre, pour un point de fonctionnement stabilisé, on a  $\hat{\tau}(t) \approx \frac{D_{egr}(t-\tau) - D_{egr}(t)}{D_{air}}$ , ce qui fournit une caractérisation des trajectoires de taux de gaz brûlés réalisables. Par ailleurs, on peut aussi rigoureusement écrire à l'aide de (1)

$$\hat{\tau}(t) = \frac{u(t - \tau(t)) - u(t)}{1 - u(t)}$$

ce qui, à l'aide de (16), caractérise les performances transitoires maximales que l'on peut obtenir. En effet, (10) induit une limitation du gain de correction  $k$ , comme détaillé dans Bresch-Pietri et al. [2012].

Enfin, cette stratégie de contrôle exploite une mesure de taux de gaz brûlés admission, donnée pour laquelle il n'existe pas en général d'instrumentation dédiée sur un moteur. Le développement d'un observateur pour cette quantité est un autre point qu'il nous reste à aborder<sup>9</sup>.

#### ANNEXE : DÉBIT MASSIQUE VIA LA VANNE EGR

Le débit massique d'EGR peut être supposé sous-critique et modélisé comme (cf. Heywood [1988])

$$D_{egr} = S_{vanne} \psi(P_{uv})$$

$$\psi(P_{uv}) = \frac{P_{uv}}{\sqrt{RT_{egr}}} \left( \frac{P_{atm}}{P_{uv}} \right)^{1/\gamma} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left( 1 - \left( \frac{P_{atm}}{P_{uv}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)}$$

où  $S_{vanne}$  est la surface efficace d'ouverture de la vanne,  $P_{uv}$  la pression en amont de la vanne (obtenue à partir de la pression atmosphérique et de la mesure de pression différentielle  $\Delta P$ ) et  $\gamma$  le ratio de chaleur spécifique. La surface efficace d'ouverture de la vanne est elle-même reliée statiquement à la position angulaire de l'actionneur.

#### RÉFÉRENCES

M. Ammann, N. P. Fekete, L. Guzzella, and A.H. Glattfelder. Model-based control of the VGT and EGR in a turbocharged common-rail Diesel engine : theory and passenger car implementation. *SAE transactions*, 112(3) :527–538, 2003.

D. Bresch-Pietri and M. Krstic. Adaptive trajectory tracking despite unknown input delay and plant parameters. *Automatica*, 45(9) :2074–2081, 2009.

D. Bresch-Pietri, J. Chauvin, and N. Petit. Adaptive backstepping controller for uncertain systems with unknown input time-delay. application to SI engines. In *Proc. of the Conference on Decision and Control*, 2010.

D. Bresch-Pietri, J. Chauvin, and N. Petit. Output feedback control of time delay systems with adaptation of delay estimate. In *Proc. of the IFAC World Congress*, 2011.

D. Bresch-Pietri, J. Chauvin, and N. Petit. Invoking halanay inequality to conclude on closed-loop stability of a process with input-varying delay. In *10th IFAC Workshop on Time Delay Systems*, 2012.

M. Chèbre, Y. Creff, and N. Petit. Feedback control and optimization for the production of commercial fuels by blending. *Journal of Process Control*, 20(4) :441–451, 2010.

L. Eriksson. *Spark Advance Modeling and Control*. PhD thesis, Linköping University, May 1999.

J. Harmand and D. Dochain. The optimal design of two interconnected (bio) chemical reactors revisited. *Computers & chemical engineering*, 30(1) :70–82, 2005.

J. B. Heywood. *Internal combustion engine fundamentals*. McGraw-Hill New York, 1988.

LMS IMAGINE. <http://www.lmsintl.com>.

M. Krstic. *Boundary control of PDEs : A course on backstepping designs*. Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia, PA, USA, 2008.

M. Krstic. *Delay compensation for nonlinear, adaptive, and PDE systems*. Birkhauser, 2009.

J. Lauber. *Moteur à allumage commandé avec EGR : modélisation et commande non linéaires*. PhD thesis, LAMIH, Université de Valenciennes, 2003.

J. Lauber, T. M. Guerra, and M. Dambrine. Air-fuel ratio control in a gasoline engine. *International Journal of Systems Science*, 42(2) :277–286, 2011.

F. Le Berr, M. Miche, G. Le Sollic, F. A. Lafossas, and G. Colin. Modelling of a turbocharged SI engine with variable camshaft timing for engine control purposes. In *SAE World Congress*, volume number 2006-01-3264, 2006.

T. Leroy, J. Chauvin, F. Le Berr, A. Duparchy, and G. Alix. Modeling fresh air charge and residual gas fraction on a dual independent variable valve timing SI engine. *SAE International Journal of Engines*, 1(1) :627–635, 2009.

N. Petit, Y. Creff, and P. Rouchon. Motion planning for two classes of nonlinear systems with delays depending on the control. In *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, volume 1, pages 1007–1011. IEEE, 1998.

J.-P. Richard. Time-delay systems : an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39(10) :1667–1694, 2003.

M. Sbarciog, R. De Keyser, S. Cristea, and C. De Prada. Nonlinear Predictive Control of processes with variable time delay. A temperature control case study. In *Proc. of the IEEE International Conference on Control Applications*, pages 1001–1006. IEEE, 2008.

M. J. Van Nieuwstadt, I. V. Kolmanovsky, P. E. Moraal, A. Stefanopoulou, and M. Jankovic. Egr-vgt control schemes : experimental comparison for a high-speed diesel engine. *Control Systems Magazine, IEEE*, 20(3) :63–79, 2000.

Y. Yildiz, A. Annaswamy, I. Kolmanovsky, and D. Yanakiev. Adaptive Posicast Controller for Time-delay Systems with Relative Degree  $n \leq 2$ . *Automatica*, 46 :279–289, 2010.

D. Yue and Q. L. Han. Delayed feedback control of uncertain systems with time-varying input delay. *Automatica*, 41(2) :233–240, 2005.

M. Zheng, G. T. Reader, and J. G. Hawley. Diesel engine exhaust gas recirculation—a review on advanced and novel concepts. *Energy Conversion and Management*, 45(6) :883–900, 2004.

<sup>9</sup> Une piste envisagée consisterait à exploiter la mesure de la sonde Lambda en tenant compte d'un second retard de transport échappement, qui pourrait être estimé par une technique similaire à celle employée dans ce papier.